

**Atribuição de Ganhos e Perdas e Avaliação de Opções**

Tiago Miguel Soares Reis Bagorro

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor José Carlos Dias, Professor Catedrático,  
ISCTE-IUL

Setembro, 2025

---

Departamento de Finanças

Departamento de Matemática

### **Atribuição de Ganhos e Perdas e Avaliação de Opções**

Tiago Miguel Soares Reis Bagorro

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor José Carlos Dias, Professor Catedrático,  
ISCTE-IUL

Setembro, 2025

## **Agradecimentos**

Reconhecer que nada se faz sozinho é, sem dúvida, o primeiro passo para expressar a minha gratidão perante este projeto. O apoio e ajuda de todos os que contribuíram para esta caminhada foram fundamentais e merecem ser destacados. Primeiramente, quero agradecer ao Professor José Carlos Dias por, não só desafiar a minha pessoa a embarcar nesta investigação, mas também por todo o conhecimento e esforço partilhado que esta área exige e merece.

Os momentos difíceis revelaram quem realmente está do nosso lado quando mais precisamos e, com o tempo, percebemos que essas pessoas não são tantas quanto as que achamos. No entanto são estas que de facto importam e as quais tenho o orgulho de poder chamar de família. Por isso, agradeço profundamente à minha mãe e ao meu pai que sempre me apoiaram incondicionalmente, tantas vezes quanto as que nem eu sabia que da sua ajuda precisava. À minha irmã, que desde sempre foi o meu maior pilar na minha vida pessoal como profissional, tornando-se na minha melhor motivação e inspiração, expresso a minha maior gratidão por nunca ter desistido do seu irmão mais novo, desafiando-o todos os dias a ser uma versão melhor de si mesmo dia após dia.

Aos meus amigos mais próximos, que de uma maneira ou de outra sempre me recordaram que o ditado “treino duro, combate fácil” nunca fez tanto sentido, obrigado por acompanharem esta longa e desafiante jornada. Por fim, quero também agradecer a mim mesmo pela persistência em não desistir de cada objetivo, paciência de lidar com cada obstáculo e de toda a determinação depositada nas metas profissionais e pessoais estabelecidas. Sem dúvida de que todos foram cruciais para que chegasse até aqui e concluisse esta dissertação.



## **Resumo**

As dinâmicas tradicionalmente assumidas para o preço do ativo subjacente e para a sua volatilidade instantânea revelam-se pouco realistas, sobretudo em opções de longo prazo, que exigem projeções incertas para ambos os processos. Em particular, os pressupostos de estacionariedade da volatilidade instantânea resultam numa menor variabilidade nos preços e maior suavidade das curvas de volatilidade implícita observadas em contratos de longo prazo (“Smiles”), em desfasamento face à evidência empírica (Carr e Wu, 2020).

Carr e Wu (2020) propõem um enquadramento de avaliação centrado na atribuição de lucros e perdas (P&L) dos investimentos em opções. Partindo da formulação da avaliação de opções de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), o retorno instantâneo de uma opção, com maturidade fixa, é decomposto em três componentes: as alterações no preço do ativo subjacente, as variações na volatilidade implícita da opção em estudo, e, por fim, os efeitos de ordem superior associados. Em vez de vincular os contratos a uma dinâmica especificada, a abordagem liga o valor justo atual da volatilidade implícita às variações logarítmicas do preço do ativo subjacente, em determinados intervalos temporais.

Conclui-se com uma perspetiva top-down que desvia o foco dos payoffs terminais para as flutuações de curto prazo do P&L. Esta implementação exige uma estrutura de risco específica, capaz de determinar com rigor as exposições ao risco e as suas magnitudes, associadas a cada investimento. Esta formalização assegura a coerência entre avaliação e controlo de risco, estabelecendo uma base robusta para integrar a análise média-variância no universo de derivados.

**Palavras-Chave:** Avaliação Transversal, Séries Temporais, Comunalidade Local.



## **Abstract**

Traditional assumptions about the underlying asset's price dynamics and its instantaneous volatility often prove unrealistic, particularly for long-dated options, which require uncertain projections for both processes. In particular, imposing stationarity on instantaneous volatility tends to produce lower price variability and overly smooth implied volatility smiles at long maturities, in disagreement with the empirical evidence (Carr and Wu, 2020).

Carr and Wu (2020) propose a valuation framework centered on profit and loss (P&L) attribution for option investments. Building on the option pricing formulation of Black and Scholes (1973) and Merton (1973), the instantaneous return on fixed maturity option position is decomposed into three components: changes in the underlying price, changes in the option's implied volatility, and higher order effects. Rather than tying all contracts to a single specified dynamics, the approach links the current fair level of implied volatility to the logarithmic changes in the underlying's price over relevant time intervals.

The framework adopts a top-down perspective that shifts the focus from terminal payoffs to short horizon P&L fluctuations. Implementing it requires a dedicated risk architecture capable of rigorously determine each investment's risk exposures and their magnitudes. This formalization ensures consistency between valuation and risk control and provides a robust foundation for integrating mean-variance analysis into the derivatives domain.

**Keywords:** Cross Sectional, Time Series, Local Communality.



# Índice

<b>Capítulo 1</b> .....	1
Introdução.....	1
<b>Capítulo 2</b> .....	3
Revisão da Literatura.....	3
<b>Capítulo 3</b> .....	5
3.1 Modelos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973).....	5
3.2 Atribuição de Ganhos e Perdas ( <i>Profit and Loss Attribution – P&amp;L</i> ) .....	6
3.3 Sensibilidades de Black-Scholes-Merton.....	6
<b>Capítulo 4</b> .....	11
Atribuição de Ganhos e Perdas em Investimentos de Opções.....	11
<b>Capítulo 5</b> .....	13
Expetativa de Risco-Neutro e Avaliação da Volatilidade Implícita.....	13
<b>Capítulo 6</b> .....	17
Comunalidade Local e Avaliação Transversal (Cross-Sectional) .....	17
6.1 Estrutura Temporal da Variância Implícita At-The-Money.....	18
6.1.1 Pressuposto de Comunalidade Local sobre Taxas de Variação.....	18
6.2 A Volatilidade Implícita Smile .....	20
6.2.1 Pressuposto de Comunalidade Local sobre Taxas de Variância e Covariância....	21
<b>Capítulo 7</b> .....	23
Análise Empírica sobre Opções do Índice S&P 500 .....	23
7.1 Construção de Séries Flutuantes de Variações Percentuais da Volatilidade Implícita .....	24
7.2 Comunalidade Local e Estruturas Fatoriais Globais .....	26
7.3 Estrutura a termo da Variância Implícita At-The-Money e respetiva Dinâmica.....	31
7.4 Extração da taxa de variação a partir da estrutura a termo At-The-Money.....	33
7.5 A Volatilidade Implícita Smile e suas Variações.....	36
7.6 Extração das taxas de variância e de covariância a partir da Volatilidade Implícita Smile .....	37
7.7 Negociação da Volatilidade Implícita Smile .....	39
7.7.1 Previsão da (Co)Variância Realizada com Estimativas Cross-Sectional e Temporais .....	40
7.7.2 Trade-Off do Risco-Retorno com base nas Previsões de Séries Temporais.....	41
7.7.3 Negociação de Arbitragem Estatística baseada em ajuste Cross-Sectional .....	45

<b>Capítulo 8 .....</b>	49
Considerações Finais .....	49
<b>Bibliografia.....</b>	51
<b>Anexo .....</b>	53

# Capítulo 1

## Introdução

A suposição de dinâmicas sobre o preço do ativo subjacente e da sua volatilidade instantânea é usualmente distorcida da realidade. Nesta dissertação pretendemos quantificar o preço de opções de longo prazo e, para tal, é necessário realizar projeções sobre o preço dos ativos subjacentes (e, consequentemente da sua volatilidade) ao longo de um período de tempo futuro. É importante referir que as projeções de longo prazo são caracterizadas pela sua baixa precisão e também a estacionaridade (não perigosa) sobre a dinâmica da volatilidade instantânea, que são fatores que causam uma menor variação sobre o preço dos ativos e tornam a volatilidade implícita smile mais apelativa a contratos de longo prazo, comparativamente aos valores reais observados (Car e Wu (2020)).

Em contraste com a abordagem tradicional de avaliação de opções, que vincula os valores de todos os contratos de opções a uma única especificação de dinâmicas de referência, a metodologia de Carr e Wu (2020) interliga o valor justo atual da volatilidade implícita de um contrato de opção com os momentos condicionais atuais das variações logarítmicas do preço do ativo subjacente e da volatilidade implícita desse contrato. Esta mudança subtil, mas fundamental, resulta da utilização da própria volatilidade implícita da opção como variável de estado, em vez da taxa de variância instantânea do ativo subjacente.

Nesta dissertação pretendemos mostrar as diferenças entre a abordagem tradicional de classificação de preços de opções, isto é, uma abordagem relativa à avaliação centralizada bottom-up onde o foco principal encontra-se sobre a consistência cross-sectional utilizada para um conjunto de dinâmicas (relativas ao contrato), e um novo framework descentralizado com abordagem top-down. A grande diferença entre os frameworks identificados está no risco de retorno do trade-off de um contrato específico em que, relativamente ao framework tradicional, esta nova abordagem determina o preço da opção com base na exposição do risco do contrato e as suas magnitudes e não face ao preço de contratos com características semelhantes (volatilidade implícita, data de vencimento, montante da opção). Reconhecer esta diferença entre as abordagens permite verificar que o novo enquadramento possibilita a criação de previsões especializadas sobre os riscos e prémios de risco subjacentes a um

investimento específico, considerando-os como condições atuais do risco neutro da opção para posteriormente formalizar suposições de preços.

Estas abordagens apresentam diferentes formas de determinar o preço das opções de contratos, no entanto estes frameworks também se podem complementar, as dinâmicas da abordagem tradicional fornecem bases rigorosas para a computação de hipóteses relativamente às condições correntes esperadas e, simultaneamente, os padrões de movimento, empiricamente identificados nessas condições podem servir de referência para a definição da dinâmica padrão.

Utilizando o índice S&P500 para formalizar a análise empírica, pretendemos demonstrar que determinar o desvio do risco neutro da estrutura da volatilidade implícita da opção at-the-money será fundamental para previsões futuras do movimento da volatilidade implícita. Do mesmo modo, determinar a variância e covariância através da volatilidade implícita smile pode gerar melhores previsões de variâncias e covariâncias futuras se combinadas com estimativas passadas destas duas componentes. Estas previsões mais próximas da realidade permitem estabelecer oportunidades de investimentos de trade-offs com risco-retorno superiores.

Esta dissertação encontra-se organizada da seguinte forma:

- No capítulo 2 fazemos uma breve revisão da Literatura;
- No capítulo 3 serão introduzidas algumas definições e conceitos fundamentais;
- No capítulo 4 será introduzida e estabelecida a atribuição de Lucros e Perdas para um contrato de opção sob a fórmula de precificação de Black-Scholes-Merton;
- No capítulo 5 abordaremos o risco neutro expectável extraído do retorno atribuído e também derivaremos as implicações de preço de não-arbitragem;
- No capítulo 6 iremos analisar as implicações da precificação através da metodologia Cross-Sectional sob diferentes suposições de comunalidade local e global;
- No capítulo 7 serão executados estudos empíricos em opções de índice S&P500 e também iremos explorar diferentes aplicações da nova abordagem;
- No capítulo 8 discutiremos as principais suposições, limitações e exposições ao risco da teoria em estudo;
- No capítulo 9 serão apresentados e elucidados os resultados obtidos.

# Capítulo 2

## Revisão da Literatura

Uma interpretação alternativa do enquadramento tradicional de avaliação de opções pode ser obtida a partir da perspetiva de “*abrangência*”, conforme articulada por Bakshi e Madan (2000). Estes autores concebem a função característica do retorno do ativo subjacente como uma base que abrange a maioria dos instrumentos derivados. A especificação das dinâmicas subjacentes determina a avaliação dos títulos de Arrow-Debreu (1954), os quais servem para replicar os pagamentos da maioria dos contratos contingentes. Esta perspetiva de *abrangência* demonstra um ênfase significativo na análise transversal. Por conseguinte, as discrepâncias de preços nos modelos tradicionais de avaliação de opções são frequentemente vistas como um ponto de partida para a implementação de estratégias de arbitragem estatística (e.g., Duarte, Longstaff e Yu (2007); Bali, Heidari e Wu (2009)).

Em contrapartida, o nosso enquadramento proposto para avaliação de opções dá prioridade à relação risco-retorno para contratos individuais, alinhando desta forma a avaliação de um contrato específico com as perspetivas subjetivas dos investidores sobre as exposições ao risco e as respetivas magnitudes, em vez de alinhar com a avaliação de outros contratos. Esta abordagem distinta permite a integração de previsões especializadas sobre os riscos e os prémios de risco associados, convertendo essas previsões em condições de momento, neutras ao risco. Inversamente, a abordagem desenvolvida nesta dissertação, possibilita a extração de condições de momento a partir dos preços observados no mercado, facilitando a análise do conteúdo informacional incorporado nessas condições.

Uma análise empírica de opções sobre o índice S&P 500 demonstra que a derivada neutra ao risco, extraída da estrutura a termo da volatilidade implícita *at-the-money*, pode ser utilizada como preditor de movimentos futuros na volatilidade implícita. Adicionalmente, a variância e covariância derivadas do efeito sorriso da volatilidade implícita, quando combinadas com estimativas históricas de momentos, produzem previsões mais precisas de variância e covariância realizadas. Estas previsões melhoradas podem ser subsequentemente utilizadas para tomadas de decisões de investimento em contratos derivados, com o intuito de obter melhores resultados. Ao contrário das abordagens convencionais de arbitragem estatística, que se baseiam na suposição de reversão dos erros de avaliação, a nossa abordagem utiliza previsões temporais de variância e covariância para identificar oportunidades de investimento com perfis risco-retorno mais vantajosos

Outra metodologia de avaliação relevante é o modelo Vanna-Volga (Castagna e Mercurio, 2007; Wystup, 2010), que incorpora métricas derivadas do modelo BSM, como Vega, Vanna e Volga. Este modelo define um nível de volatilidade e calcula o valor correspondente para uma opção de contrato utilizando o modelo BSM. A diferença de preço entre o contrato-alvo e o valor de referência, é estruturada como uma função linear das diferenças de preço de três "opções pilar" relativamente aos seus respetivos valores de referência. O modelo garante que o Vega, o Vanna e o Volga do contrato-alvo estejam alinhados com os de uma carteira composta pelas três opções pilar, sendo todas as métricas de sensibilidade avaliadas com base na volatilidade de referência. Esta abordagem tem sido eficazmente utilizada, baseando-se no pressuposto de que as exposições ao risco de uma opção podem ser aproximadamente replicadas utilizando três contratos cuidadosamente selecionados.

Embora o modelo vanna-volga partilhe uma dependência comum com o enquadramento BSM para definir exposições ao risco, diverge significativamente da nossa abordagem, tanto na implementação como na perspetiva conceptual. Especificamente, o método de Carr e Wu (2020) calcula as exposições ao risco BSM de um contrato em relação à sua própria volatilidade implícita, em vez de uma volatilidade de referência. Além disso, esta metodologia de avaliação estabelece uma ligação direta entre o nível de volatilidade implícita de um contrato e as respetivas condições de momento neutras ao risco, ao contrário de ligar o valor de uma opção aos valores de outros contratos.

Na literatura académica, um número crescente de estudos tem alterado o foco dos pagamentos finais para os retornos de investimento de curto prazo das opções. Por exemplo, Israelov e Kelly (2017) destacam as limitações dos modelos tradicionais de avaliação de opções e defendem a previsão empírica da distribuição dos retornos de investimento de opções. Trabalhos anteriores de Coval e Shumway (2000) e Jones (2006) também analisaram os retornos de opções. Estudos mais recentes ligaram esses retornos a características específicas das empresas. Por exemplo, An et al. (2014) associam variações futuras da volatilidade implícita ao desempenho histórico das ações. Boyer e Vorkink (2013) relacionam retornos de opções à volatilidade implícita smile. Byun e Kim (2016) exploram a relação entre retornos de opções e características semelhantes a lotarias dos ativos subjacentes. Por fim, Hu e Jacobs (2017) ligam os retornos de opções aos níveis de volatilidade do ativo subjacente.

Esta investigação alinha-se com esta tendência académica mais ampla, oferecendo, por isso, uma base teórica para a análise dos retornos de investimento de curto prazo em opções e estabelece uma ligação entre o comportamento previsto dos retornos e a sua avaliação.

# Capítulo 3

Este capítulo destina-se apenas a introduzir alguns conceitos fundamentais.

## 3.1 Modelos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973)

Um dos modelos fundamentais e amplamente utilizado na teoria financeira para a avaliação de derivados é o modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). Este modelo fornece um método analítico para calcular o preço de opções europeias, considerando a influência de outros ativos financeiros e certos fatores de mercado sob determinadas condições de tempo e risco.

A precificação de uma opção segundo o modelo de Black-Scholes-Merton baseia-se em seis variáveis essenciais: o preço atual do ativo subjacente  $S_t$ , o preço de exercício da opção ( $K$ ), a taxa de juro livre de risco ( $r$ ), o tempo restante até à maturidade da opção ( $T-t$ ), a volatilidade do ativo subjacente ( $\sigma$ ) e a taxa de rendimento dos dividendos ( $q$  – dividend yield).

O modelo assume que o preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico com volatilidade constante e que os mercados são eficientes, isto é, não há oportunidades de arbitragem. Com base nessas premissas, o modelo de Black-Scholes-Merton permite a determinação do valor justo de uma opção europeia de compra (call) ou de venda (put) num dado momento  $t$ , através das seguintes expressões matemáticas:

$$C(S_t, t) = S_t * e^{-q(T-t)} * N(d_1) - K * e^{-r(T-t)} * N(d_2), \quad (3.1)$$

para o caso da call e

$$P(S_t, t) = K * e^{-r(T-t)} * N(-d_2) - S_t * e^{-q(T-t)} * N(-d_1), \quad (3.2)$$

para o caso da put, onde

$$d_1 = \frac{1}{\sigma * \sqrt{T-t}} \left( \ln \frac{S_t}{K} + \left( r - q + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) \right), \quad (3.3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T-t}, \quad (3.4)$$

com  $N(\cdot)$  sendo a função de distribuição normal cumulativa.

### 3.2 Atribuição de Ganhos e Perdas (Profit and Loss Attribution – P&L)

Como iremos analisar no próximo capítulo, os Lucros e Perdas (P&L) de curto prazo, de um contrato de opção, podem ser determinados pela fórmula de avaliação de Black-Scholes-Merton. Esta fórmula permite desconstruir a variação no valor de uma opção em função de três fatores principais: o tempo calendário  $t$ , o preço do ativo subjacente  $S_t$  e a volatilidade implícita da opção  $I_t$ .

$$B(t, S_t, I_t; K, T) = S_t N\left(-\frac{k - \frac{1}{2}I_t^2\tau}{I_t\sqrt{\tau}}\right) - K N\left(-\frac{k + \frac{1}{2}I_t^2\tau}{I_t\sqrt{\tau}}\right) \quad (3.5)$$

onde  $\tau \equiv T - t$  define o tempo até à maturidade, e  $z_{\pm} \equiv \left(k \pm \frac{1}{2}I_t^2\tau\right)$ , com  $k \equiv \ln \frac{K}{S_t}$  representando a *moneyness* relativo. Neste contexto, os termos  $z_+$  e  $z_-$  denotam a *moneyness* ajustada pela convexidade, sob as medidas neutra ao risco e alternativa, respectivamente, no enquadramento do modelo BSM.

Portanto,  $B(t, S_t, I_t; K, T)$  é a representação de BSM do valor de uma opção como função das variáveis  $t$ ,  $S_t$  e  $I_t$ , para uma opção de compra europeia com preço de exercício  $K$  e data de maturidade  $T$ .

### 3.3 Sensibilidades de Black-Scholes-Merton

Para a realização de cálculos adicionais nesta dissertação, é fundamental destacar os principais componentes do modelo padrão de Black-Scholes-Merton. Através do preço BSM com dividendos contínuos  $q$ ,

$$C(S_t, t) = S_t * e^{-q(T-t)} * N(d_1) - K * e^{-r(T-t)} * N(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r - q + \frac{I_t^2}{2}\right) * \tau}{I_t \sqrt{\tau}}, \quad d_2 = d_1 - I_t \sqrt{\tau} \quad (3.6)$$

e derivando o preço em relação ao spot  $\Delta_t \equiv \frac{\partial C_t}{\partial S_t}$ , mantendo K, r, q,  $\partial$  e  $\tau$  fixos usando a identidade BSM, os termos da regra da cadeia (via  $\frac{\partial d_i}{\partial S_t}$ ) são cancelados e por isso:

$$\Delta_t \equiv e^{-q\tau} * N(d_1) \equiv N(d_1), \quad (3.7)$$

para opções sem dividendos ( $q = 0$ ).

Desta forma é possível simplificar

$$C_t = S_t * e^{-q\tau} N(d_1) - K * e^{-r\tau} * N(d_2), \quad d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \frac{I_t^2}{2} * \tau}{I_t \sqrt{\tau}},$$

onde a derivada em relação ao spot quando  $q = 0$  (ou forward)

$$\Delta_t \equiv N(d_1) \equiv B_S. \quad (3.8)$$

*BSM Delta para uma call option*

$$B_S = N(d_1), \quad d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \frac{I_t^2}{2} * \tau}{I_t \sqrt{\tau}} = -\frac{z_-}{I_t \sqrt{\tau}}, \quad (3.9)$$

onde  $N(\cdot)$  representa a função de distribuição cumulativa da normal e

$$z_- = \ln \frac{K}{S_t} - \frac{1}{2} I_t^2 \tau, \quad (3.10)$$

*BSM Gamma e Cash Gamma para uma call option*

$$B_{SS} = \frac{n(d_1)}{S_t I_t \sqrt{\tau}}, \quad B_{SS} S_t^2 = \frac{S_t n(d_1)}{I_t \sqrt{\tau}}, \quad (3.11)$$

onde  $n(\cdot)$  representa a função de densidade de probabilidade da variável normal.

As seguintes medidas de sensibilidade podem ser obtidas em termos do Cash Gamma:

*BSM Theta para uma call option*

$$B_t = -\frac{1}{2} * \frac{S_t * (n(d_1)) * I_t}{\sqrt{\tau}} = -\frac{1}{2} I_t^2 B_{SS} S_t^2, \quad (3.12)$$

*BSM Vega e Cash Vega para uma call option*

$$B_I = S_t \sqrt{\tau} n(d_1), \quad B_I I_t = S_t I_t \sqrt{\tau} n(d_1) = I_t^2 \tau B_{SS} S_t^2. \quad (3.13)$$

*BSM Vanna e Dollar Vanna para uma call option*

$$\begin{aligned} B_{IS} &= \frac{\partial B_I}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t} (S_t \sqrt{\tau} n(d_1)) \\ &= \sqrt{\tau} n(d_1) - \frac{d_1 n(d_1)}{I_t}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

como pode ser consultado no anexo.

$$\begin{aligned} B_{IS} I_t S_t &= S_t n(d_1) (I_t \sqrt{\tau} - d_1) = S_t n(d_1) \left( I_t \sqrt{\tau} + \frac{-(\ln K / S_t) - \frac{1}{2} I_t^2 \tau}{I_t \sqrt{\tau}} \right) \\ &= \frac{S_t n(d_1)}{I_t \sqrt{\tau}} \left( \ln K / S_t + \frac{1}{2} I_t^2 \tau \right) \\ &= B_{SS} S_t^2 Z_+. \end{aligned} \quad (3.15)$$

*BSM Volga e Dollar Volga para uma call option*

$$\begin{aligned}
 B_{II} &= \frac{\partial B_I}{\partial I_t} = S_t \sqrt{\tau} \frac{\partial}{\partial I_t} n(d_1) = \\
 &= S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1) \left( -\frac{\ln(S_t/K)}{I_t^2 \sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right), \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

como pode ser consultado no anexo.

$$\begin{aligned}
 B_{II} I_t^2 &= \left[ S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1) \left( -\frac{\ln(S_t/K)}{I_t^2 \sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right) \right] * I_t^2 = \\
 &= S_t n(d_1)(-d_1) \left( -\ln(S_t/K) + \frac{1}{2} I_t^2 \tau \right) = \\
 &= B_{SS} S_t^2 Z_- Z_+ \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

como pode ser consultado no anexo.



# Capítulo 4

## Atribuição de Ganhos e Perdas em Investimentos de Opções

Consideremos um mercado composto por três instrumentos financeiros: um ativo livre de risco, um ativo com risco e uma opção vanilla europeia escrita sobre o ativo com risco. Para simplificar a análise, assumimos a existência de taxas de juro nulas, bem como a ausência de custos ou benefícios associados à posse do ativo com risco. Em aplicações práticas, é possível incorporar uma estrutura determinística das taxas de financiamento ao modelar o valor a termo do ativo subjacente e ao definir a *moneyness* da opção em relação ao seu preço a termo. Embora o ativo com risco possa corresponder a qualquer título negociável, para efeitos de simplificação, referir-nos-emos a ele como uma ação. Nos Estados Unidos, as opções sobre ações individuais negociadas em bolsa são, geralmente, de estilo americano. Para aplicar a presente abordagem teórica às opções americanas, utiliza-se frequentemente uma simplificação prática: extrai-se a volatilidade implícita associada ao modelo de Black-Scholes-Merton (BSM) a partir do preço da opção americana, utilizando métodos baseados em árvores ou grelhas, e, em seguida, calcula-se o valor de uma opção europeia com a mesma maturidade e preço de exercício, com base na volatilidade implícita extraída.

Pressupomos a existência de um ambiente de negócio contínuo e sem fricções, envolvendo o ativo livre de risco, a ação, e o contrato de opção sobre a ação. Além disso, assumimos a inexistência de oportunidades de arbitragem entre a ação e o ativo livre de risco. Como consequência, existe uma medida de probabilidade neutra ao risco ( $\mathbb{Q}$ ), equivalente à medida de probabilidade física ( $\mathbb{P}$ ), sob a qual o preço da ação ( $S$ ) segue uma martingale. Partindo deste contexto, supomos ainda que o valor da opção sob avaliação não permite arbitragem em relação a qualquer combinação de portfólios constituídos pela ação e pelo ativo livre de risco.

Inicialmente, consideramos uma posição longa numa opção de compra europeia. Manter esta posição até à sua maturidade gera ganhos ou perdas (P&L) que dependem exclusivamente do pagamento terminal da opção. A avaliação clássica de opções começa pela definição da função de pagamento terminal, calculando, posteriormente, a expectativa deste pagamento com base em hipóteses que governam as dinâmicas do preço do ativo subjacente. Por outro lado, a abordagem proposta neste estudo foca-se nos ganhos e perdas gerados de forma instantânea ao longo de pequenos intervalos temporais. As flutuações de curto prazo nos P&L da posição na opção são determinadas principalmente pelas exposições da opção a diferentes fontes de risco e pelas variações dessas mesmas fontes de risco. Deste

modo, a análise prioriza a definição das exposições ao risco e a quantificação das suas magnitudes, em vez de enfatizar exclusivamente os pagamentos terminais.

Os P&L de curto prazo de um contrato de opção podem ser atribuídos diretamente através da fórmula de avaliação explícita de BSM.

Para qualquer contrato de opção, a fórmula de BSM estabelece uma relação funcional entre o preço da opção no instante  $t$ , o preço da ação ( $S_t$ ) e a volatilidade implícita ( $I_t$ ). Desde que o preço da opção não permita oportunidades de arbitragem em relação ao ativo subjacente e ao ativo livre de risco, é sempre possível determinar um valor positivo de volatilidade implícita que, como input da fórmula BSM, reproduz o preço da opção observado (Hodges, 1996). A fórmula de BSM constrói assim, uma ligação monótona entre o preço da opção e a sua volatilidade implícita, capturando quaisquer choques estocásticos que influenciem a opção, com exceção dos que derivam diretamente do preço do ativo subjacente, através da volatilidade implícita.

Com base na equação de avaliação de BSM, é possível decompor os ganhos e perdas instantâneos de uma posição na opção, considerando variações no tempo calendário, no preço do ativo subjacente e na volatilidade implícita:

$$dB = [B_t dt + B_S dS_t + B_I dI_t] + \left[ \frac{1}{2} B_{SS}(dS_t)^2 + \frac{1}{2} B_{II}(dI_t)^2 + B_{IS}(dS_t dI_t) \right] + J_t, \quad (4.1)$$

onde os argumentos da função  $B(t, S_t, I_t; K, T)$  foram omitidos para simplificação, e os termos  $(B_t), (B_S), (B_I), (B_{SS}), (B_{II}), (B_{IS})$  representam as derivadas parciais da função em relação ao tempo ( $t$ ), ao preço do ativo ( $S$ ) e à volatilidade implícita ( $I$ ). Estas derivadas são designadas, respetivamente, como *theta* ( $B_t$ ), *delta* ( $B_S$ ), *vega* ( $B_I$ ), *gamma* ( $B_{SS}$ ), *volga* ( $B_{II}$ ) e *vanna* ( $B_{IS}$ ). O primeiro termo da equação corresponde às derivadas de primeira ordem, o segundo engloba as derivadas de segunda ordem, enquanto o termo  $J_t$  captura o efeito de potenciais derivadas de ordem superior resultantes de saltos estocásticos no preço da ação ou na volatilidade implícita. No caso de dinâmicas puramente contínuas para o preço da ação e a volatilidade implícita, as derivadas de primeira e segunda ordem são suficientes para descrever todas as variações relevantes no preço da opção, em intervalos temporais curtos. Neste contexto, assumimos dinâmicas contínuas e estabelecemos a ligação entre a avaliação de opções e as suas exposições de primeira e segunda ordem.

# Capítulo 5

## Expetativa de Risco-Neutro e Avaliação da Volatilidade Implícita

Considerando a hipótese de dinâmicas contínuas, é possível determinar a expetativa do retorno de um investimento (Profit and Loss – P&L) sob a medida de risco neutro  $\mathbb{Q}$ . Em seguida, esta expetativa é dividida pelo horizonte temporal  $dt$ , permitindo desta forma a realização de uma análise detalhada da evolução do investimento ao longo do tempo:

$$\frac{\mathbb{E}_t[dB]}{dt} = B_t + B_I I_t \mu_t + \frac{1}{2} B_{SS} S_t^2 \sigma_t^2 + \frac{1}{2} B_{II} I_t^2 w_t^2 + B_{IS} I_t S_t \gamma_t. \quad (5.1)$$

Neste enquadramento, a operação de expetativa  $\mathbb{E}[\cdot]$  é definida sob a medida de risco neutro, condicionada à filtragem temporal no instante  $t$ . Os parâmetros indispensáveis envolvidos são interpretados da seguinte forma:

- $\mu_t$ : Representa a taxa de variação anual da volatilidade implícita esperada, sob a medida de risco neutro, modelada segundo Black-Scholes-Merton (BSM). Formalmente é expressa como  $\mu_t \equiv \mathbb{E}_t \left[ \frac{dI_t}{I_t} \right] / dt$ ;
- $\sigma_t^2$  : Designa a variância de retorno do ativo subjacente, definida como  $\sigma_t^2 \equiv \mathbb{E}_t \left[ \left( \frac{dS_t}{S_t} \right)^2 \right] / dt$ ;
- $w_t^2$  : Designa a variância da volatilidade implícita, representada como  $w_t^2 \equiv \mathbb{E}_t \left[ \left( \frac{dI_t}{I_t} \right)^2 \right] / dt$ ;
- $\gamma_t$  : Representa a covariância entre o retorno do ativo subjacente e as variações na volatilidade implícita, definida como  $\gamma_t \equiv \mathbb{E}_t \left[ \left( \frac{dS_t}{S_t}, \frac{dI_t}{I_t} \right) \right] / dt$ .

Desta forma, a equação apresentada anteriormente permite capturar a dinâmica do retorno do investimento, considerando não apenas os efeitos das variações do preço do ativo subjacente, mas também as interações entre o preço do ativo e a sua volatilidade implícita e os seus momentos condicionais.

O Teorema seguinte demonstra que, na ausência de custos de financiamento e de oportunidades de arbitragem, o retorno esperado de uma opção financeira sob a medida de risco neutro é nulo.

**Teorema 1:**

O retorno esperado de um investimento de opções financeiras, calculado sob a medida de risco neutro, é igual a zero desde que se aceite a hipótese de inexistência de custos de financiamento e ausência de oportunidades de arbitragem, o que nos leva à formulação de uma equação de relação de preço. De forma a sermos mais precisos e visto que o preço da opção cumpre a condição de não arbitragem e por isso o retorno esperado de uma opção é igualado a zero, devemos concluir que o preço da opção obedece às restrições impostas pela seguinte equação:

$$0 = B_t + B_I I_t \mu_t + \frac{1}{2} B_{SS} S_t^2 \sigma_t^2 + \frac{1}{2} B_{II} I_t^2 w_t^2 + B_{IS} I_t S_t \gamma_t . \quad (5.2)$$

Em vez de nos concentrarmos na identificação pormenorizada nas dinâmicas do preço do ativo subjacente, através da equação proposta, focamo-nos nos primeiros e segundos momentos condicionais do preço do ativo, sem negligenciar as variações da volatilidade implícita da opção, no instante t.

Esta visão de relação de preços evidencia os benefícios de uma análise de perspetiva de trade-offs de curto prazo, isto é, ao manter uma posição de longo prazo sobre uma opção, esta perderá valor temporal à medida que o tempo avança, resultando numa diminuição do seu valor de mercado. Assim, a dinâmica temporal da opção financeira é fundamental para a análise dos retornos de risco, sob a perspetiva da volatilidade implícita e da evolução de preços.

Desta forma, é possível verificar que a equação evidencia algumas interconexões lógicas relevantes. Primeiramente, é essencial reconhecer que o *Theta* da opção ( $B_t$ ) reflete a taxa de perda de valor temporal, sendo que, esta perda é compensada pelos ganhos esperados que resultam da variação do preço do ativo, medidos pela variância do retorno do mesmo ( $\sigma_t^2$ ), gerada pela exposição positiva (da opção) ao *Gamma* ( $B_{SS}$ ). Adicionalmente, as variações verificadas na volatilidade implícita da opção ( $w_t^2$ ) e na covariância entre as suas variações e o retorno do ativo subjacente ( $\gamma_t$ ), introduzem ganhos e perdas devido às exposições do *Volga* ( $B_{II}$ ) e *Vanna* ( $B_{IS}$ ) da opção, respetivamente. Dependendo da direção esperada

relativamente ao movimento da volatilidade implícita da opção ( $\mu_t$ ), a exposição positiva ao *Vega* ( $B_I$ ) também poderá originar valores adicionais de ganhos e perdas esperados.

A condição de ausência de arbitragem estabelece que a opção deve ser valorizada de forma a garantir que, em qualquer momento, as diferentes fontes de ganhos e perdas esperados se equilibrem, resultando num retorno excessivo esperado nulo em termos de medida de risco neutro.

Esta relação de preços permite inferir que, caso as exposições da opção estiverem alinhadas com as previsões dos momentos condicionais de primeira e segunda ordem, a opção será considerada corretamente avaliada naquele momento. Contudo, esta relação não esclarece como determinar estas previsões ou mesmo como elas variam, ao longo do tempo. Como tal, um ponto importante a destacar é que o risco associado ao processo de previsão pode ser computado de forma independente do processo de precificação.

### *Corolário 1:*

Para um contrato de opção com custo de financiamento zero e sob a suposição de desenvolvimentos contínuos, tanto de preço, quanto de volatilidade implícita, a perda associada ao *Theta* da opção é totalmente compensada pelo ganho gerado pelo *Gamma*:

$$-B_t = \frac{1}{2} B_{SS} S_t^2 \sigma_t^2 . \quad (5.3)$$

Quando a volatilidade implícita da opção permanece constante ao longo do tempo, assumimos por isso que a variação no preço do ativo subjacente seja a única fonte de variação que equilibra a perda do *Theta* e os ganhos do *Gamma*. Uma característica notória da equação de precificação de Black-Scholes-Merton (BSM) é que, pelos termos do *Cash Gamma* ( $B_{SS} S_t^2$ ), podemos representar o *Cash Theta*, *Vega*, *Vanna* e *Volga*:

$$B_t = -\frac{1}{2} I_t^2 B_{SS} S_t^2 ; \quad B_I I_t = I_t^2 \tau B_{SS} S_t^2 ; \quad (5.4)$$

$$B_{IS}I_tS_t = z_+B_{SS}S_t^2; \quad B_{II}I_t^2 = z_+z_-B_{SS}S_t^2. \quad (5.5)$$

De maneira a fatorizar a variável *Cash Gamma* da equação de precificação, para um contrato de uma opção com um *Cash Gamma* positivo rigoroso, é apropriado determinar o retorno do investimento da opção como o *P&L* do investimento, por unidade de *Cash Gamma*. Obtemos por isso a seguinte equação:

$$I_t^2 = [2\tau\mu_t I_t^2 + \sigma_t^2] + [2\gamma_t z_+ + w_t^2 z_+ z_-]. \quad (5.6)$$

Este corolário evidência a interação entre os termos da equação de precificação e como a evolução temporal das variáveis envolvidas pode ser representada, destacando a relação entre as componentes de risco e os retornos esperados.

### *Teorema 2:*

Considerando a atribuição imediata do *P&L* e admitindo o pressuposto de movimentos contínuos do preço e da volatilidade implícita de uma opção europeia, baseada na equação de valorização de Black-Scholes-Merton, é possível explorar uma relação de não arbitragem entre o preço justo da volatilidade implícita da opção no instante  $t$ , a esperança condicional de risco neutro ( $\mu_t$ ) e o percentual de variação desta volatilidade implícita ( $w_t^2$ ). Adicionalmente, esta relação considera ainda a variância condicional do retorno do ativo subjacente ( $\sigma_t^2$ ) e, finalmente, a covariância entre ambas as variáveis ( $\gamma_t$ ).

Contrastando com os modelos clássicos de valorização de opções, a equação fornece uma formulação mais direta do valor justo da opção, concentrando-se na consistência temporal da valorização. Neste sentido, a abordagem em estudo visa garantir que a valorização no instante  $t$  mantém-se alinhada com o primeiro e segundo momentos condicionais do preço do ativo subjacente bem como da volatilidade implícita da opção. Esta consistência é assegurada através da atribuição restrita do *P&L* ao contrato da opção financeira, limitando a análise à sua própria estrutura de risco. Dito isto, o modelo não pretende estabelecer uma relação dinâmica global de valorização entre o ativo subjacente e o dinheiro, mas sim garantir a ausência de oportunidades de arbitragem, centrando-se nos momentos condicionais assumidos para o contrato em análise.

# Capítulo 6

## Comunalidade Local e Avaliação Transversal (Cross-Sectional)

Conforme abordado no capítulo anterior, a equação de avaliação mencionada anteriormente é aplicada a um contrato de opção específico, permitindo a comparação da sua avaliação com base numa projeção do preço do ativo subjacente e nas condições dos primeiros e segundos momentos da volatilidade implícita da opção. Assim, para realizar uma análise comparativa entre as avaliações de diferentes contratos de opção utilizando este método, revela-se essencial, em primeiro lugar, confrontar os primeiros e segundos momentos condicionais das volatilidades implícitas associadas a cada contrato.

É pertinente destacar algumas observações iniciais, no contexto do modelo de Black-Scholes-Merton (BSM), para fundamentar a análise sobre as semelhanças e divergências nas variações da volatilidade implícita em função dos preços de exercício (strikes) e das maturidades dos contratos da opção. Estes aspectos estão por isso intrinsecamente relacionados às volatilidades implícitas dos contratos da opção que, quando partilham o mesmo ativo subjacente, são equivalentes. Na realidade, as divergências nestas volatilidades implícitas decorrem, sobretudo, das diferenças nos preços de exercício e nas maturidades dos contratos em questão. No entanto, essas volatilidades possuem uma tendência a evoluir de forma sincronizada. Desta forma, é plausível afirmar que, à medida que a distância entre os preços de exercício e as maturidades dos contratos se reduzem, os níveis de volatilidade implícita tendem a aproximar-se e a sua correlação torna-se mais robusta, resultando na formação de uma volatilidade implícita smile (em função dos preços e das maturidades), com uma forma predominantemente plana.

Este capítulo concentra-se na análise das inferências de precificação transversal resultantes de várias suposições de comunalidade, dentro do novo quadro de avaliação proposto. O estudo demonstra como, sob esta nova abordagem de precificação, são calculadas as inferências transversais, baseando-se em suposições claras de comunalidade relativamente às condições momentâneas subjacentes. Neste contexto, é de extrema importância introduzir a *Estrutura de Termos da Variância Implícita At-The-Money (ATM)* e a *Volatilidade Implícita Smile*.

## 6.1 Estrutura Temporal da Variância Implícita At-The-Money

De modo a dissociar os efeitos decorrentes da estrutura temporal dos efeitos relacionados com a *moneyness*, torna-se indispensável determinar a opção at-the-money através da imposição  $z_+ = k + \frac{1}{2}I_t^2\tau = 0$ . Este ponto é equivalente ao preço de exercício que calcula o strike  $k$  com base no valor esperado, sob a medida neutra ao risco  $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ , conforme descrito no modelo de Black-Scholes-Merton. Esta dissociação permite que a análise se concentre exclusivamente nos movimentos previstos da volatilidade e na estrutura temporal de forma independente e evitando a interferência de efeitos de segunda ordem.

A opção at-the-money, identificada por  $z_+ = 0$ , constitui o único ponto de strike no qual a equação de precificação apresenta valores nulos para as variáveis Volga e Vanna, estando assim a opção at-the-money, apenas exposta aos riscos das variantes Delta, Vega e Gamma (como demonstrado nas equações associadas a cada componente). Este ponto de referência é também o único onde o nível da volatilidade implícita depende unicamente da taxa de variação prevista para a própria volatilidade implícita, sob a medida de risco neutro. Tal análise exclui a dependência da variância e covariância associadas ao retorno do ativo subjacente.

Desta forma, a equação (5.2) revela que  $I_t^2 = [2\tau\mu_t I_t^2 + \sigma_t^2]$ , permitindo assim que, rearranjando a mesma, a equação de precificação para a volatilidade implícita at-the-money, considerando um determinado tempo específico para a maturidade ( $\tau$ ), seja expressa como:

$$A_t^2 = 2\tau\mu_t A_t^2 + \sigma_t^2 \quad (6.1)$$

Com o objetivo de construir a taxa de variação prevista da estrutura temporal da volatilidade implícita at-the-money, propõe-se a seguinte *Suposição de Comunalidade Local* (*Local Commonality Assumption*).

### 6.1.1 Pressuposto de Comunalidade Local sobre Taxas de Variação

Para as volatilidades implícitas at-the-money associadas a maturidades próximas, assume-se que as taxas de variação esperadas sejam rigorosamente idênticas, isto é,  $\mu_t(\tau_1) \doteq \mu_t(\tau_2)$ , desde que a diferença entre estas maturidades  $|\tau_1 - \tau_2|$  seja suficientemente pequena.

A equação apresentada enfatiza a suposição de comunalidade relativamente à aproximação das maturidades das opções, evidenciando este facto através do uso do símbolo de igualdade aproximada “ $\doteq$ ”, que reflete a denominada *Suposição de Comunalidade Local*. O propósito fundamental desta suposição é possibilitar a extração da taxa média da variação esperada, calculada a partir da inclinação da variância implícita ao longo do intervalo de maturidades considerado.

Para introduzir o conceito de inclinação da variância implícita da opção at-the-money de maneira explícita, é pertinente apresentar a seguinte proposição:

*Proposição 1:*

Se as volatilidades implícitas de opções at-the-money apresentarem a mesma taxa de variação esperada, sob a medida de risco neutro  $\mu_t$ , em um dado momento temporal  $t$ , para um determinado intervalo de maturidades  $[\tau_1, \tau_2]$ , é então possível determinar a taxa de variação real a partir da inclinação da variância implícita do contrato de opção at-the-money, ao longo do intervalo de maturidades especificado:

$$\mu_t = \frac{A_t^2(\tau_2) - A_t^2(\tau_1)}{2(A_t^2(\tau_2)\tau_2 - A_t^2(\tau_1)\tau_1)}. \quad (6.2)$$

Partindo do pressuposto de que o erro de aproximação tende a reduzir, não só com o encurtamento do intervalo de maturidades, mas também com a estabilização das alterações na taxa de variação extraída - pode ser considerada como uma estimativa aproximada da verdadeira taxa de variação subjacente. A equação que descreve a inclinação da variância implícita pode ser derivada diretamente através do cálculo da volatilidade implícita da opção at-the-money em dois pontos distintos de maturidade,  $\tau_1$  e  $\tau_2$ , com base na taxa média de variação esperada  $\mu_t$ . A precisão e fiabilidade desta taxa de variação extraída depende, simultaneamente, da qualidade dos dados observados face às volatilidades implícitas e da estabilidade desta mesma taxa de variação, ao longo da estrutura temporal de maturidades. Adicionalmente, realiza-se uma análise detalhada de maneira a validar a *Suposição de Comunalidade Local*, acompanhada por uma investigação dos possíveis cenários e condições que possam comprometer a sua aplicabilidade ou conduzir à sua eventual decadência.

## 6.2 A Volatilidade Implícita Smile

Outro fator importante de quando se pretende dissociar o efeito da moneyness do impacto da estrutura temporal, assume-se que as opções com tempo até à maturidade semelhantes, apresentam uma elevada co-movimentação da volatilidade implícita. Para captar o nível da volatilidade implícita da opção  $A_t$ , recorre-se à cobertura Vega de um contrato de uma opção at-the-money com a mesma maturidade. Esta metodologia possibilita revelar os níveis de volatilidade implícita de diferentes contratos, ajustando-os face ao valor at-the-money, sob a forma de spreads.

Adicionalmente, parte-se do pressuposto de que a taxa esperada de variação da volatilidade implícita evolui proporcionalmente à do contrato da opção at-the-money expressa pela relação  $\mu_t I_t^2 = \mu_t^A A_t^2$ . Neste enquadramento, a subtração da equação de valorização da volatilidade implícita at-the-money à equação (5.2) permite evidenciar o impacto da volatilidade implícita smile sobre a moneyness:

$$I_t^2 - A_t^2 = 2\gamma_t z_+ + w_t^2 z_+ z_- . \quad (6.3)$$

A variância e a covariância das alterações da volatilidade implícita ( $w_t^2, \gamma_t$ ) determinam a magnitude do desvio da variância implícita no strike  $I_t^2$ , relativamente à variância implícita da opção at-the-money  $A_t^2$ , para qualquer nível de strike e moneyness  $z_+$ .

Neste seguimento, é viável recorrer a um processo de engenharia inversa para extrair a variância e a covariância antecipadas pelo mercado, uma vez que estas constituem elementos fundamentais na configuração do efeito sorriso da volatilidade implícita. A sua obtenção requer a computação de processos locais sobre a dinâmica da volatilidade implícita em função da moneyness.

A volatilidade implícita smile depende não apenas da amplitude da variação esperada no período subsequente, mas também da forma como esta evolui face ao preço do ativo subjacente, num determinado instante. Desta forma, quanto maior for a volatilidade implícita esperada, menor será a probabilidade da volatilidade implícita smile ser plana, a curto prazo.

### 6.2.1 Pressuposto de Comunalidade Local sobre Taxas de Variância e Covariância

Para qualquer intervalo de strikes com a mesma maturidade e para qualquer “ $k$ ” dentro de um determinado intervalo, a variância e a covariância da volatilidade implícita permanecem constantes, isto é:

$$w_t^2(k) \doteq w_t^2 , \quad \gamma_t^2(k) \doteq \gamma_t , \quad (6.4)$$

para todos os “ $k$ ” dentro de um determinado intervalo de strike.

Dado que as opções near-the-money são as mais negociadas no mercado, torna-se particularmente relevante, do ponto de vista prático, extrair a variância e a covariância da volatilidade implícita at-the-money. Para tal, assume-se que a variância e a covariância permanecem constantes para strikes dentro de um determinado intervalo do forward ou, de forma equivalente, que a medida de moneyness ajustada à convexidade  $z_+$ , se situa num intervalo próximo de zero.

Em síntese, o pressuposto de comunalidade local implica que, para strikes semelhantes, as volatilidades implícitas variam segundo a mesma magnitude proporcional esperada. Assim, é esperado que a volatilidade implícita smile apresente um declive suave, o que evidencia a forte co-movimentação das volatilidades implícitas em strikes próximos.

Com base no pressuposto de comunalidade local estabelecidos em ( $\mu_t I_t^2 = \mu_t^A A_t^2$  e (5.6)), é possível estimar a variância e a covariância comuns através de uma regressão linear transversal simplificada do spread da variância implícita ( $I_t^2 - A_t^2$ ) sobre as duas medidas moneyness ajustadas à convexidade,  $[2z_+, z_+, z_-]$ .

No capítulo seguinte, realiza-se uma análise da variância e da covariância da volatilidade implícita at-the-money por meio de uma regressão transversal, restringindo-se a um intervalo específico de moneyness próximo de zero. Adicionalmente, avalia-se o potencial destas métricas na previsão de futuras oscilações da volatilidade implícita.



# Capítulo 7

## Análise Empírica sobre Opções do Índice S&P 500

Procedeu-se à realização de uma análise empírica centrada em opções sobre o índice S&P 500 (SPX), instrumentos estes amplamente transacionados na Chicago Board Options Exchange (CBOE Global Markets). A base de dados utilizada compreende o histórico de preços de fecho das opções, as respetivas volatilidades implícitas bem como os valores do índice subjacente.

O período amostral abrange o intervalo entre 3 de janeiro de 2022 e 31 de maio de 2022, perfazendo um total de 103 dias úteis. Durante este intervalo temporal, o valor do índice variou de aproximadamente 3.886 para cerca de 4.801 pontos. A volatilidade anualizada dos retornos diários observada ao longo do período em análise é estimada em 26.4%.

A abordagem teórica adotada fundamenta-se na avaliação de contratos de opções com base nos dois primeiros momentos sob a medida neutra de risco, associados às variações da volatilidade implícita. Dado que os dados empíricos são constituídos por cotações de contratos de opções transacionados em mercado regulamentado, torna-se viável calcular, de forma precisa, as alterações da volatilidade implícita de cada contrato individual, mediante a sua evolução entre dias consecutivos.

Com o intuito de examinar a dependência dos momentos estatísticos das alterações da volatilidade implícita face à moneyness e ao tempo até à maturidade, bem como a sua relação com a estrutura temporal da volatilidade implícita e com o perfil da volatilidade implícita smile, procedeu-se à construção de séries temporais flutuantes destas alterações. Para tal, recorreu-se a técnicas de interpolação local suavizada, aplicadas sobre grelhas específicas definidas em função da moneyness e da maturidade.

A análise empírica desenvolve-se em três etapas principais. Em primeiro lugar, são apresentadas evidências de uma communalidade local nos co-movimentos entre as séries das variações da volatilidade implícita. Em segundo, com base nesta estrutura de communalidade, extrai-se a taxa de variação *localmente comum* esperada a partir da estrutura a termo da volatilidade implícita *at-the-money*, considerando maturidades adjacentes. Avalia-se, subsequentemente, o conteúdo informacional dessa taxa de variação no que diz respeito à previsão de alterações futuras na volatilidade implícita. Numa terceira etapa, são estimadas as variâncias e covariâncias das séries flutuantes da volatilidade implícita e comparadas com

as respetivas estimativas sob a medida neutra ao risco, extraídas a partir da variância implícita da smile local em torno do ponto *at-the-money*. Analisa-se, assim, em que medida as variâncias e covariâncias realizadas podem ser previstas com base nas estimativas históricas das séries temporais, bem como nas estimativas transversais obtidas sob a neutralidade ao risco. Adicionalmente, é desenvolvida uma estratégia de investimento que explora a diferença entre as previsões para a variância e covariância futuras e os momentos de risco neutro atualmente refletidos na volatilidade implícita smile local.

## *7.1 Construção de Séries Flutuantes de Variações Percentuais da Volatilidade Implícita*

A abordagem teórica adotada estabelece uma correspondência entre o valor justo da volatilidade implícita de um contrato de opção e os dois primeiros momentos sob a medida neutra ao risco das variações dessa mesma volatilidade. Uma vez que os dados empíricos consistem em cotações relativas a contratos de opções com características fixas (preço de exercício e data de vencimento), torna-se possível calcular diretamente as variações da volatilidade implícita através da observação da evolução dos preços de cada contrato ao longo de dias úteis consecutivos.

Contudo, para que se possa analisar a forma como os momentos estatísticos dessas variações se comportam em função da moneyness e do tempo até à maturidade, revela-se necessário construir séries temporais flutuantes da volatilidade implícita e das suas variações, definidas em grelhas fixas nestas duas dimensões. Esta construção permite, simultaneamente, examinar com maior profundidade tanto a estrutura fatorial global como as comunidades locais nas alterações da volatilidade implícita ao longo dos domínios de moneyness e maturidade.

A grelha adotada comprehende cinco horizontes temporais de maturidade, mais concretamente 30, 60, 91, 182, 365 dias e nove níveis distintos de moneyness (-2; -1.5; -1; -0.5; 0; 0.5; 1; 1.5; 2). A escolha destes pontos segue a prática corrente da indústria financeira, conferindo com maior detalhe os prazos mais curtos, onde se observa maior intensidade de negociação e uma variação mais acentuada na estrutura temporal da volatilidade.

Para cada nível de maturidade, os pontos de moneyness são definidos com base na medida standardizada  $x \equiv \frac{z_+}{I_t \sqrt{\tau}}$ , a qual representa o número de desvios padrão que o logaritmo do preço de exercício ( $\ln K$ ) se encontra acima da esperança do logaritmo do preço

terminal ( $\ln S_t$ ), no enquadramento do modelo de Black-Scholes-Merton (BSM). A grelha cobre o intervalo de duas unidades de desvio padrão, com incrementos uniformes de 0,5 desvios, isto é  $x = 0; \pm 0,5; \pm 1; \pm 1,5; \pm 2$ . Em cada ponto da grelha  $(\tau, x)$ , procede-se à estimativa do nível da volatilidade implícita  $I_t$ , bem como da variação percentual logarítmica  $R_{t+1}$ , através de uma média local ponderada segundo dois critérios principais:

1. *Ponderação entre opções de compra e venda*: para um dado preço de exercício, é comum existirem cotações simultâneas de opções call e put. Atribui-se maior peso à opção out-of-the-money, por via da sua maior liquidez e fiabilidade na cotação. A ponderação adotada é  $1 - |\delta_i|$ , sendo  $\delta_i$  a delta teórica do contrato, segundo o modelo BSM. Esta ponderação é truncada para zero sempre que  $|\delta_i| > 0,8$ , excluindo opções profundamente in-the-money, cuja fiabilidade é frequentemente comprometida.
2. *Ponderação por proximidade na grelha de maturidade-moneyness*: cada observação é adicionalmente ponderada em função da sua distância ao ponto-alvo  $(\ln \tau, x)$ , mediante um núcleo Gaussiano bivariado com larguras de banda  $h_\tau$  e  $h_x$ . A utilização do logaritmo da maturidade confere maior resolução para prazos mais curtos, onde a sensibilidade da volatilidade implícita é mais pronunciada. Assim, a ponderação total atribuída à observação  $i$  é dada por:

$$w_i = (1 - |\delta_i|) \mathbb{I}\{|\delta_i| < 0,8\} * \exp\left(-\frac{(x_i - x)^2}{2h_x^2}\right) * \exp\left(-\frac{(\ln \tau_i - \ln \tau)^2}{2h_\tau^2}\right). \quad (7.1)$$

onde  $\mathbb{I}\{\cdot\}$  representa a função indicadora e  $(h_x, h_\tau)$  correspondem aos parâmetros de suavização (larguras de banda) do núcleo.

O método de interpolação adotado segue práticas fundamentais no setor financeiro. Variáveis usuais adicionam ajustes nas ponderações relativas entre calls e puts para o mesmo preço de exercício, bem como o grau de suavização aplicado às cotações. Testes de robustez (tais como variações nas larguras de banda de kernel  $(\sigma_x, \sigma_\tau)$ ; janela de suavização temporal (0/3/5 dias); método de interpolação (NW vs. Bilinear; winsorização de outliers (0,5-99,5 vs. 1-99))) demonstram que as variações marginais nesta metodologia não têm impacto material nas conclusões da análise.

Importa salientar que a literatura implícita tende a centrar-se na análise das séries flutuantes da volatilidade implícita com a moneyness e maturidade fixas. No entanto, as variações nessas séries podem diferir significativamente das variações associadas a contratos fixos, sobretudo em contextos delineados por estruturas temporais inclinadas ou perfis acentuados da smile. Mesmo que a superfície da volatilidade implícita se mantenha inalterada, como função do tempo até à maturidade e da moneyness, o simples deslize de um contrato ao longo da estrutura temporal, ou ao longo da *skew*, pode induzir variações substanciais nas séries flutuantes em estudo. Inversamente, a volatilidade implícita de um contrato específico poderá evoluir ao longo do tempo, mesmo que a superfície global permaneça estática, em virtude das alterações no seu tempo residual até à maturidade e na sua moneyness relativa.

Em termos operacionais, para cada data  $t$ , recolhe-se a volatilidade implícita  $I_t^i$  de cada contrato observado e, subsequentemente, a sua cotação na data útil seguinte  $I_{t+1}^i$ . Calcula-se então a variação percentual logarítmica  $R_{t+1}^i = \ln(\frac{I_{t+1}^i}{I_t^i})$ . Estes valores são por sua vez interpolados de forma suavizada no decorrer da grelha de maturidade e moneyness já pré-definida, originando as séries flutuantes para os níveis da volatilidade implícita e suas respetivas variações.

## 7.2 Comunalidade Local e Estruturas Fatoriais Globais

A formulação teórica proposta estabelece uma correspondência direta entre o nível de volatilidade implícita de um contrato de opção e os seus dois primeiros momentos condicionais sob a medida de risco neutro. Com o objetivo de inferir essas condições momentâneas a partir da observação empírica da volatilidade implícita, introduz-se o conceito de *Comunalidade Local*, segundo o qual os contratos com datas de vencimento e preços de exercício próximos tendem a apresentar comportamentos similares, refletindo assim, condições momentâneas semelhantes.

Importa realçar que este conceito é de natureza qualitativa, não implicando uma definição estrita ou determinística. Termos como “local” e “próximo” devem ser interpretados em sentido relativo, distinguindo-se claramente da abordagem tradicional que específica de forma precisa o número de fatores num modelo de volatilidade estocástica. A comunalidade local visa captar uma regularidade empírica robusta da superfície da volatilidade implícita, amplamente prevista por diversos modelos estocásticos contemporâneos.

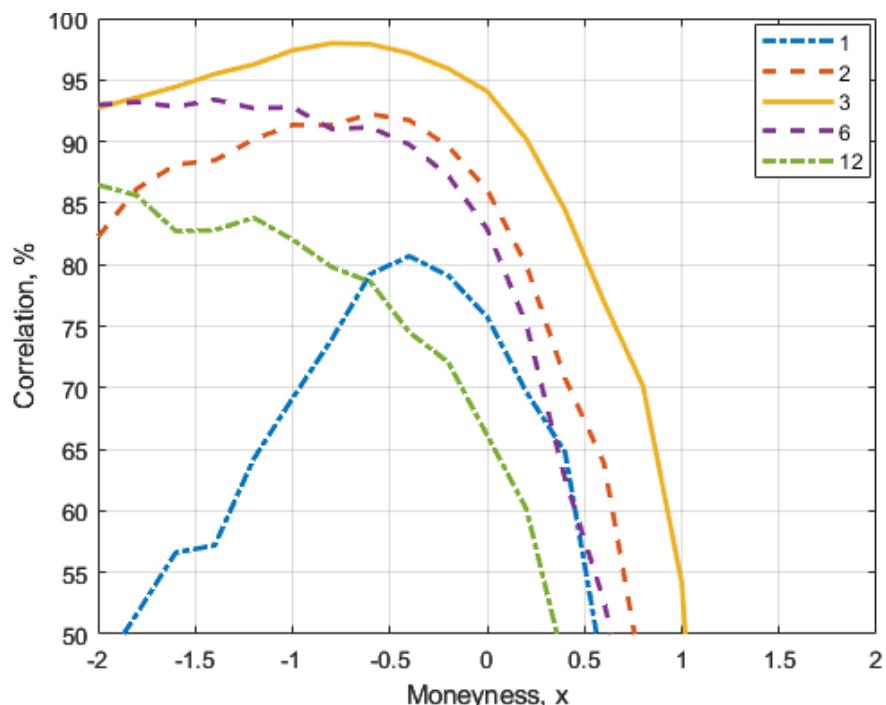
É natural que contratos de opção com características contratuais próximas – nomeadamente preços de exercício e maturidades semelhantes – apresentam estruturas de payoff análogas e, consequentemente, exposições semelhantes a fatores latentes de risco. Tal semelhança verifica-se salvo em modelos que impõem comportamentos idiossincráticos dependentes de datas específicas ou limiares de preços do ativo subjacente. Por outro lado, opções cujas características se distanciem significativamente – por exemplo, uma opção com um mês de maturidade face a outra opção com maturidade de um ano – podem apresentar movimentos conjuntos ou divergentes, conforme a especificidade da estrutura fatorial que governa a dinâmica da volatilidade. No entanto, observa-se empiricamente que contratos vizinhos, como duas opções *at-the-money* com maturidades de 11 e 12 meses, exibem co-movimentos particularmente fortes, independentemente da modelização precisa da evolução da volatilidade subjacente.

No limite, a arbitragem impõe que dois contratos de opção com o mesmo preço de exercício e a mesma data de vencimento devem apresentar volatilidades implícitas idênticas, independentemente da especificação dinâmica do modelo. O conceito de *Comunalidade Local* pode ser compreendido como uma extensão prática deste princípio teórico, assentando sobretudo na semelhança estrutural dos contratos e não em suposições específicas sobre a evolução estocástica dos fatores subjacentes. Para além da sua justificação teórica, o conceito de comunalidade local encontra também sustentação prática no comportamento dos market makers, que frequentemente procuram cobrir a sua exposição a determinado contrato através de posições em contratos com características próximas. Esta prática de cobertura com instrumentos adjacentes tem vindo a ser amplamente validada, seja em termos teóricos como empíricos, nomeadamente por Wu e Zhu (2016), cuja evidência sustenta a robustez deste comportamento. O pressuposto de comunalidade local visa, precisamente, refletir esta resiliência observada nos mercados organizados de derivados.

Contudo, apesar da sua plausibilidade conceptual, importa avaliar em que medida tal pressuposto se mantém válido quando se alargam as distâncias contratuais relativamente à maturidade e moneyness. Para esse efeito, procede-se à análise empírica da variação conjunta da volatilidade implícita entre contratos, em função da distância relativa entre os respetivos parâmetros contratuais.

Como primeiro passo metodológico, calcula-se a correlação cruzada entre as séries de variação percentual da volatilidade implícita, com o intuito de aferir a forma como os níveis de correlação se alteram à medida que aumenta a distância contratual, quer no eixo da maturidade quer no eixo da moneyness. A partir desta posição de referência determinam-se os coeficientes de correlação das variações da volatilidade implícita para várias maturidades.

A linha contínua apresentada na figura 1 representa os valores de correlação estimados com contratos de igual maturidade. Para opções com moneyness dentro de uma unidade de desvio-padrão ( $|x| \leq 1$ ), os valores superam os 80%. No entanto, ao restringir esta medida para meia unidade ( $|x| \leq 0,5$ ) os valores superam os 90% para maturidades de 2 e 6 meses, legitimando desta forma a aplicação do pressuposto de comunalidade local no intervalo ( $|x| \leq 1$ ) à mesma maturidade. À medida que a moneyness se afaste do ponto ATM, a correlação diminui. As duas medidas de desvio padrão mantêm-se em torno dos 25% evidenciando que uma única estrutura de variâncias-covariâncias não é suficiente para reproduzir o efeito sorriso da volatilidade implícita em toda a gama de moneyness.



**Figura 1. Correlação das variações da volatilidade implícita com a opção at-the-money a três meses.** O gráfico apresenta estimativas de correlação cruzada entre as variações percentuais da volatilidade implícita do contrato de referência (isto é, opção at-the-money com maturidade de três meses) e de outros contratos, distinguindo-os por prazo e por nível de moneyness. Cada curva mostra, para uma determinada maturidade, como a correlação evolui ao longo do espectro da moneyness. A linha contínua do gráfico representa a correlação com contratos de igual maturidade (três meses). As duas linhas tracejadas dizem respeito às maturidades adjacentes (dois e seis meses). As duas linhas a traço-e-ponto correspondem a prazos mais distantes (um e doze meses).

As duas linhas tracejadas correspondem às maturidades adjacentes (dois e seis meses) e as duas linhas a traço e ponto a prazos mais distantes (um e doze meses). Ao analisar a estrutura a termo ATM observam-se valores de correlação de sensivelmente 93% para ambas maturidades de dois meses e seis meses (92,22% a dois meses e 93,40% a 6 meses), suportando a comunalidade local definida por maturidades idênticas. Em contrapartida, com maturidades mais distantes os coeficientes descem para 80% (80,69% para um mês e 86,48% para doze meses).

A Figura 1 ilustra uma secção da matriz de correlação, tendo como referência o contrato ATM a três meses. Considerando a matriz completa (excluindo a diagonal da matriz), a correlação média é 58,31%, a mediana 72%, o máximo 97,98%, o mínimo -23,58% e o desvio-padrão 35,73%, revelando elevada heterogeneidade entre pares. Para testar formalmente a hipótese de que a correlação diminui com as distâncias absolutas em maturidade e em moneyness, estima-se, nos elementos da parte inferior da matriz, a regressão bivariada:

$$\rho_{ij} = \alpha + \beta_\tau |\Delta\tau_{ij}| + \beta_x |\Delta x_{ij}| + \varepsilon_{ij}, \quad (7.2)$$

em que  $\rho_{ij}$  é a correlação entre os contratos  $i$  e  $j$ ,  $|\Delta\tau_{ij}|$  mede a distância em maturidade e  $|\Delta x_{ij}|$  a distância em moneyness. Sob a hipótese em análise, espera-se  $\beta_\tau < 0$  e  $\beta_x < 0$ .

*Tabela 1*

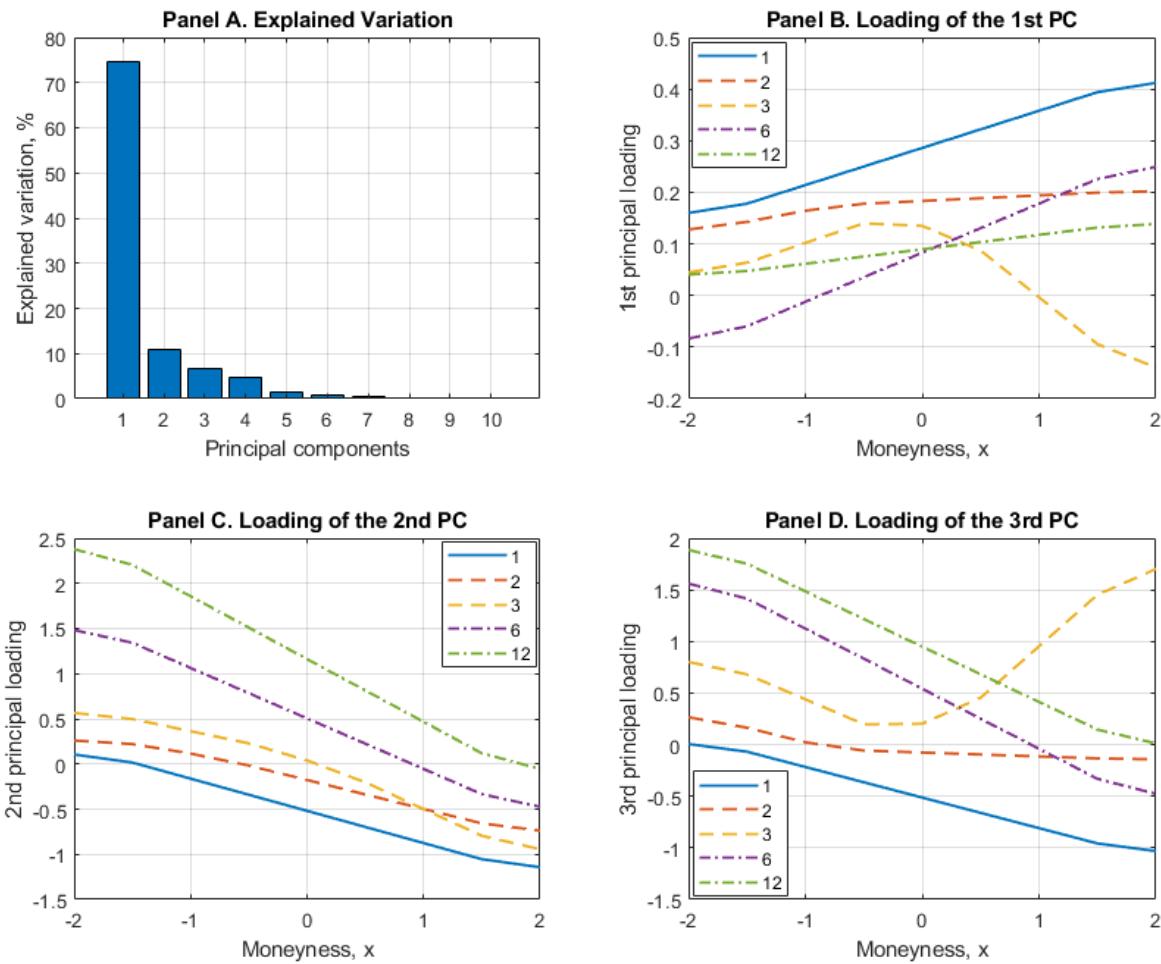
*Dependência de Correlação de Distâncias entre Maturidade e Moneyness*

	$\alpha$	$\beta_x$	$\beta_\tau$	$R^2$
Estimates	0,863	-0,510	-0,154	0.503
Std Error	0,001	0,002	0,001	-

Na Tabela 1 estão demonstrados os resultados da regressão. O modelo apresenta um  $R^2$  de 50,3%. O termo constante está próximo do valor unitário quando a distância entre contratos é nula. As curvaturas associadas ao distanciamento de ambas as métricas é negativa.

No enquadramento proposto, a análise da superfície da volatilidade implícita pode iniciar-se sem especificar, à partida, a dinâmica completa do preço subjacente e da respetiva volatilidade. Em alternativa, procede-se primeiro ao estudo da estrutura de co-movimento das variações percentuais da volatilidade implícita entre contratos ao longo das dimensões de maturidade e moneyness. A partir deste diagnóstico, impõem-se diretamente estruturas fatoriais cross-sectional para variâncias e covariâncias, das quais decorrem implicações de avaliação sobre o nível e a forma da superfície da volatilidade implícita (implied volatility smile). Para identificar os fatores que determinam tais movimentos, aplicamos a análise de componentes principais às séries interpoladas de variações da volatilidade implícita. Estima-se a matriz de covariância das séries e efetua-se a respetiva decomposição espectral (autovalores e autovetores). Após normalização, o vetor de autovalores quantifica a fração de variância explicada por cada componente principal, enquanto os autovetores associados se interpretam como as “cargas” das respetivas componentes sobre a superfície da volatilidade implícita.

A Figura 2 representa os resultados da análise das componentes principais da superfície da volatilidade implícita.



**Figura 2. Análise das principais componentes aplicada aos movimentos da volatilidade implícita.**

No Painel A, um gráfico de barras representa a fração de variância explicada pelas dez componentes principais, estimadas com base em 45 séries interpoladas de variações da volatilidade implícita. Os Painéis B a D exibem os pesos fatoriais da primeira, segunda e terceira componentes, respectivamente, mapeadas ao longo do espectro da moneyness e para diferentes

No Painel A, o gráfico de barras apresenta a proporção de variância explicada pelas 10 principais componentes. A primeira componente explica 74,52% da variabilidade, relevando um elevado grau de co-movimento na superfície. O Painel B mostra as cargas fatoriais dessa componente, positivas em praticamente todo o domínio de maturidades e níveis de moneyness, com maior intensidade nas maturidades curtas e em strikes mais elevados, o que é compatível com maior variabilidade nesses segmentos.

A segunda componente, responsável por 10,78% da variância (ainda que substancialmente abaixo da dominante primeira), exibe, no Painel C, um perfil em função da

moneyness: as cargas são positivas em strikes baixos e negativas em strikes altos, captando a dinâmica da inclinação (skew) da volatilidade implícita para cada maturidade. A terceira componente explica 6,67% da variação e, conforme ilustrado no Painel D, captura a estrutura de termo: para uma dada moneyness, as cargas são negativas nas maturidades curtas e positivas nas longas.

Analisada coletivamente e, no âmbito deste conjunto de dados, as três primeiras componentes explicam mais de 90% da variabilidade da superfície. A primeira traduz o nível global da volatilidade implícita, por sua vez, a segunda e terceira componentes representam alterações das inclinações ao longo das dimensões de moneyness e de maturidade, respectivamente. Em opções transacionadas em bolsa, que tipicamente cobrem um leque amplo de moneyness mas restrito de maturidades, a variação na dimensão da moneyness tende a ser predominante. Nas cotações *over-the-counter*, em que o intervalo da moneyness é mais estreito e o de maturidades substancialmente mais amplo, a variação na estrutura a termo assume maior peso.

Por fim, importa salientar que a PCA é intrinsecamente dependente dos dados. Para explicar a mesma fração de variância, menos componentes são necessárias quando o intervalo de strikes ou de maturidades é reduzido. Por outro lado, um número superior de componentes é necessário quando o domínio é alargado. Esta característica evidencia as limitações de uma identificação de fatores “globais” – uma estrutura fatorial aparentemente suficiente num determinado enquadramento empírico pode deixar de o ser quando o espaço amostral é expandido.

### *7.3 Estrutura a termo da Variância Implícita At-The-Money e respetiva Dinâmica*

Na Tabela 2, mais precisamente Painel A, são sintetizadas as estatísticas descritivas dos níveis interpolados da volatilidade implícita at-the-money nas cinco maturidades consideradas,  $A^i(\tau) \equiv I^i(\tau, 0)$  para  $\tau = 1, 2, 3, 6$  e 12 meses. A média amostral da volatilidade implícita tem uma ligeira diminuição com a maturidade. Para um mês, a média é de 26,2%, valor muito próximo do desvio-padrão da rendibilidade no período completo (26,4%) e atinge 23,5% à maturidade de um ano. Da mesma forma, o desvio-padrão da série at-the-money decresce de 2,4%(1mês) para 0,5%(12 meses). O intervalo entre mínimos e máximos históricos também se estreita à medida que a maturidade aumenta, em consonância com a redução da dispersão. A última linha do painel apresenta a autocorrelação das séries

“flutuantes”. As cinco maturidades exibem *mean reversion*, mais acentuada para contratos de curto prazo.

O Painel B da Tabela 2 reporta as estatísticas para a variação logarítmica diária da série flutuante,  $\ln \frac{A_{t+1}(\tau)}{A_t(\tau)}$ , nas mesmas maturidades, com todas as métricas anualizadas.

Ao longo dos períodos, observa-se uma tendência decrescente da média anualizada da variação diária de 54,4% (1 mês) a 23,5% (12 meses). Da mesma forma é possível reparar no mesmo padrão para as estimativas do desvio-padrão, anualizado, das variações percentuais diárias que decrescem de 41,9% para maturidades de um mês a 11,1% para maturidades de um ano. As autocorrelações das variações diárias são positivas, refletindo a persistência da volatilidade e o ajuste gradual das expectativas de risco.

O Painel C da Tabela 2 considera, por sua vez, a variação logarítmica diária da volatilidade implícita dos contratos at-the-money de maturidade fixa  $R^A_{t+1}(\tau) \equiv R_{t+1}(\tau, 0)$ , distinta das variações percentuais da série flutuante analisadas no Painel B. Comparativamente, as médias amostrais anualizadas são mais reduzidas, variando de 23,4% (1 mês) a -3,7% (12 meses). À luz da equação de valorização (5.4) e descurando o prémio de risco da variância, estas médias positivas apontam para uma estrutura a termo ascendente nas maturidades curtas-médias, pois para maturidades mais longas da variância implícita at-the-money gera médias negativas. As volatilidades das variações (desvios-padrão anualizados) mantêm-se semelhantes às do Painel B, situando-se entre 41,9% (1 mês) e 11,1% (12 meses), e o intervalo entre mínimos e máximos é também idêntico. As autocorrelações das variações dos contratos de prazo fixo são positivas nas maturidades curtas e nas longas. Desta forma, a *mean reversion* observada nas séries flutuantes não se transfere necessariamente para as variações da volatilidade implícita dos contratos de maturidade fixa.

Em síntese, a deslocação ao longo da estrutura a termo e da moneyness induz diferenças substanciais entre o comportamento da volatilidade implícita das séries flutuantes e da volatilidade implícita das séries de maturidade fixa, tanto ao nível de momentos (médias e dispersões) como ao nível das dependências temporais e das correlações com os retornos do ativo subjacente.

*Tabela 2*

*Resumo das Estatísticas para níveis de Volatilidade Ímplicita At-The-Money e Variações Diárias*

Maturity ( $\tau$ )	1	2	3	6	12
Panel A: At-The-Money Implied Volatility Level, $A_t(\tau)$					
Mean	0,262	0,257	0,252	0,244	0,235
SD	0,024	0,031	0,017	0,011	0,005
Minimo	0,226	0,224	0,223	0,223	0,226
Máximo	0,307	0,295	0,285	0,269	0,245
Autocorrelação	0,945	0,947	0,948	0,949	0,939
Painel B: Daily Log Change in At-The-Money Implied Volatility, $A_{t+1}(\tau) / A_t(\tau)$					
Mean	0,544	0,479	0,407	0,271	0,040
SD	0,419	0,358	0,292	0,184	0,111
Minimo	-16,812	-13,941	-10,279	-6,732	-4,600
Máximo	21,302	17,681	13,634	7,397	4,683
Autocorrelação	0,576	0,608	0,637	0,651	0,533
Correlação	-0,397	-0,410	-0,414	-0,403	-0,407
Painel C: Daily Log Implied Volatility Change for At-The-Money Contracts, $R^A_{t+1}(\tau)$					
Mean	0,234	0,181	0,210	0,166	-0,037
SD	0,418	0,357	0,291	0,184	0,111
Minimo	-17,8	-14,782	-10,835	-6,984	-4,818
Máximo	20,219	16,838	13,094	7,118	4,560
Autocorrelação	0,574	0,606	0,636	0,651	0,532
Correlação	-0,398	-0,411	-0,417	-0,405	-0,412

#### *7.4 Extração da taxa de variação a partir da estrutura a termo At-The-Money*

Admitindo que os movimentos proporcionais das volatilidades implícitas são praticamente idênticos para um par de contratos at-the-money de maturidades adjacentes, a Proposição 1 permite identificar a derivada condicional neutra ao risco das variações percentuais da volatilidade implícita  $\mu_t$ , a partir da inclinação local da estrutura a termo da variância implícita

definida por esses mesmos contratos. As correlações reportadas na Figura 1 – extremamente elevadas entre maturidades contíguas – sustentam o pressuposto de comunalidade local neste intervalo de prazos. Consequentemente, usamos a inclinação ATM entre  $(\tau_i, \tau_{i+1})$  para estimar a derivada no ponto médio  $\tau_i = (\tau_i + \tau_{i+1})/2$ :

$$\mu_j(\tau_i) = \frac{A_t^2(\tau_{i+1}) - A_t^2(\tau_i)}{2[A_t^2(\tau_{i+1})\tau_{i+1} - A_t^2(\tau_i)\tau_i]}, \quad (7.3)$$

onde que  $A_t(\tau)$  é o nível ATM da volatilidade implícita e  $A_t^2(\tau)$  a variância implícita correspondente. Em termos operacionais, a inclinação entre 1 e 2 meses fornece  $\mu_t$  aos 1,5 meses, a inclinação entre 2 e 3 meses fornece  $\mu_t$  aos 2,5 meses e assim sucessivamente. As estimativas pontuais são depois interpoladas linearmente para obter  $\mu_t(\tau)$  em todas as maturidades interpoladas.

*Tabela 3*

*Extração da Taxa de Variação da Estrutura a Termo da Variância Implícita At-The-Money*

Maturity ( $\tau$ )	1	2	3	6	12
Mean	-0,217	-0,268	-0,258	-0,130	-0,047
SD	0,135	0,195	0,207	0,114	0,129
Minimo	-0,464	-0,706	-0,746	-0,358	-0,369
Máximo	0,133	0,138	0,125	0,063	0,152
Autocorrelação	0,887	0,924	0,936	0,950	0,973

A Tabela 3 sumariza as estatísticas de  $\mu_t$ . As médias amostrais neutras ao risco são negativas em todas as maturidades e de elevada persistência (autocorrelações de 89% a 97%) - inferiores às médias estatísticas (Painel C da Tabela 2) em todo o período. Os desvios-padrão são da ordem de duas a três vezes as médias, refletindo a forte variabilidade temporal. Interpretando a diferença média como prémio de risco, o padrão sugere, em termos agregados que, no período determinado, o mercado embute um prémio positivo para variações ATM, isto é, posições longas teriam em média sido remuneradas. Este padrão difere do reportado por Carr e Wu (2020) no entanto, a elevada persistência e a largura da distribuição das estimativas são consistentes com a literatura (e.g., Egloff, Leippold e Wu, 2010, em variance swaps). Temporalmente,  $\mu_t$  exibe elevada variabilidade, os desvios-padrão

são quase o dobro das médias e os extremos mínimos/máximos evidenciam alternância entre valores fortemente negativos e positivos. As autocorrelações são elevadas e persistentes.

Para avaliar o conteúdo informativo de  $\mu_t$  na previsão de variações futuras da volatilidade implícita, estimamos, para cada maturidade  $\tau$ , a regressão

$$R_{t+1}^A = \alpha + \beta \mu_t(\tau) + e_{t+1}, \quad (7.4)$$

em que  $R_{t+1}^A(\tau)$  é a variação logarítmica (anualizada) da volatilidade implícita ATM e  $\mu_t(\tau)$  que representa a taxa neutra ao risco esperada inferida na data t. Sob a hipótese das expecativas (não enviesada), tem-se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 1$ . Na ausência de informação, espera-se  $\beta = 0$ .

*Tabela 4*

*Previsões de Alterações da Volatilidade Implícita com a Inclinação da Estrutura a Termo*

Maturity ( $\tau$ )	$\bar{\alpha}$	$H: \alpha = 0$	$\beta$	$H: \beta = 0$	$H: \beta = 1$	$R^2, \%$
1	0,932	0,861	2,179	0,590	0,319	0,20%
2	0,841	0,756	1,587	0,590	0,218	0,30%
3	0,606	0,654	0,938	0,406	-0,027	0,18%
6	0,45	0,858	1,513	0,497	0,169	0,35%
12	-0,030	-0,243	-1,352	-0,955	-1,661	0,99%

A Tabela 4 apresenta os coeficientes, as estatísticas t de Newey-West (1987) com 21 defasagens e os  $R^2$ . Os interceptos são positivos entre 1 e 6 meses e negativos aos 12 meses, mas as estatísticas t são reduzidas, não permitindo rejeitar  $\alpha = 0$ . Apesar das inclinações ( $\beta$ ) serem próximas de 1 em maturidades curtas não é possível rejeitar a hipótese não informativa ( $\beta = 0$ ) entre 1 e 6 meses uma vez que, as estatísticas t são pequenas. Embora a magnitude de  $\beta$  esteja próxima do valor unitário, a fraca significância proveniente de uma amostra reduzida (103 dias úteis) e de algum ruído microestrutural, culminam na impossibilidade de rejeição de  $\beta = 0$ . Da mesma forma não é possível rejeitar a hipótese não enviesada ( $\beta = 1$ ). Os  $R^2$  são consistentemente baixos, indicando que prever a direção das variações da volatilidade implícita de contratos de maturidade fixa é intrinsecamente complicado. Nestas condições, é prudente efetuar cobertura de vega e privilegiar estratégias baseadas na geometria da volatilidade implícita smile (forma e inclinação) em detrimento de apostas meramente direcionais.

## 7.5 A Volatilidade Implícita Smile e suas Variações

A Tabela 5 documenta a curvatura smile da volatilidade implícita e a sua dinâmica. No Painel A, apresentam-se as médias amostrais das volatilidades implícitas em cinco níveis de moneyness para cada uma das cinco maturidades interpoladas. Em todas as maturidades, o nível médio é superior em strikes baixos e inferior em strikes elevados, configurando o enviesamento negativo (skew) típico. Embora a inclinação seja, na sua generalidade, monotonicamente descendente, a pendente mais acentuada nos strikes inferiores. Em prazos muito curtos, observa-se maior curvatura e o perfil aproxima-se de um smile, dado que a volatilidade implícita volta a aumentar em strikes muito elevados.

*Tabela 5*

*Média da Volatilidade Implícita Smile e Estimativas de Variância/Covariância de Séries Temporais*

Maturity ( $\tau$ )	-2	-1	0	1	2
Panel A: Média Volatilidade Implícita Smile					
1	0,854	0,426	0,258	0,208	0,187
2	0,786	0,418	0,256	0,203	0,182
3	0,716	0,411	0,253	0,198	0,172
6	0,532	0,393	0,245	0,182	0,153
12	0,387	0,359	0,235	0,157	0,137
Painel B: Histórico das Estimativas de Covariância, $\gamma_T$					
1	-0,015	-0,020	-0,015	-0,019	-0,034
2	-0,017	-0,020	-0,014	-0,018	-0,032
3	-0,018	-0,019	-0,013	-0,017	-0,031
6	-0,022	-0,018	-0,010	-0,013	-0,011
12	-0,014	-0,014	-0,010	-0,010	-0,004
Painel C: Histórico das Estimativas de Variância, $\omega_t$					
1	0,860	0,244	0,060	0,133	1,066
2	0,705	0,202	0,051	0,113	0,849
3	0,549	0,161	0,042	0,093	0,957
6	0,197	0,077	0,021	0,047	0,241
12	0,039	0,029	0,007	0,013	0,065

A teoria de avaliação proposta estabelece um nexo entre a smile da variância implícita e dois componentes: a variância condicional neutra ao risco da variação percentual da volatilidade implícita e a respetiva covariância com o retorno do índice. Com base nas variações logarítmicas interpoladas  $R_t(\tau, x)$  e no retorno do índice, constroem-se séries temporais para a taxa de variância  $\omega_t$  e para a taxa de variância  $\gamma_t$ , usando uma janela móvel de 21 dias úteis. O Painel B reporta as médias amostrais das covariâncias históricas para cada ponto  $(\tau, x)$  da grelha. As estimativas são negativas em todas as maturidades e níveis de moneyness e, em particular em torno do ponto at-the-money, diminuem com a maturidade. O Painel C apresenta as médias amostrais das variâncias, que apresentam o mesmo comportamento, isto é, decrescem à medida que a maturidade aumenta. Para uma maturidade fixa, as covariâncias médias são inferiores em strikes elevados do que em strikes baixos.

Uma interpretação plausível destes padrões decorre da composição da procura por opções out-of-the-money. A procura por puts de índice é tipicamente institucional e sistemática, o que pode acentuar a inclinação da skew em strikes baixos apesar das menores magnitudes absolutas das variâncias e covariâncias nesses níveis. Em contraste, a procura por calls out-of-the-money é mais retalhista e menos sistemática, induzindo movimentos idiossincráticos mais pronunciados e, consequentemente, maiores magnitudes absolutas de variância e covariância em strikes elevados. Esta assimetria entre padrões de procura e magnitudes históricas de variação pode criar oportunidades de valor relativo para investidores capazes de gerir o risco com rigor.

## *7.6 Extração das taxas de variância e de covariância a partir da Volatilidade Implícita Smile*

A Figura 1 mostra que, no intervalo de uma unidade de desvio-padrão em torno da at-the-money ( $|x| \leq 1$ ), as variações logarítmicas da volatilidade implícita entre o contrato ATM e os restantes contratos são fortemente correlacionadas (superiores a 90%). Esta evidência legitima o pressuposto de comunalidade local nesse domínio e motiva a identificação, em corte transversal, das taxas neutras ao risco de covariância e variância através da regressão

$$I_t^2 - A_t^2 = \gamma_t(2z_+) + \omega_t^2(z_+ z_-) + e_t. \quad (7.5)$$

Em cada data e maturidade, a diferença para o nível ATM da variância implícita é regressada nas estatísticas de moneyness  $2z_+$  e  $z_+ z_-$ , restrita aos cinco níveis compreendidos em  $|x| \leq 1$ . A conversão de  $x$  em  $z_+$  e  $z_-$  é direta dado o nível local de

volatilidade implícita. Impõe-se o termo constante nulo e a restrição de positividade em  $\omega_t^2$ . Nesta parametrização, um skew negativo da volatilidade implícita implica  $\gamma_t < 0$ .

*Tabela 6*

*Estimativas de Regressão Cross-Sectional de Taxas de Variância e Covariância*

Maturity ( $\tau$ )	1	2	3	6	12
Panel A: Estimativas de Covariância $\gamma_t$					
Mean	-0,200	-0,281	-0,342	-0,464	-0,823
SD	0,054	0,070	0,077	0,069	0,084
Minimo	-0,351	-0,474	-0,549	-0,644	-1,014
Máximo	-0,131	-0,192	-0,239	-0,355	-0,659
Autocorrelação	0,916	0,920	0,924	0,934	0,939
Correlação	0,028	0,041	0,058	0,148	0,131
Painel B: Estimativas de Variância, $\omega_t^2$					
Mean	0,653	0,939	1,158	1,620	3,011
SD	0,181	0,240	0,269	0,257	0,336
Minimo	0,423	0,632	0,797	1,214	2,360
Máximo	1,157	1,601	1,887	2,292	3,783
Autocorrelação	0,916	0,921	0,925	0,935	0,940
Correlação	0,251	0,252	0,262	0,351	0,040
Painel C: Regressões, $R^2_s$					
Mean	0,874	0,883	0,892	0,913	0,962
SD	0,040	0,034	0,030	0,024	0,017
Minimo	0,775	0,793	0,808	0,852	0,925
Máximo	0,938	0,947	0,954	0,966	0,987
Autocorrelação	0,761	0,759	0,768	0,862	0,949

A Tabela 6 sumariza os coeficientes e os  $R^2$ . No Painel A, as estimativas de covariância são universalmente negativas em todas as maturidades e datas, indicando smiles persistentemente enviesados em baixa no índice S&P 500. As séries exibem elevada persistência temporal, com autocorrelações diárias entre 91,61% (1 mês) e 93,92% (12 meses). Dado o foco em moneyness próximo de zero, estas estimativas podem ser interpretadas como condições de momento do contrato ATM. A comparação entre as médias

em corte transversal (Cross-Scetional) e as médias históricas de séries temporais (TS) da Tabela 5 revela que, em média, as médias *cross-sectional* são mais negativas do que as médias das séries temporais, sugerindo que o skew implícito é mais acentuado do que o justificado pela covariação histórica entre a volatilidade implícita e o retorno do índice – diferença interpretável como prémio de risco (Driessen, Maenhout e Vilkov, 2009). A correlação cruzada entre Cross-sectional e temporal series, reportada na última linha do Painel A, é reduzida, aumentando até maturidades de 3 meses e decrescendo depois para maturidades até 12 meses.

O Painel B apresenta as taxas de variância identificadas pela curvatura da smile. Em média, as estimativas *cross-sectional* excedem as estimativas *temporal series* nas maturidades curtas e convergem para valores semelhantes na maturidade de 12 meses, o que indica maior curvatura em prazos curtos do que em prazos longos e, por isso, mais acentuada do que a suportada pela variação temporal da volatilidade implícita. As dispersões são substancialmente maiores do que nas inclinações sinalizando datas em que a smile interpolada apresenta uma curvatura positiva residual. As autocorrelações destas estimativas são mais baixas do que as das inclinações e as correlações cruzadas com as variâncias das séries temporais, negativas em todas as maturidades. Em suma, estes resultados sugerem que a identificação da variância via curvatura cross sectional é menos robusta do que a identificação da covariância via inclinação da smile. Em períodos de maior volatilidade de mercado, quando as variâncias da temporal series aumentam, a smile tende a ficar fortemente enviesada negativamente, a curvatura torna-se difícil de estimar e a correlação entre medidas das séries temporais e de cross sectional torna-se negativa.

Por fim, o Painel C reporta os  $R^2$  das regressões em cross sectional, que são elevados. As médias excedem desde os 87,36% (1 mês) e 96,18% (12 meses), com desvios-padrão entre 1% e 4% o valor mínimo observado na maturidade de 1 mês é ainda 77,5%. Estes números indicam que, no intervalo estreito da moneyness  $|x| < 1$ , a especificação em (7.1) reproduz com precisão a volatilidade implícita smile, proporcionando corroboração empírica do pressuposto de comunalidade local nesse domínio.

## 7.7 Negociação da Volatilidade Implícita Smile

As estimativas das variâncias e covariâncias obtidas por regressão cross-sectional sobre o efeito sorriso da volatilidade implícita podem divergir das estimativas de séries temporais calculadas com *janelas móveis*. Existem três motivos principais para tal:

- i. As medidas transversais são prospetivas uma vez que refletem informação dos preços hoje sobre o futuro, enquanto as medidas das séries temporais são retrospectivas, por se basearem no passado recente;
- ii. Ambas incorrem em erros de estimação, embora com fontes distintas;
- iii. Os valores esperados podem diferir devido a prémios de risco quando o preço ou a volatilidade implícita apresentam saltos aleatórios, riscos estes premiados pelo mercado.

É neste enquadramento que analisamos as implicações económicas das discrepâncias observadas.

### *7.7.1 Previsão da (Co)Variância Realizada com Estimativas Cross-Sectional e Temporais*

De maneira a confirmar se a informação cross-sectional pode complementar a informação na previsão da variância e da covariância realizadas, no período seguinte, estimamos, para cada maturidade, a seguinte regressão de previsão:

$$RV_{t+1} = \alpha + \beta_1 CS_t + \beta_2 TS_t + e_{t+1}, \quad (7.6)$$

em que  $RV_{t+1}$  denota a variância ou covariância realizada no mês subsequente e,  $CS_t$  e  $TS_t$  representam, respetivamente, os estimadores transversal e de séries temporais disponíveis à data t. A *Tabela 7* resume os resultados da regressão – Painel A para a covariância e Painel B para a variância – incluindo coeficientes estimados, estatísticas t absolutas de Newey-West (1987) com 21 desfasagens e os  $R^2$  das regressões.

*Tabela 7*

#### *Previsão da Variância/Covariância Realizada com Estimadores Cross-Sectional e de Séries Temporais*

Maturity ( $\tau$ )	$\bar{\alpha}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$R^2, \%$
Painel A: Covariância, $\gamma_t$				
1	-0,019 (3,939)	-1,639 (1,884)	-0,158 (0,882)	10,51
2	-0,018 (4,185)	-1,359 (2,511)	-0,142 (0,846)	11,53
3	-0,017 (4,332)	-1,257 (3,037)	-0,117 (0,750)	12,02
6	-0,012 (3,136)	-0,942 (1,561)	0,060 0,448	6,78
12	-0,012 (6,163)	-0,865 (2,105)	0,166 0,496	8,38

Maturity ( $\tau$ )	$\bar{\alpha}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$R^2, \%$	
Painel B: variância, $\omega_t$					
1	0,091 (5,771)	-6,033 (5,510)	5,070	0,412	24,26
2	0,083 (5,788)	-4,067 (5,395)	4,172	0,317	24,97
3	0,074 (6,003)	-3,182 (5,460)	3,936	0,285	26,48
6	0,046 (6,246)	-1,742 (4,158)	12,879	0,742	26,21
12	0,021 (6,763)	-0,279 (2,075)	-25,096 (0,850)		12,78

No Painel A, as regressões de previsão da covariância apresentam  $R^2$  reduzidos, variando de 10,51% (maturidade de 1 mês) a 8,38% (12 meses). Os coeficientes associados a  $CS_t$  e  $TS_t$  são positivos, no entanto os coeficientes das séries temporais são maiores e exibem estatísticas t superiores, indicando que as estimativas baseadas na dinâmica recente das variações da volatilidade implícita constituem um ponto de partida mais robusto para antecipar a interação entre a volatilidade implícita e o retorno do índice no curto prazo.

O Painel B evidencia menos poder preditivo para a variância, sugerindo persistência e previsibilidade mais frágeis face à covariância. Os coeficientes associados ao estimador histórico  $TS_t$  são positivos e estatisticamente significativos em praticamente todas as maturidades (à exceção de 12 meses) ao passo que, a contribuição do estimador transversal  $CS_t$  é mais reduzida e os respetivos coeficientes tornam-se negativos em todos os casos. Em síntese, os resultados apontam para a preponderância da informação histórica na previsão do nível da variância, enquanto a informação transversal acrescenta valor marginal e, por vezes, em sinal oposto.

### 7.7.2 Trade-Off do Risco-Retorno com base nas Previsões de Séries Temporais

Dado um conjunto de previsões futuras para a variância e covariância realizadas e assumindo movimentos num intervalo de moneyness, a teoria proposta permite determinar um valor de equilíbrio (*breakeven*) para a volatilidade implícita smile. Este valor corresponde à avaliação do smile obtida através de previsões estatísticas dos momentos (variância e covariância), admitindo prémio de risco nulo. Sempre que a volatilidade implícita smile observada divergir desta avaliação, a diferença pode ser entendida como manifesto do prémio de risco e, por conseguinte, como oportunidade de investimento. Para avaliar empiricamente esta ideia, conduzimos um exercício fora da amostra: a partir de 30 de março de 2022 e, para cada data e maturidade, estimamos (com uma janela móvel de tamanho máximo de 120 dias)

a relação de previsão (7.6), e por isso obtêm-se estimativas *out-of-sample* para a covariância  $\gamma_t$  e a variância  $\omega_t$ . Com base nestas estimativas, constrói-se o diferencial de variância implícita de equilíbrio nos quatro níveis da moneyness  $x = \pm 0,5; \pm 1; 0$ ,

$$I_t^2 - A_t^2 = 2\gamma_t z_+ + \omega_t^2(z_+ z_-), \quad (7.7)$$

considerando o nível *at-the-money*  $A_t$  observado e obtendo, assim, o valor justo dos spreads. As quantidades  $z_+ z_-$ , que dependem do nível de volatilidade implícita são calculadas com o próprio  $A_t$  observado. Para cada ponto de moneyness, forma-se portfolios de spreads de vega-neutros entre o contrato *at-the-money* e o contrato *out-of-the-money* (OTM) correspondente, acompanhando o P&L delta-hedge ao longo do mês seguinte. Tendo em conta a maior atividade em OTM face a *in-the-money*, implementamos put spreads em strikes baixos e cal spreads em strikes elevados. Em cada spread, o peso do contrato *at-the-money* é normalizado para um e assume-se posição curta no contrato OTM de forma a anular a veja. O peso do investimento em cada spread é proporcional à diferença entre o diferencial observado no mercado e o valor de equilíbrio, normalizada pela variância ATM:

$$\omega_t = \frac{[(I_t^2 - A_t^2)^{mkt} - (I_t^2 - A_t^2)^{BE}]}{A_t^2}. \quad (7.8)$$

Quando o spread observado excede o valor justo, tomamos posição longa de  $100 * \omega_t$  dólares no contrato *at-the-money* e posição curta no contrato com a moneyness correspondente, mantendo a posição por 21 dias úteis e efetuando cobertura diária a *delta* com futuros sobre o índice. Devido ao reduzido dispêndio monetário face ao potencial de risco nas opções, as posições são medidas em nocional, isto é, investir  $100 * \omega_t$  equivale a normalizar o nível do índice em 100 dólares e deter  $\omega_t$  “unidades” do contrato normalizado.

*Tabela 8*

*Resumo das Estatísticas sobre os Pesos de Investimento da Estratégia de Risco-Retorno*

$\{\tau   x\}$	-1	-0,5	0,5	1
Painel A: Média da Amostra				
1	0,009	0,027	-0,065	-0,174
2	0,012	0,040	-0,093	-0,253
3	0,015	0,051	-0,116	-0,319
6	0,021	0,078	-0,170	-0,477
12	0,040	0,165	-0,332	-0,961

$\{\tau   x\}$	-1	-0,5	0,5	1
Painel B: Desvio-Padrão				
1	0,004	0,004	0,010	0,026
2	0,006	0,006	0,013	0,034
3	0,007	0,006	0,014	0,038
6	0,006	0,006	0,012	0,034
12	0,008	0,006	0,012	0,037
Painel C: Mínimos				
1	-0,002	0,017	-0,079	-0,216
2	-0,002	0,027	-0,113	-0,311
3	-0,000	0,037	-0,138	-0,386
6	0,010	0,064	-0,190	-0,539
12	0,024	0,153	-0,350	-1,019
Painel D: Máximos				
1	0,017	0,033	-0,041	-0,111
2	0,024	0,048	-0,065	-0,177
3	0,029	0,060	-0,088	-0,239
6	0,036	0,087	-0,140	-0,392
12	0,062	0,175	-0,305	-0,877
Painel E: Autocorrelação Diária				
1	0,326	0,868	0,861	0,841
2	0,353	0,874	0,864	0,843
3	0,386	0,880	0,867	0,846
6	0,477	0,891	0,867	0,847
12	0,518	0,854	0,804	0,790

A Tabela 8 apresenta estatísticas descritivas dos pesos. Em cada painel, as colunas correspondem aos níveis de moneyness  $x$  e as linhas às maturidades  $\tau$  (em meses). As médias são positivas nos put spreads ( $x = -0,5$  e  $-1$ ) e negativas nos call spreads ( $x = 0,5$  e  $1$ ), o que significa que, em média, a estratégia está vendida em puts OTM e comprada em calls OTM, explorando o facto de os skews negativos observados serem, em média, mais acentuados do que o sugerido pelas covariâncias históricas. As magnitudes médias (em valor absoluto) e os desvios-padrão são maiores para spreads mais *out-of-money* ( $|x| = 1$  face a  $|x| = 0,5$ ). Apesar do enviesamento médio, os mínimos são negativos e os máximos

positivos em todos os spreads, evidenciando mudanças de sinal ao longo do tempo. As autocorrelações diárias são elevadas, o que indica baixo *turnover*.

*Tabela 9*

*Resumo das Estatísticas sobre os Pesos de Investimento da Estratégia de Risco-Retorno*

$\{\tau   x\}$	-1	-0,5	0,5	1	All
Painel A: Média Anualizada					
1	0,449	-0,216	-0,029	0,166	0,370
2	0,669	-0,312	-0,045	0,238	0,551
3	0,858	-0,378	-0,060	0,288	0,708
6	1,472	-0,390	-0,107	0,322	1,298
12	2,168	-0,918	-0,148	0,562	1,665
Painel B: Desvio-Padrão Anualizado					
1	1,719	0,328	0,123	0,289	1,617
2	2,550	0,469	0,183	0,420	2,395
3	3,243	0,564	0,233	0,517	3,048
6	5,388	0,506	0,381	0,581	5,222
12	7,053	2,236	0,516	1,616	5,961
Painel C: Ráculos de Informação Anualizados					
1	0,261	-0,658	-0,234	0,573	0,229
2	0,262	-0,664	-0,247	0,567	0,230
3	0,265	-0,670	-0,257	0,557	0,232
6	0,273	-0,770	-0,279	0,555	0,249
12	0,307	-0,411	-0,286	0,348	0,279

A Tabela 9 acompanha o P&L delta-hedge de cada portfolio de spreads, reportando média anualizada, desvio-padrão anualizado e rácio de informação. Mantém-se a estrutura e acrescenta-se, por maturidade, uma coluna “All” que agrupa os quatro spreads. As médias dos P&L agregados são positivas. O risco (desvio-padrão) é mais elevado em maturidades curtas do que em longas e maior em  $|x| = 1$  do que em  $|x| = 0,5$ . A média do P&L varia com maturidade e moneyness, no entanto varia menos do que a volatilidade do P&L e, como tal, os rácios de informação aumentam com a maturidade. A menor rentabilidade em prazos curtos decorre, entre outros fatores, da maior sensibilidade dessas opções a saltos de preço

e de volatilidade (componente ausente na estratégia de relação de avaliação) e do menor  $R^2$  das regressões de previsão em maturidades curtas (Tabela 7), o que reduz a exatidão dos *break-even* e penaliza o desempenho. Em contraste, nos prazos longos, a variância e a covariância das séries de volatilidade implícita dominam a variação do P&L e a regressão de previsão fornece estimativas mais fiáveis destes momentos, permitindo que a estratégia apresente rácios de informação elevados.

Em resumo, a diferença entre a observação de mercado e a valiação de *break-even* traduz uma fonte potencial de prémio de risco. Ao posicionar-se proporcionalmente a essa diferença, conforme (7.8), a estratégia procura capturar o prémio, mitigando simultaneamente os riscos em *delta* e *vega*. Para enfatizar esta lógica de remuneração pelo risco, designamos a abordagem por estratégia de risco-retorno, que contrastamos, na subcapítulo seguinte, com estratégias de arbitragem estatística baseadas em ajustamentos em *Cross-Sectional* de modelos sem arbitragem. Desta forma, a teoria proposta oferece um critério operacional para identificar essa fonte de prémio: a discrepância sistemática entre as estimativas transversais e temporais dos momentos.

### 7.7.3 Negociação de Arbitragem Estatística baseada em ajuste *Cross-Sectional*

Uma estratégia amplamente associada a modelos sem arbitragem consiste em explorar, estatisticamente, os erros de avaliação obtidos ao ajustar em *cross-sectional* um modelo *no-arbitrage*. A lógica é tratar tais erros como desvios temporários de preço e construir portfólios neutros relativamente aos fatores de risco do modelo, evitando assim a exposição aos respetivos prémios de risco e apostando, em exclusivo, na reversão à média desses desvios. Para concretar esta abordagem com a estratégia de risco retorno apresentada anteriormente, consideramos uma implementação no mesmo enquadramento empírico. Em cada data e maturidade, estimamos a seguinte regressão transversal da volatilidade implícita smile no intervalo  $|x| \leq 1$ :

$$S_t = \gamma_t(2z_+) + \omega_t^2(z_+z_-) + e_t. \quad (7.9)$$

Esta mesma especificação foi outrora utilizada em (7.5) para extrair, sob comunalidade local em  $|x| \leq 1$ , as taxas neutras ao risco de covariância e variância. Se a hipótese for válida, os resíduos  $e_t$  podem ser interpretados como desalinhamientos transitórios de mercado e, portanto, como sinal de arbitragem estatística. O peso aplicado a cada spread é proporcional ao erro de avaliação:

$$\omega_t = 10 \frac{e_t}{A_t^2}. \quad (7.10)$$

Ao contrário da estratégia de risco-retorno, os pesos não dependem de previsões de séries temporais, baseiam-se exclusivamente nos erros do ajuste transversal. Embora ambas as estratégias operem sobre os mesmos spreads, a origem da informação e as premissas subjacentes diferem por completo. Como documentado na Tabela 6, o pressuposto de communalidade local é muito eficaz no intervalo de moneyness considerado, resultando num ajuste excepcionalmente preciso da smile (logo, em erros de pequena magnitude). Para tornar comparáveis as intensidades de investimento com as da estratégia risco-retorno (Tabela 8), aplicamos o fator de escala “10” em (7.10).

*Tabela 10*

*Resumo das Ponderações de Investimento da Estratégia de Arbitragem Estatística*

$\{\tau   x\}$	-1	-0,5	0,5	1
Painel A: Média da Amostra				
1	0,003	-0,011	-0,011	0,002
2	0,007	-0,023	-0,022	0,003
3	0,011	-0,035	-0,034	0,004
6	0,020	-0,070	-0,068	0,001
12	0,062	-0,176	-0,177	-0,002
Painel B: Desvio-Padrão				
1	0,001	0,002	0,002	0,001
2	0,002	0,005	0,004	0,001
3	0,004	0,006	0,005	0,003
6	0,010	0,008	0,006	0,010
12	0,020	0,013	0,009	0,016
Painel E: Autocorrelação Diária				
1	0,865	0,888	0,887	0,814
2	0,875	0,891	0,885	0,792
3	0,863	0,894	0,891	0,807
6	0,875	0,913	0,917	0,874
12	0,900	0,928	0,933	0,886

A Tabela 10 apresenta estatísticas descritivas das ponderações desta estratégia. Graças à escala aplicada, os desvios-padrão e os intervalos mínimo-máximo tornam-se comparáveis aos da Tabela 8, ainda assim, emergem diferenças relevantes:

- i. Em contraste com o enviesamento médio observado nos pesos da estratégia risco-retorno, os pesos da arbitragem estatística não exibem vieses médios pronunciados, sugerindo que a relação de avaliação funciona de modo uniforme no domínio restrito de  $|x| \leq 1$ ;
- ii. Enquanto os pesos da estratégia de risco-retorno tendem a aumentar em valor absoluto e em variabilidade para spreads mais *out-of-money*, os pesos da arbitragem estatística são substancialmente mais homogéneos;
- iii. A persistência temporal é consideravelmente inferior – as autocorrelações diárias encontram-se entre 0,79 e 0,93, o que, sob uma dinâmica AR(1), corresponde a meias-vidas de apenas três a oito dias. Dado que o objetivo é capturar *mispicing* transitório, não é expectável que os pesos persistam na mesma direção, implicando maior *turnover*.

*Tabela 11*

*Estatísticas de Lucros e Perdas de Investimentos em Opções Fora da Amostra da Estratégia de Arbitragem Estatística*

$\{\tau   x\}$	-1	-0,5	0,5	1	All
Painel A: Média Anualizada					
1	-0,001	0,003	0,001	-0,000	0,003
2	-0,002	0,007	0,001	-0,000	0,006
3	-0,003	0,011	0,002	-0,001	0,008
6	-0,006	0,020	0,004	-0,000	0,018
12	-0,013	0,028	0,005	0,001	0,021
Painel B: Desvio-Padrão Anualizado					
1	0,002	0,008	0,002	0,000	0,007
2	0,005	0,017	0,004	0,001	0,015
3	0,008	0,026	0,005	0,001	0,023
6	0,015	0,052	0,011	0,001	0,049
12	0,046	0,074	0,014	0,003	0,045
Painel C: Ráculos de Informação Anualizados					
1	-0,446	0,407	0,367	-0,445	0,384
2	-0,441	0,405	0,361	-0,463	0,380
3	-0,445	0,401	0,356	-0,507	0,370
6	-0,409	0,389	0,357	-0,305	0,367
12	-0,190	0,387	0,349	0,258	0,464

A Tabela 11 reporta o P&L da estratégia de arbitragem estatística. Quando comparada com a Tabela 9 (estratégia de risco-retorno), o desempenho ao nível de cada spread é modesto: as médias do P&L são pequenas e, muitas vezes, negativas. Contudo, a agregação dos quatro spreads por maturidade produz rácios de informação positivos em todas as maturidades (embora inferiores aos obtidos com a estratégia de risco-retorno). Esta diferença não traduz, por si só, a superioridade intrínseca de uma abordagem sobre a outra. Esta diferença reflete antes, o desenho do exercício e o modo de aplicação de cada estratégia. No caso da estratégia de risco-retorno, para o qual este protocolo empírico foi detalhado, isto é, foca um intervalo estreito de moneyness por maturidade, permitindo aplicar a communalidade local e ligar a smile a um conjunto comum de taxas de variância e covariância. Deste modo, o seu desempenho depende, não da precisão na identificação de prémios de risco, mas da existência de múltiplas fontes independentes de erros altamente regressivos à média.

Em coerência com os diferentes focos, observam-se também padrões distintos de correlação cruzada entre as séries de P&L dos vários spreads. Na estratégia risco-retorno, como todas as posições visam o mesmo prémio de risco, as correlações entre os quatro spreads de cada maturidade são positivas, pelo que a agregação acrescenta pouco ao rácio de informação. Na arbitragem estatística os erros de ajuste transversal são idiossincráticos e as séries de P&L tendem a ser baixa ou negativamente correlacionadas e, por isso, a combinação dos spreads eleva substancialmente o rácio de informação.

Importa ainda notar que as alocações são proporcionais aos desvios de preço sem otimização adicional e, não se incorporam custos de transação. Na prática, estes custos são menos graves para a estratégia risco-retorno (devido ao baixo *turnover*), na medida que a arbitragem estatística é mais adequada a market makers, que recebem o bid-ask na execução e visam manter um inventário bem coberto mais do que capturar prémios sistemáticos.

Em contrapartida, do ponto de vista aplicacional, é possível identificar diferenças entre os modelos tradicionais de avaliação (focados na coerência de preços num grande corte transversal de derivados interligados) e o novo enquadramento de avaliação proposto (centrado no *trade-off* do risco-retorno de um contrato específico). A princípio, é possível estimar prémios de risco sobre os fatores de um modelo “bottom-up” por métodos que combinam séries temporais e *cross-sectional*. Do mesmo modo, podem ser impostas restrições transversais ao nosso cenário, assumindo fatores globais ou communalidade ao nível das condições do momento.

# Capítulo 8

## Considerações Finais

Nesta dissertação apresenta-se um enquadramento de avaliação de opções baseado na atribuição de *Profit & Loss* das posições em derivados. Partindo da equação de Black-Merton-Scholes, o retorno instantâneo de uma posição é decomposto nos contributos do decaimento temporal (*Theta*), das variações do preço subjacente (*Delta*), das alterações da volatilidade implícita (*Vega*) e de termos de ordem superior. Considerando a esperança sob a medida neutra ao risco e impondo restrições dinâmicas de não arbitragem, obtém-se uma relação de preços que liga o nível justo da volatilidade implícita à sua derivada esperada, à sua variância e covariância com o retorno do ativo subjacente.

Esta formulação não necessita de se especificar quanto à origem e à futura dinâmica dos momentos de primeira e segunda ordem, permitindo avaliações locais, top-down, focadas na informação mais robusta disponível para cada contrato. Sem prejuízo desta perspetiva, é possível impor pressupostos de communalidade:

- i. Local, nos co-movimentos da volatilidade implícita entre contratos vizinhos;
- ii. Global, suportado por análise de componentes principais ou outras estruturas fatoriais.

A introdução de tais pressupostos na relação de avaliação gera implicações em *Cross-Sectional*, seja para subconjuntos específicos de contratos como para a superfície completa da volatilidade implícita.

Ao recentrar o foco dos payoffs finais para as flutuações de curto prazo do P&L, a teoria proporciona soluções de avaliação simples e flexíveis, estabelece uma articulação estreita com as práticas de gestão de risco e oferece uma base para ampliar a análise variância-média ao universo de derivados.

No plano prospetivo, abre-se a possibilidade de ampliar estruturas fatoriais de retorno de ativos primários a estruturas análogas para as variações da volatilidade implícita dos contratos subjacentes. Uma estrutura conjunta de fatores de retorno e de volatilidade implícita tem implicações diretas de avaliação para as opções, constituindo um alicerce natural para uma análise de investimento integrada num universo que abrange, de forma coerente, títulos primários e derivados.



## Bibliografia

- Bali, Heidari e Wu (2009). Predictability of Interest-Rate Portfolios (SSRN);
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy (University of Chicago Press);
- Boyer e Vorkink (2013). Stock Options as Lotteries (SSRN);
- Carr, P. & Wu, L. (2016). Analyzing Volatility Risk and Risk Premium in Option Contracts: A New Theory, Journal of Financial Economics. (SSRN);
- Carr, P. & Wu, L. (2009). Variance Risk Premiums, Review of Financial Studies (Oxford University Press);
- Castagna e Mercurio (2007). The Vanna-Volga Method for Implied Volatilities.
- Coval e Shumway (2000). Expected Option Returns (SSRN);
- Driessen, J., Maenhout, P. & Vilkov, G. (2009). The Price of Correlation Risk, Journal of Finance (SSRN);
- Duarte, J., Longstaff, F. & Yu, F. (2007). Risk and Return in Fixed-Income Arbitrage, Review of Financial Studies;
- Guanglin Hu e Kris Jacobs (2017). Volatility and Expected Option Returns (SSRN);
- Egloff, D., Leippold, M. & Wu, L. (2010). The Term Structure of Variance Swap Rates and Optimal Variance Swap Investments, Journal of Financial and Quantitative Analysis;
- Gurdip Bakshi e Dilip Madan (2000). Spanning and Derivative-Security Valuation (SSRN);
- Israelov e Kelly (2017). Forecasting the Distribution of Option Returns (SSRN);
- Newey, W. & West, K. (1987). A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix, Econometrica (NBER/SSRN);



## Anexo

BSM Vanna e Dollar Vanna para call option (3.14)\*

$$B_{IS} = \frac{\partial B_I}{\partial S_t} = \frac{\partial}{\partial S_t} \left( S_t \sqrt{\tau} n(d_1) \right) = \sqrt{\tau} n(d_1) - \frac{d_1 n(d_1)}{I_t}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t I_t \sqrt{\tau}} e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 \tau} \quad e^{-\frac{\partial n(d_1)}{\partial S_t}} = n(d_1) \left( -d_1 \frac{\partial d_1}{\partial S_t} \right) = -n(d_1) d_1 \frac{1}{S_t I_t \sqrt{\tau}}$$

Então:

$$\frac{\partial B_I}{\partial S_t} = \sqrt{\tau} n(d_1) + S_t \sqrt{\tau} (-n(d_1) d_1 \frac{1}{S_t I_t \sqrt{\tau}})$$

E por isso:

$$\frac{\partial B_I}{\partial S_t} = \sqrt{\tau} n(d_1) - \frac{n(d_1) d_1}{I_t}$$

BSM Volga e Dollar Volga para call option (3.16)\* & (3.17)\*

$$\begin{aligned} B_{II} &= \frac{\partial B_I}{\partial I_t} = S_t \sqrt{\tau} \frac{\partial}{\partial I_t} n(d_1) = \\ &= S_t \sqrt{\tau} n(d_1) (-d_1) \left( -\frac{\ln S_t / K}{I_t^2 \sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right), \end{aligned}$$

Dado que:

$$\frac{\partial}{\partial x} n(x) = n(x)(-x)' \quad \text{então} \quad \frac{\partial}{\partial I_t} n(d_1) = n(d_1)(-d_1)'$$

E por isso:

$$\frac{\partial B_I}{\partial I_t} = S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1)'$$

$$\begin{aligned} B_{II} I_t^2 &= \left[ S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1) \left( -\frac{\ln(S_t/K)}{I_t^2 \sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau} \right) \right] * I_t^2 \\ &= S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1) \left( -\frac{\ln(S_t/K)}{\sqrt{\tau}} + \frac{I_t^2 \sqrt{\tau}}{2} \right) \\ &= S_t \sqrt{\tau} n(d_1)(-d_1) \left( -\frac{\ln(S_t/K)}{\sqrt{\tau}} + \frac{I_t^2 \sqrt{\tau} \sqrt{\tau}}{2\sqrt{\tau}} \right) \\ &= S_t n(d_1)(-d_1) \left( -\ln(S_t/K) + \frac{I_t^2 \tau}{2} \right) = B_{SS} S_t^2 Z_- Z_+ \end{aligned}$$

*Derivada  $d_1'$*

$$\frac{\partial d_1}{\partial I_t} = \left( d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \frac{1}{2} I_t^2 \tau}{I_t \sqrt{\tau}} \right)' = \frac{\left( \frac{I_t^2 \tau}{2} \right)' I_t \sqrt{\tau} - (\ln(S_t/K) + \frac{I_t^2 \tau}{2})(I_t \sqrt{\tau})}{(I_t \sqrt{\tau})^2}$$

Sabendo que:

- $\left( I_t^2 \tau / 2 \right)' = I_t$
- $(I_t \sqrt{\tau})' = \sqrt{\tau}$

Então:

$$\frac{\partial d_1}{\partial I_t} = \frac{I_t \tau I_t \sqrt{\tau} - (\ln(S_t/K) + \frac{1}{2} I_t^2 \tau) \sqrt{\tau}}{I_t^2 \tau} = \frac{I_t^2 \sqrt{\tau}}{I_t^2 \tau} - \frac{(\ln(S_t/K) + \frac{1}{2} I_t^2 \tau)}{I_t^2 \sqrt{\tau}}$$

Que por sua vez:

$$= \sqrt{\tau} - \frac{(\ln(S_t/K))}{I_t^2 \sqrt{\tau}} - \frac{1}{2} \sqrt{\tau} = - \frac{\ln(S_t/K)}{I_t^2 \sqrt{\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\tau}$$