

O EFEITO SMILE
Uma aplicação ao DAX

Maria da Graça Teixeira Duarte de Aguiar Câmara

Tese de Mestrado
em Finanças

Orientador:
Prof. Doutor João Pedro Nunes, Professor Associado, ISCTE Business School, Departamento
de Finanças

Abril de 2010

Resumo

O modelo clássico de avaliação de opções de Black-Scholes (1973) assume que o preço de um activo evolui continuamente, segundo um movimento geométrico Browniano com volatilidade constante e que não existem custos de transacção. Verificando-se estes pressupostos todas as opções emitidas sobre um determinado activo deveriam apresentar a mesma volatilidade implícita.

No entanto, vários estudos mostram que as volatilidades implícitas tendem a variar consoante o *moneyness* das opções e o tempo de expiração das mesmas. Na realidade, se apresentarmos graficamente as volatilidades implícitas nos preços de mercado das opções em função de um rácio de *moneyness*, verificamos que as opções *at-the-money* tendem a apresentar valores de volatilidade inferiores aos das opções *out-of-the-money*. Este fenómeno é conhecido por efeito *smile* e geralmente descrito como apresentando a forma gráfica de um U, que pode ser mais ou menos pronunciado.

A presente tese surge assim do interesse teórico e prático de aprofundar o estudo do “efeito smile ” num determinado contexto de mercado: um conjunto alargado de opções de compra e venda sobre o índice DAX. Estamos convictos que o nosso trabalho, descrevendo o efeito smile de modo mais exaustivo bem como a sua associação com outras variáveis com impacto sobre o preço da opção, poderá contribuir para o aprofundamento e refinação dos modelos de avaliação de opções e despertar o interesse por esta importante área de investigação em finanças.

Neste contexto, o nosso trabalho tem por objectivo analisar e comparar os padrões de *smile* obtidos na aplicação dos modelos de Black-Scholes-Merton (1973) e de Elasticidade Constante da Variância (CEV) à avaliação de um conjunto de opções sobre o DAX. Procederemos ainda à comparação das curvas de volatilidade obtidas com as respectivas superfícies de volatilidade implícitas.

Palavras-chave: Efeito Sorriso, Black-Scholes, CEV, Opções.

Classificação JEL: G12, G13, G14.

Abstract

Considering the assumptions made in the seminal Black-Scholes model for option valuation, one would expect the implied volatility for all the options on a given asset to be constant. However, many later studies have shown that the implied volatilities tend to vary according to the moneyness and the time of expiration of the options, notably out-of-the-money options tend to have more implied volatility than those at-the-money. When plotted this phenomenon produces a characteristic U shape, hence, it became known as the smile effect.

In this thesis we analyse and compare the smile patterns obtained by application of the Black-Scholes-Merton and the Constant Elasticity Variance (CEV) models to a set of DAX options. Furthermore we compare the obtained volatility curves with the implied volatility surfaces.

By careful study and description of the smile effect on a broad spectrum of DAX options we intend to better understand the effect and to find new associations with other variables that have an impact on option price. Doing so, we contribute to the refinement of the models used in option valuation and raise awareness on this important subject.

Keywords: Smile effect; Black-Scholes, CEV, Options.

JEL Classification: G12, G13, G14.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor João Pedro Nunes, é devido um agradecimento especial pelas sugestões e críticas, pelo estímulo permanente, pela sua grande disponibilidade.

À minha família, especialmente à minha Mãe pela forma como sempre me soube motivar para a elaboração desta tese, ao Rui e Gui pelo inestimável apoio e acompanhamento bem como pelas incansáveis leituras e revisões que muito facilitaram a minha tarefa.

Ao Pedro por todo o apoio prestado.

Índice

Resumo.....	i
Abstract.....	ii
Agradecimentos.....	iii
Índice.....	iv
Lista de Tabelas.....	v
Lista de Figuras.....	vi
Capítulo 1. Introdução.....	1
Capítulo 2. Revisão da Literatura.....	4
Capítulo 3. Modelos de Avaliação de Opções.....	14
3.1. O modelo de Black-Scholes.....	14
3.2. O modelo CEV.....	17
3.3. Comentários aos modelos.....	19
Capítulo 4. Resultados Experimentais.....	22
4.1. Metodologia.....	22
4.2. Resultados.....	25
4.2.1. Padrão de volatilidade das <i>calls</i>	25
4.2.2. Padrão de volatilidade das <i>puts</i>	27
4.2.3. Padrões de volatilidades de <i>Calls</i> e <i>Puts</i> - Comparativo.....	29
4.2.4. Superfícies de Volatilidade.....	31
Capítulo 5. Conclusões e Pistas de Investigação Futuras.....	36
Bibliografia.....	39

Lista de Tabelas

Tabela 1: Opções sobre o DAX.....	22
Tabela 2: <i>Yields</i> da Dívida Pública Alemã.....	23
Tabela 3: Volatilidades obtidas via Black-Scholes e CEV.....	24

Lista de Figuras

Fig.1: Sorriso das <i>calls</i> sobre o DAX – Junho 2010.....	25
Fig.2: Sorriso das <i>calls</i> sobre o DAX – Março 2011.....	26
Fig.3: Sorriso das <i>calls</i> sobre o DAX – Dezembro 2014.....	26
Fig.4: Sorriso das <i>puts</i> sobre o DAX – Junho 2010.....	27
Fig.5: Sorriso das <i>puts</i> sobre o DAX – Março 2011.....	28
Fig.6: Sorriso das <i>puts</i> sobre o DAX – Dezembro 2014.....	28
Fig.7: Comparativo do sorriso das <i>calls</i> e <i>puts</i> sobre o DAX – Junho 2010.....	29
Fig.8: Comparativo do sorriso das <i>calls</i> e <i>puts</i> sobre o DAX – Março 2011.....	30
Fig.9: Comparativo do sorriso das <i>calls</i> e <i>puts</i> sobre o DAX – Dezembro 2014.....	30
Fig.10: Superfície de volatilidade das <i>calls</i> sobre o DAX (modelo Black-Scholes).....	31
Fig.11: Superfície de volatilidade das <i>calls</i> sobre o DAX (modelo CEV).....	32
Fig.12: Superfície de volatilidade das <i>calls</i> sobre o DAX (Volatilidade Histórica).....	33
Fig.13: Superfície de volatilidade das <i>puts</i> sobre o DAX (modelo Black-Scholes).....	33
Fig.14: Superfície de volatilidade das <i>puts</i> sobre o DAX (modelo CEV).....	34
Fig.15: Superfície de volatilidade das <i>puts</i> sobre o DAX (Volatilidade Histórica).....	34

1. Introdução

O “efeito smile” decorre da observação empírica de que a volatilidade implícita de opções com a mesma data de vencimento, e diferentes preços de exercício, varia, segundo uma curva em forma de U mais ou menos pronunciada. Esta curva apresenta níveis elevados de volatilidade para opções *in* e *out-of-the-money* e valores mais reduzidos para opções *at-the-money*.

A expressão “smile” tem a sua origem nos estudos efectuados, antes do *crash* de 1987, sobre opções do S&P 500. Os resultados obtidos mostraram que as volatilidades implícitas obtidas para opções claramente *in* e *out-of-the-money* eram consideravelmente superiores às volatilidades obtidas para opções *at-the-money*, criando assim um padrão em forma de sorriso. Após o *crash* o smile das opções sobre o S&P500 alterou-se para uma forma menos pronunciada com as volatilidades a decrescerem monotonicamente com o aumento dos preços de exercício, continuando, no entanto, o padrão de volatilidade implícito a ser referido como “smile”, independentemente da sua forma.

Foram apontadas, entre outras, como causas para o fenómeno: a volatilidade não ser constante mas sim estocástica; o facto de o activo subjacente poder evoluir de forma não contínua podendo sofrer saltos; o comportamento dos *traders*; os custos de transacção e, ainda, o efeito dos dividendos na avaliação de opções americanas.

Podemos encontrar evidências empíricas do fenómeno em Stein (1989), Heynen (1994), Taylor e Xu (1994), Duque e Paxson (1994), Gemmill (1996), Dumas, Flemming e Whaley (1998) e Peña, Serna e Rubio (1997). Outros autores explicam o efeito smile com uma fundamentação essencialmente teórica, Hull e White (1987), Taylor e Xu (1994) ou Heynen, Kemma e Vorst (1994).

Quando avaliamos as opções, o efeito smile da volatilidade deverá então ser incorporado de alguma maneira. Isto é feito através: da incorporação da volatilidade estocástica, ver, por exemplo Scott (1987), Ball e Roma (1994), e de Hull e White (1999); da incorporação de taxas de juros estocásticas, conforme, por exemplo, Amin e Jarrow (1992) ou, ainda da incorporação de saltos no preço do activo subjacente, conforme, por exemplo, Merton (1976). Segundo Mayhew (1995), se assumirmos que o preço do activo subjacente à opção segue um

processo bastante complicado, quase qualquer tipo de sorriso de volatilidade pode ser replicado. No entanto, estes modelos multifactores incluem vários parâmetros que têm que ser estimados. Além disso, o simples facto de não existirem activos através dos quais se possa proceder ao *hedging* directo do risco de volatilidade ou dos saltos coloca dificuldades acrescidas.

O impacto percentual da volatilidade estocástica sobre o *pricing* das opções aumenta com o aumento da maturidade, ao passo que o sorriso criado pela volatilidade estocástica torna-se, geralmente, menos pronunciado à medida que o tempo até à expiração aumenta. O efeito de potenciais saltos é, no entanto, menos pronunciado para opções com maior maturidade porque os saltos, quando consideramos um período de tempo mais alargado, tendem a anular-se. Um excesso de kurtose na distribuição dos retornos do activo subjacente pode ser uma explicação para a existência de padrões de sorriso. Haverá assim uma maior probabilidade de observações extremas do que no caso Black-Scholes, que por sua vez, irá aumentar o valor de *out-of* e *in-the-money* em relação às opções *at-the-money*. O resultado seria um sorriso em forma de U em volatilidades implícitas. No entanto, a distribuição subjacente também pode ser assimétrica, e esta assimetria fará com que um lado do sorriso seja mais pronunciado. O resultado seria, então, um sorriso assimétrico, que também foi encontrado em vários estudos referidos na revisão da literatura.

Ao avaliar uma opção a volatilidade do activo subjacente é, regra geral, um factor determinante. No entanto, a volatilidade não é facilmente observável no mercado e, para a sua obtenção, algum tipo de aproximação terá de ser feito. Uma estimativa possível consiste em obter a volatilidade implícita de acordo com algum modelo estabelecido i.e., a volatilidade implícita é aquela que aplicada ao modelo de avaliação da opção iguala o preço de mercado. A volatilidade implícita obtida “via modelo” pode assim ser vista como a volatilidade percebida pelos distintos *players* do mercado, sendo dependente do processo de cotação e outros pressupostos do modelo em questão.

A forma actual do “smile” varia de mercado para mercado, de activo subjacente para activo subjacente, variando ainda com os períodos de tempo considerados. Um bom exemplo é o sorriso das volatilidades implícitas para opções sobre divisas, que tende a ser muito mais em forma de U do que a de outros activos subjacentes. Isso talvez possa ser explicado pelas diferenças relacionadas com a microestrutura de mercado.

O padrão de volatilidades implícitas obtidas em função do tempo de expiração é normalmente referido como a estrutura temporal da volatilidade implícita, enquanto que a inclinação "ou o sorriso" se refere ao padrão entre os diferentes níveis de *moneyness*. Na presente tese, a expressão "efeito sorriso" (*smile* ou "sorriso"), será empregue para referir a "inclinação" tanto em função do tempo de vida da opção como de *moneyness*, i.e. a denominada superfície de volatilidade.

A literatura mais recente sobre o tema parece concluir que a sofisticação actual da modelação financeira na avaliação de opções não consegue replicar, ou melhor não é suficiente para explicar, o "efeito smile".

A presente tese tem por objectivo examinar o efeito de *smile* da volatilidade implícita para opções sobre o DAX encontrando-se dividida em 5 capítulos. No capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura sobre o tema central do nosso trabalho. No capítulo 3 é apresentado o modelo clássico de avaliação de opções de Black-Scholes e o modelo CEV (Constant Elasticity of Variance). No capítulo 4 são apresentados os dados que serviram de base ao nosso trabalho, a metodologia desenvolvida e os principais resultados obtidos. Finalmente, no quinto e último capítulo são apresentadas as principais conclusões e um conjunto de pistas de investigação.

2. Revisão da Literatura

O modelo Black-Scholes assume que os índices sobre acções evoluem de acordo com um movimento geométrico Browniano (MGB) ou “passeio aleatório” com volatilidade constante. Se o modelo Black-Scholes estiver correcto, então a função de distribuição de determinado índice, em qualquer instante de vencimento de opções, será lognormal, e todas as opções sobre o índice deverão apresentar a mesma volatilidade implícita. No entanto, desde o *crash* de 87, as volatilidades implícitas de opções sobre índices, obtidas via Black-Scholes, têm apresentado uma relação inversa com os preços de exercício – com as opções de venda (*puts*) *out-of-the-money* a transaccionarem com maiores volatilidades implícitas do que as correspondentes opções de compra (*calls*) *out-of-the-money*.

As volatilidades implícitas das opções sobre índices de acções apresentam, geralmente, uma estrutura distorcida, comumente, denominada de “sorriso da volatilidade.” Um dos problemas de longa data na avaliação de opções tem sido como conciliar esta estrutura com o modelo de Black-Scholes normalmente utilizado pelos *traders* de opções.

Ao variarem empiricamente a volatilidade no modelo de Black-Scholes com o valor de exercício da opção, os *traders* estão implicitamente a assumir uma distribuição *não-lognormal* para o índice. Podemos encarar esta distribuição não-lognormal como resultado de o índice evoluir segundo um “passeio aleatório modificado” com volatilidade variável função, em cada momento, tanto do nível do índice como do tempo até à maturidade. Para avaliar opções de estilo europeu de forma consistente, através do cálculo dos valores esperados dos respectivos *payoffs*, necessitamos conhecer a forma exacta de tal distribuição não-lognormal. Para avaliar opções americanas ou opções mais exóticas, necessitamos de conhecer com exactidão a forma do “passeio aleatório modificado” – ou seja, como é que a volatilidade varia com o valor do índice (activo subjacente) e o tempo até à maturidade.

Ao calcular as volatilidades implícitas, podem surgir problemas relacionados com diferentes níveis de liquidez e de *moneyness*. Opções próximas de situações *at-the-money* são normalmente muito mais transaccionadas do que opções claramente *in* ou *out-of-the-money*. Se os preços estão enviesados, podem levar a distorções nas estimativas de volatilidade para estas últimas opções. Além disso, os preços dados pelo modelo Black-Scholes têm-se

mostrado mais fiáveis para determinado tipo de opções do que para outros, e algumas opções também são mais sensíveis à volatilidade do que outras.

Neste contexto, algum tipo de ponderação deverá ser aplicado. Mayhew (1995) apresenta diferentes esquemas de ponderação para as volatilidades implícitas de opções com *moneyness* diferente. A maneira mais simples consiste em estimar a volatilidade implícita da opção que está mais próxima da situação *at-the-money* e, depois, usar essa estimativa de volatilidade para avaliar, independentemente do nível de *moneyness*, todas as opções com o mesmo tempo de expiração. Segundo Beckers (1981) a aplicação da volatilidade implícita para a opção mais próxima de estar *at-the-money* produz resultados tão bons como a aplicação de uma média ponderada. Contudo, quando o padrão do sorriso das volatilidades implícita é muito pronunciado tal pode não ser acontecer.

Quando os preços de mercado de determinadas opções são utilizados para estimar as volatilidades implícitas recorrendo ao modelo de Black-Scholes (1973), os valores obtidos tendem a variar consoante as séries de opções analisadas. Normalmente, quando as volatilidades implícitas são apresentadas graficamente em função de um rácio de *moneyness*, opções *at-the-money* tendem a apresentar valores de volatilidade inferiores a opções *out-of-the-money*. Este efeito é o conhecido “efeito smile”, geralmente descrito como mostrando uma forma em U e empiricamente detectado, por diferentes autores, para distintas opções sobre diferentes activos subjacentes.

Embora o efeito smile, enquanto tema de investigação, seja relativamente recente, os primeiros estudos sobre a teoria de avaliação de opções já haviam detectado alguns enviesamentos nos modelos de avaliação de opções. No seu artigo seminal, Black e Scholes (1973) apresentaram evidências de enviesamento nos valores de opção quando se comparam os preços de mercado de *warrants* com os preços teóricos resultantes do seu modelo.

Black (1975) discute a eventual necessidade de se considerar volatilidades diferentes para as opções com diferentes maturidades. Se, por exemplo, num determinado momento, a volatilidade observada se revela invulgarmente alta, um declínio gradual para níveis mais normais pode ser esperado. O inverso pode ser espectável em períodos de volatilidade anormalmente baixa. Essa tendência de reversão à média nos níveis de volatilidade, pode

explicar alguns dos padrões de estrutura temporal da volatilidade implícita detectado em outros estudos.

Macbeth e Merville (1979) analisaram os preços de mercado de opções sobre seis acções diferentes e compararam os seus valores com os preços previstos pelo modelo Black-Scholes. A volatilidade implícita obtida revelou-se diferente em termos de *moneyness* e tempo até à maturidade. Para todas as opções, observa-se uma tendência para a volatilidade implícita diminuir à medida que a opção se torna menos *in-the-money*. Contudo, a relação em termos do tempo de expiração depende do nível de *moneyness* das calls. Por exemplo, opções *in-the-money* com um curto período de tempo até o vencimento tendem a apresentar maiores volatilidades implícitas do que opções equivalentes com um tempo mais longo de vida. Para opções *out-of-the-money*, a relação é invertida. Macbeth e Merville, encontraram evidências de que o modelo de Black-Scholes (1973) tende a subvalorizar opções *in-the-money* e a sobrevalorizar opções *out-of-the-money*.

Geske e Roll (1984) demonstraram que um tratamento inadequado da possibilidade de exercício antecipado de opções de compra americanas poderia explicar alguns dos enviesamentos anteriormente detectados. Se a “versão americana” do modelo de Black-Scholes (a chamada aproximação de Black) for usada em vez da versão corrigida para a opção de compra Americana proposta por Roll (1977), a probabilidade de exercício antecipado pode influenciar a relação entre a volatilidade implícita e, por exemplo, o preço de exercício. Nos períodos em que os níveis das taxas de juro e o pagamento de dividendos aumentam a probabilidade de exercício antecipado, será de esperar uma relação directa entre a volatilidade implícita e o preço de exercício. Durante os períodos em que a probabilidade de exercício antecipado é menor, a volatilidade implícita é inversamente relacionada com o preço de exercício. Geske e Roll (1984) defendem que os “smiles” são resultado de erros na avaliação de opções americanas sobre activos que pagam dividendos antes do vencimento.

Rubinstein (1985) examinou as volatilidades implícitas para opções sobre acções negociadas na CBOE (Chicago Board Options Exchange) recorrendo a uma extensa base de dados. Seis especificações diferentes de modelos, para além do modelo Black-Scholes foram usados, mas nenhum deles, aparentemente, parece ser capaz de captar todos os enviesamentos observados no modelo Black-Scholes. Embora os enviesamentos tenham sido considerados estatisticamente significativos, não houve nenhuma evidência da sua significância em termos

económicos. Os enviesamentos ao longo de diferentes preços de exercício obtidos com o modelo de Black-Scholes também se revelaram não estacionários. O sentido deste enviesamento, num determinado momento, é geralmente o mesmo para a maioria dos activos subjacentes, mas a sua direcção é diferente para diferentes períodos de tempo. Para opções de compra *out-of-the-money*, a conclusão é a de que prazos curtos até o vencimento correspondem a níveis mais elevados de volatilidades implícitas para todo o período analisado. Contudo, para opções de compra *at-the-money*, isso só é verdade para a segunda metade do período analisado, enquanto o oposto é verdadeiro para a primeira metade. Na primeira metade verifica-se, geralmente, que um menor preço de exercício leva a uma maior volatilidade implícita se as opções tiverem o mesmo tempo de expiração, enquanto que o contrário é verdade para o segundo período.

No entanto, Rubinstein (1985) estudando opções sobre acções listadas na CBOE, encontrou alguns padrões confusos. Parecia que o modelo de Black-Scholes (1973) sobreavaliava opções *out-of-the-money* e subavaliava opções *in-the-money*, isto para um período entre Agosto de 1976 e Outubro de 1977. Contudo, o mesmo modelo sobrevalorizava opções *in-the-money* e subavaliava opções *out-of-the-money* para o período de Outubro de 1977 a Outubro de 1978.

Ao analisarem o modelo de avaliação de opções sobre acções, assumindo que tanto os retornos do activo subjacente como a volatilidade dos retornos evoluem segundo um movimento geométrico browniano, Hull e White (1987) concluíram que os preços teóricos, em geral, diferem da solução de Black-Scholes. Estas diferenças podem ser explicadas recorrendo a diversas variáveis. No entanto, algumas foram abordadas em detalhe: a volatilidade, o tempo até o vencimento e a correlação entre a rendibilidade do activo subjacente e a volatilidade instantânea de tais retornos. A mesma ideia foi depois prosseguida em Hull e White (1988), em que um processo estocástico diferente foi proposto para replicar a volatilidade instantânea dos retornos dos preços das acções. Neste trabalho Hull e White (1988) chegaram a uma equação aproximada para o *pricing* do enviesamento (bias) observado quando a equação de Black-Scholes (1973) é utilizada. Rubinstein (1994) analisou, no final da década de oitenta, uma gama alargada de opções sobre o índice S&P500, e descobriu que o *crash* de 1987 parece ter aumentado a visão dos participantes no mercado acerca das possibilidades de ocorrência de outro *crash*. Esta "crash-o-fobia" provoca uma distribuição implícita ligeiramente bimodal que se revela bastante comum após o *crash*. O padrão do *smile*

pré-*crash* nas volatilidades implícitas também parece ter mudado de forma (menos pronunciada), no período pós-*crash*.

Outros estudos revelaram evidência empírica para este enviesamento no preço de exercício. Clewlow e Xu (1993), estudando opções sobre futuros de índices de acções listadas na CME (Chicago Mercantile Exchange), encontraram padrões assimétricos para o sorriso. Heynen (1994) também encontrou evidências empíricas para o enviesamento do preço de exercício ao estudar, em 1989, as opções sobre o EOE (European Option Exchange, i.e., índice Holandês de acções Europeias).

Taylor e Xu (1994) estudaram, entre 1984 e 1992, opções sobre divisas negociadas no mercado de Filadélfia, tendo observado que a dimensão do efeito sorriso era aqui duas vezes o esperado, aumentando a sua dimensão à medida que se aproximava o vencimento da opção.

Duque e Paxson (1994) estudaram o efeito sorriso a partir de uma amostra composta pelas opções de compra mais transaccionadas na LIFFE (London International Financial Futures Exchange) durante o mês de Março de 1991, e apontaram para uma possível relação empírica entre o tempo até à maturidade e o formato em U do sorriso. Os autores recorreram a um modelo de avaliação de opções europeu para obter a volatilidade implícita tendo sido excluídas da análise as opções em que o exercício antecipado se revelasse a melhor decisão. A forma do sorriso (i.e. as volatilidades implícitas) são geralmente mais elevadas para opções *in-the-money*, mas surge também um sorriso “torto” (as volatilidades implícitas para as opções *in-the-money* são menores do que para opções *out-of-the-money*) ou “sorriso invertido” (as volatilidades implícitas para as opções *in-the-money* são superiores às das opções *out-of-the-money*). Diferentes estratégias de negociação com base na relação de volatilidades implícitas foram então testadas pelos autores como forma de pseudo arbitragem do sorriso.

Gemmill (1996) também encontrou o mesmo efeito para as opções sobre o índice FTSE 100, num período de 5 anos (de 1985 a 1990), embora o sorriso obtido tenha evidenciado padrões diferentes para diferentes dias extraídos da amostra. Dumas, Fleming e Whaley (1998) também encontraram padrões de sorriso para opções sobre o S&P 500, mas a sua forma parecia ser assimétrica e ia mudando ao longo do tempo até o vencimento. Peña, Serna e Rubio (1997) também encontraram sorrisos nas opções sobre o índice IBEX 35, cotadas na

MEFF (Mercado Espanhol de Futuros Financeiros), no estudo que efectuaram entre 1994 e 1996.

Bates (1996) investigou diferentes soluções no sentido de agregar as volatilidades implícitas para opções com diferentes preços de exercício e vencimentos numa abordagem única da volatilidade. A maioria das soluções envolveu algum tipo de ponderação, onde às opções com diferentes *moneyness* e/ou maturidade são atribuídos pesos diferentes. Provas da existência de distribuições mais ou menos *skewed* do que a lognormal foram ainda identificadas em vários estudos. Os resultados sugerem a inexistência de uma única hipótese alternativa para a distribuição do activo subjacente capaz de eliminar os enviesamentos encontrados ao longo dos preços de exercício. Bates (1996) sugere a utilização de modelos com *skewness* variável no tempo para complementar os modelos com volatilidade também variável no tempo.

Bates (1996) analisa ainda a importância da escolha da taxa de juro de curto prazo sobre a volatilidade implícita, assim como a importância da escolha dos modelos de taxa de juro estocástica. As conclusões sobre a capacidade de previsão das volatilidades implícitas não são no entanto evidentes. Por outro lado, quase todos os estudos concluem que a volatilidade implícita contém informações sobre a volatilidade futura.

Corrado e Su (1996) derivaram e testaram empiricamente um novo modelo que estende o modelo de Black-Scholes em que os efeitos “não-normais” de assimetria e kurtose são levados em linha de conta. Os autores, trabalhando com opções sobre o S&P500, procederam a ajustamentos para remover a maioria dos enviesamentos ao longo dos preços de exercício. Para além da correcção dos desvios padrão implícitos, os autores incorporaram (processaram) simultaneamente no modelo coeficientes implícitos para a assimetria e kurtose.

Bakshi et al. (1997) examinaram a performance em termos de *pricing* e *hedging* de diferentes modelos de avaliação de opções vis-a-vis o modelo Black-Scholes para opções de compra (*calls*) sobre o S&P500. Estes “diferentes modelos” incorporam combinações diferentes de evolução estocástica para a volatilidade e taxa de juro e a possibilidade de ocorrerem saltos na evolução do activo subjacente. Como a motivação para o desenvolvimento de novos modelos é replicar o padrão de sorriso encontrado quando utilizamos o modelo de Black-Scholes, o padrão de sorriso da volatilidade implícita encontrada nos diferentes modelos é tratado com especial atenção. A volatilidade implícita obtida via Black-Scholes exhibe um padrão claro em

forma de U ao longo de diferentes níveis de *moneyness*, com “sorriso” mais pronunciado para opções perto da maturidade.

Dumas et al. (1998) desenvolveram um modelo com função de volatilidade determinística (DVF) para a avaliação de opções. Este modelo incorpora diferentes especificações da volatilidade, tendo sido aplicado a opções sobre o índice S&P 500. A versão mais simples do modelo utiliza a volatilidade implícita de Black -Scholes, enquanto os outros tentam capturar o efeito de *moneyness* e tempo para expiração. Uma função de volatilidade relativamente parcimoniosa funciona bem para descrever a estrutura de volatilidade observada, enquanto que o modelo Black-Scholes com volatilidade constante é melhor para determinar *hedge ratios* (rácios de cobertura). No entanto, os resultados indicam que as funções de volatilidade originadas pelos preços de opções não são estáveis ao longo do tempo. Um modelo "Ad hoc" do tipo usado frequentemente na prática, que simplesmente “alisa” a volatilidade implícita ao longo de diferentes *moneyness* e maturidades produz erros no cálculo do *pricing* das opções inferiores aos obtidos via abordagem DVF. Em geral, os autores concluíram que, "quanto mais simples, melhor".

Peña et al. (1999) analisaram o padrão de *smile* da volatilidade implícita utilizando dados do índice espanhol IBEX 35. A função de volatilidade foi pelos autores estimada através do *fitting* da volatilidade implícita a seis modelos alternativos. Independentemente da especificação, um modelo incluindo o nível de *moneyness* num termo linear e um termo quadrático é preferível a um com apenas um termo linear, o que implica que o sorriso espanhol é caracterizado por um certo nível de curvatura. O nível mínimo de volatilidade implícita foi detectado em opções *at-the-money*. Os autores detectaram ainda padrões distintos de volatilidade em função do dia da semana. A curvatura do sorriso nas Segundas-feiras revelou-se significativamente diferente dos sorrisos no final da semana. Contudo, esta sazonalidade parece desaparecer quando algumas variáveis económicas são incluídas na análise. Uma causalidade bi-direcional de Granger entre os custos de transacção (*proxied* pelo *spread bid-ask*) e a curvatura do sorriso de volatilidade foi também identificada. No entanto, os resultados sugerem que as condições de mercado e os custos de transacção são relativamente mais importantes para as opções com um curto tempo restante até ao vencimento.

Num estudo relacionado, Peña et al. (2001) testaram a influência dos *spreads bid-ask* (enquanto medida dos custos de liquidez) no *smile* da volatilidade ajustando diferentes modelos para a volatilidade implícita que incorporavam também o *spread bid-ask*. No entanto, esses modelos não se revelaram superiores ao modelo base de Black-Scholes.

Derman (1999) analisou a forma como o enviesamento (*skew*) futuro, dado o actual, irá variar em função da avaliação do índice (activo) subjacente. Argumenta-se que muitas vezes é mais fácil modelar a diferença descrevendo o que não muda – em *trading* de opções este fenómeno é referido como “sticky” (“pegajoso”). São apresentadas, nesta abordagem, três sugestões sobre o que é considerado “sticky” em face das alterações no activo subjacentes; *sticky-strike*, *sticky-delta*, e *sticky implied tree*. O autor analisou as volatilidades implícitas de opções sobre o S&P 500 no período de Setembro de 1997 a Outubro de 1998. Na abordagem *sticky-strike*, presume-se que a volatilidade de uma opção com um determinado preço de exercício (*strike*) permanece a mesma, independentemente de mudanças no activo subjacente. A volatilidade de *at-the-money* variará contudo à medida que o activo subjacente se altera. Trata-se de um modelo pouco realista que, no máximo, poderia ser usado para obter o *smile* para preços de exercício que são próximos uns dos outros. A regra *sticky-delta* implica que o nível actual de volatilidade implícita de *at-the-money* deve permanecer o mesmo, independentemente dos movimentos no activo subjacente. Uma opção que se encontra 10% *out-of-the-money* quando o subjacente mudou deve apresentar a mesma volatilidade implícita de uma opção que se encontrava 10% *out-of-the-money* antes da mudança. Na abordagem *sticky implied tree*, a volatilidade implícita *at-the-money* diminui duas vezes mais rapidamente que o nível dos aumentos do subjacente. As duas primeiras abordagens são mais regras heurísticas do que propriamente teorias reais, enquanto que o modelo *sticky implied tree* fornece uma consistente, embora não necessariamente precisa, abordagem.

Duque e Lopes (1999), analisaram opções sobre acções transaccionadas na LIFFE, recorrendo ao modelo de volatilidade estocástica de avaliação de opções de Hull e White (1998) para encontrar as relações teóricas que deveriam existir entre a forma do *smile*, o nível de volatilidade e o tempo até à expiração das opções. Os autores excluíram do seu trabalho as opções em que o exercício antecipado se revelava a solução óptima. Duque e Lopes (1999) recorreram a B-splines cúbicas para modelar as volatilidades implícitas para determinados níveis de *moneyness* e recorreram às volatilidades implícitas observadas para outros graus de *moneyness*. Verificaram os mesmos autores que à medida que o tempo de expiração das

opções diminui, a dimensão do sorriso encontrado tende a aumentar. Tal facto confere suporte empírico à ideia de que as opções tendem a morrer “sorrindo”. No entanto, as mudanças no padrão de sorriso revelaram-se assimétricas. O “sorriso torto” (“*wry grin*”) encontrado em opções afastadas da maturidade é convertido num “sorriso invertido” (“*reverse grin*”) para opções em final de vida. Para opções de médio prazo, o sorriso revela-se mais simétrico. Além disso foi ainda identificada uma relação positiva, estatisticamente significativa, entre o sorriso e a volatilidade do activo subjacente.

Hafner e Wallmeier (2000) analisaram o padrão de volatilidades implícitas no DAX ao longo dos preços de exercício e os seus determinantes. Os autores concluíram que, em média, 95% da variação *cross-sectional* nas volatilidades implícitas poderia ser explicada pela variação no nível de *moneyness* das opções. O grande impacto do *crash* de 1987 no padrão de volatilidade implícita indica que a percepção do risco de *crash* por parte dos participantes no mercado afecta a forma do *smile*. No entanto, devido à falta de boas *proxys*, esta avaliação é difícil de incorporar num modelo.

Dennis e Mayhew (2001) investigaram factores sistemáticos e factores específicos às empresas que poderiam explicar a inclinação da volatilidade (*volatility skew*) observada para opções sobre acções negociadas na CBOE. As volatilidades implícitas foram calculadas usando um modelo binomial com 100 *time steps*, que considera a possibilidade do exercício antecipado da opção. Os autores concluíram que as opções sobre acções com betas mais elevados apresentam enviesamentos (*skews*) mais negativos na volatilidade do que opções sobre acções com betas mais baixos, indicando que o risco de mercado é um factor importante para explicar o fenómeno do enviesamento. No entanto, só no período pós-crash de 1987 é que os betas se revelam um factor significativo, o que indica que os detentores de opções só ficaram mais atentos ao risco de mercado a partir daquela data. Os mesmos autores concluíram ainda que os enviesamentos (*skews*) verificados em opções sobre determinado activo subjacente tende a ser tanto mais negativo quanto mais negativo for o enviesamento nas opções sobre o índice de mercado. No entanto, a variação de factores específicos à empresa parece ser mais importante do que as variações nos factores sistemáticos para explicar a variação no *skew*.

Muitos outros autores tentaram extrair informação adicional dos *smiles* como no caso de Bates (1991), concluindo que a persistência do padrão sorriso poderia implicar que o mercado

esperava o *crash* de 1987. A fim de acomodar este enviesamento empírico, os investigadores têm seguido duas abordagens diferentes: o desenvolvimento de modelos mais sofisticados tentando compensar esse efeito; e o modelar do enviesamento em si.

Diferentes razões têm sido sugeridas para o fenómeno do *smile* na avaliação de opções, tais como a volatilidade estocástica do activo subjacente, as variações observadas nas taxas de juro ou a diferença entre a trajectória observada e o caminho realmente percorrido pelo activo subjacente (como os processos com salto).

Merton (1976), Hull e White (1987), Scott (1987), Wiggins (1987), Johnson e Shanno (1987), Stein e Stein (1991), Bates (1996), Bakshi e Chen (1997), Cox (1996), Corrado e Su (1996), Madan, Carr e Chan (1998), são exemplos de modelos, onde os pressupostos básicos de Black-Scholes são alterados. Gkamas e Paxson (1999), comparando vários modelos de avaliação de opções assumindo volatilidade estocástica, foram capazes de “remover” uma parte significativa do efeito *smile*, mas não conseguiram removê-lo completamente.

Outros autores associam o *smile* ao comportamento dos *traders* ou à sua aversão ao risco, tais como Bookstaber (1991), Grossman e Zhou (1996), Gemmill (1996), Dumas, Fleming e Whaley (1998) e Gemmill e Kamiyama (1997). Finalmente, outros autores como Clewlow e Xu (1992) e (1993), Constantinides (1997) e Peña, Serna e Rubio (1997) atribuem o efeito *smile* aos custos de transação.

Concluimos assim que a literatura não é unânime na identificação das causas para o efeito *smile* e que os esforços desenvolvidos para modelar este fenómeno tem sido capazes de resolver o problema apenas parcialmente.

No próximo capítulo apresentaremos os dois principais modelos que estão na base do nosso trabalho empírico de análise do efeito *smile* ao índice DAX.

3. Modelos

3.1. O Modelo de Black-Scholes

No início dos anos 70, Fisher Black, Myron Scholes e Robert Merton (1973) fizeram uma descoberta histórica no campo da avaliação de opções ao desenvolverem uma fórmula analítica, fechada, capaz de avaliar o preço de uma opção europeia.

Uma opção é um contrato que confere ao seu detentor o direito, mas não a obrigação, de comprar (*call*) ou de vender (*put*) um determinado activo a determinado preço num, ou até, determinado momento. O preço a que o activo é comprado ou vendido corresponde ao preço de exercício da opção (*strike*). A data em que cessa o direito a comprar ou vender o activo, é a data de maturidade ou de vencimento da opção. Consoante o instante em que o direito pode ser exercido falamos de opções americanas (o direito pode ser exercido em qualquer momento até à maturidade) ou de opções europeias (o direito só pode ser exercido na data de vencimento).

O modelo de Black-Scholes assume que a evolução do preço do activo segue um movimento geométrico Browniano, com volatilidade e taxa de rendibilidade esperada constantes.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

O modelo considera ainda: a inexistência de oportunidades de arbitragem e de custos de transacção; que os investidores podem fazer aplicações ou contrair empréstimos à taxa de juro sem risco. No modelo base de Black-Scholes o activo subjacente não paga dividendos ao longo da vida da opção e não há restrições a vendas a descoberto.

O *payoff* (perda-ganho) de uma opção $V(S,T)$ no vencimento é conhecido. Para encontrar o seu valor em qualquer instante anterior, é necessário saber como V evolui em função de S e T . Aplicando o lema de Itô a (1), obtemos:

$$dV = \left(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

Seguindo uma estratégia de negociação na qual se mantenha uma opção e se negocie continuamente a acção de forma a manter-se $-\frac{\partial V}{\partial S}$ acções, o valor dessa carteira em cada instante t , será

$$\Pi = V - S \frac{\partial V}{\partial S}$$

A composição desse portfolio, chamado portfólio protegido em delta (*delta-hedge*), varia a cada instante no tempo. Considerando R o lucro ou prejuízo acumulado com essa estratégia, no intervalo de tempo $[t, t + dt]$ o lucro ou prejuízo instantâneo é

$$dR = dV - \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

Substituindo nas equações acima, obtemos

$$dR = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Esta equação não contém termos em dW . Ou seja, a estratégia é completamente isenta de risco (delta-neutral). Black-Scholes argumentam que, sob essas condições ideais, a taxa de retorno desse portfolio será igual, em cada momento, à taxa de retorno de qualquer outra aplicação sem risco; se assim não fosse haveria oportunidades de arbitragem. Assumindo que a taxa de retorno livre de risco seja r , então, no período $[t, t + dt]$

$$r\Pi dt = dR = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Substituindo Π e dividindo por dt obtém-se a equação diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

A resolução desta equação diferencial conduz-nos ao valor da opção de compra (*call*)

$$c(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

A partir da paridade Put-Call,

$$c(S, t) + K \cdot B(t, T) = p(S, t) + S(t)$$

em que:

- $c(S, t)$ é o valor da call no instante t ,
- $p(S, t)$ é o valor da put no instante t ,
- $S(t)$ é o valor da acção,
- K é o valor de exercício (*strike*) da opção,
- $B(t, T)$ é o valor actual de uma obrigação com maturidade T .

Se assumirmos que a taxa de juro da obrigação é constante e igual a r , então

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)},$$

e obtemos para o valor da opção de venda (*put*):

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S + C(S, t)$$

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)} - S + (SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2))$$

$$p(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

3.2. O modelo Constant Elasticity of Variance (CEV)

Black-Scholes (1973), no seu artigo seminal, derivaram uma fórmula de avaliação de opções assumindo que o activo subjacente segue um movimento geométrico Browniano. Nestas condições, a distribuição dos preços do activo subjacente é lognormal e, ignorando o efeito do tempo, a volatilidade é constante. Contudo, a evidência empírica mostra que tais pressupostos de lognormalidade e de volatilidade constante, regra geral, não se verificam. A existência de um *smile* na volatilidade pode ser explicada como o resultado de o activo subjacente não evoluir necessariamente segundo aquele processo estocástico.

Para contornar este problema vários autores sugeriram evoluções distintas para o activo subjacente e outros autores apontam para modelos de volatilidade estocástica. Merton (1976) sugere um modelo de difusão com saltos, Cox e Ross (1976) apresentam o modelo CEV.

A principal característica do modelo CEV é o permitir variações na volatilidade em função do valor do activo subjacente. Tal como apontado por Beckers (1980) e Schroder (1989), parecem existir argumentos teóricos que sustentam tal hipótese, para além da evidência empírica de que a volatilidade varia com o nível de preço da acção.

Vários autores defendem o modelo CEV face ao modelo de avaliação de opções de Black-Scholes (MacBeth and Merville, 1980; Emanuel and Macbeth, 1982). Contudo, a fórmula fechada de avaliação de opções resultante do modelo CEV envolve a utilização da distribuição não centrada do qui-quadrado e um método de aproximação analítica usando a distribuição normal standard, resultando numa solução fechada para a avaliação do valor de opções Europeias, *calls* e *puts*.

Proposto pela primeira vez em 1975 por Cox, o modelo Constant Elasticity of Variance (CEV) incorpora um ajuste de variância que provoca uma diminuição do nível absoluto de variância à medida que o activo valoriza e um incremento à medida que o activo desvaloriza.

O modelo *Constant Elasticity of Variance* (CEV), inicialmente apresentado por Cox (1975), constitui um prolongamento do modelo de Black-Scholes ao considerar um ajuste na variância em função do valor do activo subjacente. O modelo incorpora uma diminuição do nível absoluto de variância à medida que o activo valoriza e um incremento à medida que o

activo desvaloriza. Empiricamente, tal proporcionalidade é comumente observada nos mercados.

No modelo CEV considera-se que o activo subjacente (acção, índice...) evolui segundo o seguinte processo de difusão

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t,$$

onde r representa a taxa de juro constante e q a taxa de dividendo, enquanto δ e $\beta \in \mathbb{R}$ são parâmetros adicionais do modelo.

Dada a evolução para o activo subjacente apresentada em (1) a variância instantânea dos retornos do activo subjacente será dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^2(S, t) &= \frac{1}{dt} \text{Var} \left(\frac{dS_t}{S_t} \right) \\ &= \left(\delta S_t^{\frac{\beta}{2}-1} \right)^2 \\ &= \delta^2 S_t^{\beta-2} \end{aligned}$$

Se $\beta=2$, o modelo CEV reduz-se ao modelo de Black-Scholes com o activo subjacente a evoluir segundo um movimento geométrico Browniano.

Se $\beta < 2$, a volatilidade (variação instantânea dos retornos do activo subjacente) aumenta à medida que o preço do activo subjacente diminui. Este tipo de distribuição de probabilidade é semelhante ao observado para activos subjacentes (acções...) com uma distribuição marcada por “abas mais acentuadas à esquerda do que à direita”. Vários estudos empíricos documentaram e suportaram a existência de tal efeito de *leverage* na volatilidade: ver, por exemplo, Beckers (1980) e Christie (1982). Na análise do modelo CEV consideraremos a situação em que $\beta < 2$.

A denominação do modelo (CEV) está relacionada com o facto de a elasticidade da variância instantânea dos retornos relativamente ao preço do activo subjacente, ser constante:

$$\frac{d\sigma^2(S, t)}{dS_t} \frac{S_t}{\sigma^2(S, t)} = \delta^2 (\beta - 2) S_t^{\beta-3} \frac{S_t}{\delta^2 S_t^{\beta-2}}$$

$$= \beta - 2$$

Quando $\beta = 2$ (caso de elasticidade nula) caímos no modelo de Black-Scholes (1973). Quando $\beta = 0$ corresponde ao modelo de Merton (1973). Quando $\beta = 1$ estamos no modelo de raiz quadrada de Cox e Ross (1976).

Para $\beta < 2$, o modelo de CEV conduz-nos à seguinte expressão para o valor, no momento t , para o valor de uma opção de compra sobre o activo S , com *strike* X e vencimento no momento T ($\geq t$):

$$c_t(S_t, X, T) = S_t e^{-q(T-t)} Q_{\chi^2\left(2+\frac{2}{2-\beta}, 2x\right)}(2kX^{2-\beta}) - X e^{-r(T-t)} \left[1 - Q_{\chi^2\left(\frac{2}{2-\beta}, 2kX^{2-\beta}\right)}(2x) \right]$$

A paridade Put-Call conduz-nos à seguinte expressão para o valor de uma opção de venda no modelo CEV,

$$p_t(S_t, X, T) = -S_t e^{-q(T-t)} \left[1 - Q_{\chi^2\left(2+\frac{2}{2-\beta}, 2x\right)}(2kX^{2-\beta}) \right] + X e^{-r(T-t)} Q_{\chi^2\left(\frac{2}{2-\beta}, 2kX^{2-\beta}\right)}(2x)$$

com

$$k = \frac{2(r - q)}{(2 - \beta)\sigma^2(e^{-r(T-t)(2-\beta)} - 1)}$$

$$x = kS^{2-\beta} e^{-r(T-t)(2-\beta)}$$

3.3. Comentários aos Modelos

Desde que Black-Scholes derivaram, em 1973, uma solução fechada para a avaliação de opções europeias, um conjunto de avanços e modificações foram propostos ao modelo inicial. Estas tentativas têm como objectivo principal incorporar no modelo base certos padrões de comportamento, exibidos pelo activo subjacente (índice de acções alemãs no nosso caso), que são contrários às hipóteses assumidas no modelo original de comportamento lognormal. O

modelo original considera, como vimos: evolução do activo subjacente segundo o movimento geométrico Browniano; *trading* contínuo e inexistência de custos de transacção; possibilidade de financiar e obter financiamento à *risk free rate*. Na maturidade da opção, e durante toda a sua vida, é assumido que a distribuição do activo subjacente é lognormal com desvio padrão (volatilidade) constante.

Duas classes de modelos têm sido propostos no sentido de contornar a não-lognormalidade do activo subjacente e o facto de a volatilidade ser variável.

A primeira classe inclui os modelos de volatilidade local, de que o modelo CEV, analisado no nosso trabalho, é um exemplo. O *smile* de mercado, i.e., a relação entre a volatilidade, *strike* e *time-to-maturity* da opção, é utilizado como input para deduzir a volatilidade futura em função do preço do activo subjacente (no nosso caso o índice DAX) e da variável tempo.

O modelo admite ser possível extrair toda a superfície de volatilidade com base nos preços de mercado das opções europeias. Embora os modelos de volatilidade local nos forneçam um mecanismo interessante para obter a função de volatilidade, não incorporam progressos significativos ao nível da modelação do enviesamento (não-lognormalidade) da distribuição observada no activo subjacente.

O segundo grande grupo de modelos, os modelos de volatilidade estocástica, incorporam avanços importantes na modelação do activo subjacente, e na incorporação de não-lognormalidade, ao considerarem que a volatilidade evolui também segundo um outro processo de Itô, movimento este que poderá estar ou não correlacionado com o movimento geométrico Browniano que regula a evolução do activo subjacente. Esta classe, de modelos, acaba por revelar-se algo incompleta e bem mais complexa, na medida em que não permite a criação de um *portfolio hedged* recorrendo apenas ao activo subjacente e à *risk free rate*. Regra geral o processo de criação de tal *portfolio* exige a utilização de opções.

Nos mercados com efeitos de escala e em que a volatilidade do activo subjacente estão muito correlacionados com a evolução do próprio subjacente, os modelos de volatilidade local são geralmente a melhor escolha. Este é provavelmente o caso da modelação de activos subjacentes com *leverages* reduzidos, representativos de empresas com elevados níveis de capital, em que variações repentinas de cotação são pouco prováveis. Da mesma forma, nos

mercados da renda fixa e de câmbios fixos, com importantes níveis de suporte, modelos de volatilidade local podem revelar-se a melhor escolha.

4. Resultados Experimentais

4.1. Metodologia

Apresentados os modelos, que estão na base do nosso trabalho, e feita a revisão da literatura, exporemos neste capítulo os resultados obtidos na análise quantitativa do efeito *smile* num conjunto de opções (*calls* e *puts*) sobre o índice DAX (tabela 1).

Nome		Maturidade	Strike	Preço	Risk free	VOL. Imp. Hist.
DAX 5 C6250 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6250	168,5	0,000543533	0,18524
DAX 5 C6300 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6300	135,7	0,000543533	0,17859
DAX 5 C6350 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6350	106,4	0,000543533	0,17244
DAX 5 C6400 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6400	81	0,000543533	0,16687
DAX 5 C6450 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6450	59,7	0,000543533	0,16188
DAX 6 C6250 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6250	224,8	0,000548816	0,18585
DAX 6 C6300 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6300	193,2	0,000548816	0,18114
DAX 6 C6350 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6350	163,9	0,000548816	0,17657
DAX 6 C6400 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6400	137,1	0,000548816	0,17218
DAX 6 C6450 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6450	112,9	0,000548816	0,16795
DAX 7 C6250 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6250	271,6	0,0016058	0,18862
DAX 7 C6300 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6300	240,4	0,0016058	0,18462
DAX 7 C6350 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6350	211,4	0,0016058	0,18103
DAX 7 C6400 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6400	184	0,0016058	0,17726
DAX 7 C6450 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6450	158,6	0,0016058	0,17357
DAX 9 C6250 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6250	362	0,001614471	0,19785
DAX 9 C6300 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6300	331,4	0,001614471	0,19462
DAX 9 C6350 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6350	302,5	0,001614471	0,19171
DAX 9 C6400 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6400	274,8	0,001614471	0,18876
DAX 9 C6450 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6450	248,5	0,001614471	0,18587
DAX 12 C6250 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6250	465,7	0,00334725	0,20521
DAX 12 C6300 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6300	435,9	0,00334725	0,20269
DAX 12 C6350 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6350	407	0,00334725	0,20017
DAX 12 C6400 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6400	379,3	0,00334725	0,19779
DAX 12 C6450 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6450	352,4	0,00334725	0,19534
DAX 3 C6250 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6250	561	0,006103333	0,21231
DAX 3 C6300 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6300	531,8	0,006103333	0,2102
DAX 3 C6350 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6350	503,4	0,006103333	0,20813
DAX 3 C6400 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6400	475,4	0,006103333	0,20591
DAX 3 C6450 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6450	448,6	0,006103333	0,20388
DAX 6/11 C6100 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6100	737,8	0,006116467	0,22299
DAX 6/11 C6200 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6200	676,8	0,006116467	0,21912
DAX 6/11 C6300 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6300	618,2	0,006116467	0,21527
DAX 6/11 C6400 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6400	562,4	0,006116467	0,21155
DAX 6/11 C6500 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6500	509,1	0,006116467	0,20781
DAX 12/13 C6000 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6000	1499,7	0,0122707	0,24947
DAX 12/13 C6200 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6200	1386,9	0,0122707	0,24456
DAX 12/13 C6400 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6400	1278,8	0,0122707	0,23983
DAX 12/13 C6600 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6600	1175,4	0,0122707	0,23525
DAX 12/13 C6800 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6800	1077,3	0,0122707	0,23091
DAX 12/14 C6000 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6000	1769,6	0,01641145	0,25689
DAX 12/14 C6200 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6200	1662,2	0,01641145	0,25288
DAX 12/14 C6400 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6400	1558,3	0,01641145	0,24892
DAX 12/14 C6600 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6600	1457,9	0,01641145	0,24504
DAX 12/14 C6800 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6800	1360,9	0,01641145	0,24118
DAX 5 P6250 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6250	77,1	0,000543533	0,17616
DAX 5 P6300 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6300	94,3	0,000543533	0,16988
DAX 5 P6350 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6350	115	0,000543533	0,16384
DAX 5 P6400 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6400	139,6	0,000543533	0,15809
DAX 5 P6450 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6450	168,3	0,000543533	0,15255
DAX 6 P6250 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6250	132	0,000548816	0,18114
DAX 6 P6300 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6300	150,2	0,000548816	0,17635
DAX 6 P6350 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6350	170,9	0,000548816	0,17186
DAX 6 P6400 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6400	194	0,000548816	0,16737
DAX 6 P6450 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6450	219,8	0,000548816	0,16306
DAX 7 P6250 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6250	177,7	0,0016058	0,18734
DAX 7 P6300 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6300	196,6	0,0016058	0,1835
DAX 7 P6350 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6350	217,3	0,0016058	0,17972
DAX 7 P6400 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6400	239,9	0,0016058	0,17601
DAX 7 P6450 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6450	264,4	0,0016058	0,17227
DAX 9 P6250 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6250	263,8	0,001614471	0,19755
DAX 9 P6300 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6300	283,3	0,001614471	0,19449
DAX 9 P6350 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6350	304,2	0,001614471	0,19156
DAX 9 P6400 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6400	326,3	0,001614471	0,18859
DAX 9 P6450 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6450	350	0,001614471	0,1858
DAX 12 P6250 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6250	359,3	0,00334725	0,20498
DAX 12 P6300 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6300	379,2	0,00334725	0,20248
DAX 12 P6350 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6350	400,1	0,00334725	0,20002
DAX 12 P6400 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6400	422,1	0,00334725	0,19766
DAX 12 P6450 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6450	445,1	0,00334725	0,19531
DAX 3 P6250 Index	March 11 Puts on DAX	18-03-2011	6250	440,8	0,006103333	0,21214

Tabela 1: Opções sobre o DAX

Depois da recolha dos dados das opções (*calls* e *puts*) sobre o índice DAX bem como da *Yield Curve* da dívida pública Alemã (tabela 2), através da Bloomberg, procedemos à estimação da estrutura temporal das taxas de juro de forma a obter a *yield* adequada à maturidade de cada uma das opções.

Nome	Maturidade	Yield (%)	Dias até Maturidade
GERMAN TREASURY BILL	12-05-2010	0,054	16
GERMAN TREASURY BILL	14-07-2010	0,16	79
GERMAN TREASURY BILL	13-10-2010	0,334	170
BUNDESSCHATZANWEISUNGEN	11-03-2011	0,479	319
BUNDESSCHATZANWEISUNGEN	16-03-2012	0,873	690
BUNDESOBLIGATION	12-04-2013	1,225	1082
BUNDESOBLIGATION	11-04-2014	1,639	1446
BUNDESOBLIGATION	10-04-2015	2,068	1810
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2016	2,288	2079
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2017	2,525	2445
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2018	2,75	2810
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2019	2,925	3175
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2020	3,042	3540
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-01-2024	3,407	5001
BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND	04-07-2028	3,677	6644

Tabela 2: *Yields* da Dívida Pública Alemã

Com base nos dados das opções e na estrutura temporal das taxas de juro, resolvemos os Modelos (tabela 3) – Black-Scholes e CEV – para o parâmetro volatilidade (*fitting da volatilidade*). O procedimento de *fitting* foi implementado através de um conjunto de macros sobre o Excel que realizam um processo iterativo sobre o parâmetro volatilidade até que este iguale o preço de mercado da opção. A *risk free*, a aplicar na avaliação de cada opção, foi determinada por interpolação linear com base na *yield curve* Alemã e o número de dias até à expiração foi calculado a partir do dia 26 de Abril de 2010, data em que foram recolhidos os dados e em que o DAX se situava nos 6332,1 pontos índice.

Para determinar o valor da volatilidade em cada modelo, construímos uma macro apoiada por um procedimento de *goal seeker* que procura o valor de volatilidade que iguala o preço da opção devolvido pelo modelo ao preço de mercado da mesma.

Nome		Maturidade	Strike	Preço	Risk free	VOL. Imp. Hist.	B&S VOL	CEV VOL	Dias até Maturidade
DAX 5 C6250 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6250	168,5	0,000543533	0,18524	0,185328	0,18536	25
DAX 5 C6300 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6300	135,7	0,000543533	0,17859	0,178376	0,17877	25
DAX 5 C6350 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6350	106,4	0,000543533	0,17244	0,171946	0,17268	25
DAX 5 C6400 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6400	81	0,000543533	0,16687	0,166123	0,16719	25
DAX 5 C6450 Index	May 10 Calls on DAX	21-05-2010	6450	59,7	0,000543533	0,16188	0,160900	0,16231	25
DAX 6 C6250 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6250	224,8	0,000548816	0,18585	0,187063	0,18690	53
DAX 6 C6300 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6300	193,2	0,000548816	0,18114	0,182102	0,18231	53
DAX 6 C6350 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6350	163,9	0,000548816	0,17657	0,177300	0,17786	53
DAX 6 C6400 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6400	137,1	0,000548816	0,17218	0,172698	0,17360	53
DAX 6 C6450 Index	June 10 Calls on DAX	18-06-2010	6450	112,9	0,000548816	0,16795	0,168264	0,16949	53
DAX 7 C6250 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6250	271,6	0,0016058	0,18862	0,190382	0,19014	81
DAX 7 C6300 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6300	240,4	0,0016058	0,18462	0,186161	0,18630	81
DAX 7 C6350 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6350	211,4	0,0016058	0,18103	0,182360	0,18286	81
DAX 7 C6400 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6400	184	0,0016058	0,17726	0,178394	0,17924	81
DAX 7 C6450 Index	July 10 Calls on DAX	16-07-2010	6450	158,6	0,0016058	0,17357	0,174524	0,17571	81
DAX 9 C6250 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6250	362	0,001614471	0,19785	0,199700	0,19939	144
DAX 9 C6300 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6300	331,4	0,001614471	0,19462	0,196336	0,19642	144
DAX 9 C6350 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6350	302,5	0,001614471	0,19171	0,193286	0,19375	144
DAX 9 C6400 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6400	274,8	0,001614471	0,18876	0,190202	0,19104	144
DAX 9 C6450 Index	September 10 Calls on DAX	17-09-2010	6450	248,5	0,001614471	0,18587	0,187184	0,18838	144
DAX 12 C6250 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6250	465,7	0,00334725	0,20521	0,205455	0,20512	235
DAX 12 C6300 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6300	435,9	0,00334725	0,20269	0,202907	0,20298	235
DAX 12 C6350 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6350	407	0,00334725	0,20017	0,200360	0,20083	235
DAX 12 C6400 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6400	379,3	0,00334725	0,19779	0,197948	0,19880	235
DAX 12 C6450 Index	December 10 Calls on DAX	17-12-2010	6450	352,4	0,00334725	0,19534	0,195461	0,19669	235
DAX 3 C6250 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6250	561	0,006103333	0,21231	0,210355	0,21002	326
DAX 3 C6300 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6300	531,8	0,006103333	0,2102	0,208302	0,20839	326
DAX 3 C6350 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6350	503,4	0,006103333	0,20813	0,206277	0,20677	326
DAX 3 C6400 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6400	475,4	0,006103333	0,20591	0,204106	0,20500	326
DAX 3 C6450 Index	March 11 Calls on DAX	18-03-2011	6450	448,6	0,006103333	0,20388	0,202118	0,20340	326
DAX 6/11 C6100 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6100	737,8	0,006116467	0,22299	0,222254	0,22056	417
DAX 6/11 C6200 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6200	676,8	0,006116467	0,21912	0,218439	0,21766	417
DAX 6/11 C6300 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6300	618,2	0,006116467	0,21527	0,214628	0,21473	417
DAX 6/11 C6400 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6400	562,4	0,006116467	0,21155	0,210936	0,21187	417
DAX 6/11 C6500 Index	June 11 Calls on DAX	17-06-2011	6500	509,1	0,006116467	0,20781	0,207220	0,20895	417
DAX 12/13 C6000 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6000	1499,7	0,0122707	0,24947	0,256569	0,25291	1334
DAX 12/13 C6200 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6200	1386,9	0,0122707	0,24456	0,251423	0,24992	1334
DAX 12/13 C6400 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6400	1278,8	0,0122707	0,23983	0,246459	0,24700	1334
DAX 12/13 C6600 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6600	1175,4	0,0122707	0,23525	0,241646	0,24410	1334
DAX 12/13 C6800 Index	December 13 Calls on DAX	20-12-2013	6800	1077,3	0,0122707	0,23091	0,237081	0,24133	1334
DAX 12/14 C6000 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6000	1769,6	0,01641145	0,25689	0,265003	0,26065	1698
DAX 12/14 C6200 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6200	1662,2	0,01641145	0,25288	0,260679	0,25854	1698
DAX 12/14 C6400 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6400	1558,3	0,01641145	0,24892	0,256444	0,25641	1698
DAX 12/14 C6600 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6600	1457,9	0,01641145	0,24504	0,252283	0,25425	1698
DAX 12/14 C6800 Index	December 14 Calls on DAX	19-12-2014	6800	1360,9	0,01641145	0,24118	0,248168	0,25203	1698
DAX 5 P6250 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6250	77,1	0,000543533	0,17616	0,171075	0,17116	25
DAX 5 P6300 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6300	94,3	0,000543533	0,16988	0,164636	0,16504	25
DAX 5 P6350 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6350	115	0,000543533	0,16384	0,158324	0,15905	25
DAX 5 P6400 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6400	139,6	0,000543533	0,15809	0,152142	0,15318	25
DAX 5 P6450 Index	May 10 Puts on DAX	21-05-2010	6450	168,3	0,000543533	0,15255	0,145941	0,14729	25
DAX 6 P6250 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6250	132	0,000548816	0,18114	0,176279	0,17615	53
DAX 6 P6300 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6300	150,2	0,000548816	0,17635	0,171316	0,17154	53
DAX 6 P6350 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6350	170,9	0,000548816	0,17186	0,166583	0,16713	53
DAX 6 P6400 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6400	194	0,000548816	0,16737	0,161786	0,16266	53
DAX 6 P6450 Index	June 10 Puts on DAX	18-06-2010	6450	219,8	0,000548816	0,16306	0,157072	0,15825	53
DAX 7 P6250 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6250	177,7	0,0016058	0,18734	0,182264	0,18205	81
DAX 7 P6300 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6300	196,6	0,0016058	0,1835	0,178251	0,17840	81
DAX 7 P6350 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6350	217,3	0,0016058	0,17972	0,174259	0,17475	81
DAX 7 P6400 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6400	239,9	0,0016058	0,17601	0,170281	0,17110	81
DAX 7 P6450 Index	July 10 Puts on DAX	16-07-2010	6450	264,4	0,0016058	0,17227	0,166232	0,16737	81
DAX 9 P6250 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6250	263,8	0,001614471	0,19755	0,192035	0,19174	144
DAX 9 P6300 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6300	283,3	0,001614471	0,19449	0,188824	0,18891	144
DAX 9 P6350 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6350	304,2	0,001614471	0,19156	0,185705	0,18616	144
DAX 9 P6400 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6400	326,3	0,001614471	0,18859	0,182521	0,18333	144
DAX 9 P6450 Index	September 10 Puts on DAX	17-09-2010	6450	350	0,001614471	0,1858	0,179491	0,18064	144
DAX 12 P6250 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6250	359,3	0,00334725	0,20498	0,200152	0,19983	235
DAX 12 P6300 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6300	379,2	0,00334725	0,20248	0,197549	0,19762	235
DAX 12 P6350 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6350	400,1	0,00334725	0,20002	0,194984	0,19544	235
DAX 12 P6400 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6400	422,1	0,00334725	0,19766	0,192492	0,19333	235
DAX 12 P6450 Index	December 10 Puts on DAX	17-12-2010	6450	445,1	0,00334725	0,19531	0,190010	0,19120	235
DAX 3 P6250 Index	March 11 Puts on DAX	18-03-2011	6250	440,8	0,006103333	0,21214	0,208807	0,20847	326

Tabela 3: Volatilidades obtidas via Black-Scholes e CEV

A partir dos resultados obtidos (tabela 3) elaborámos um conjunto de gráficos procurando ilustrar o efeito *smile* em cada um dos modelos, bem como a forma como estes se comportam face aos dados históricos de volatilidade.

Começámos por analisar, separadamente, o padrão de volatilidade de *calls* e *puts*. Posteriormente, comparamos as volatilidades, de *calls* e *puts* de igual maturidade, obtidas através da aplicação dos dois modelos e as volatilidades históricas.

Finalmente, elaborámos as superfícies de volatilidade contendo a evolução desta ao longo do tempo de vida da opção e de diferentes *strikes*.

4.2. Resultados

Apresentaremos de seguida os resultados do nosso estudo pela ordem supra descrita.

4.2.1. Padrão de volatilidade das *calls*

Face aos padrões de volatilidade obtidos para todas as opções analisadas, seleccionámos para a nossa análise aquelas que nos pareceram mais representativas, correspondentes às maturidades de Junho 2010, Março 2011 e Dezembro 2014.

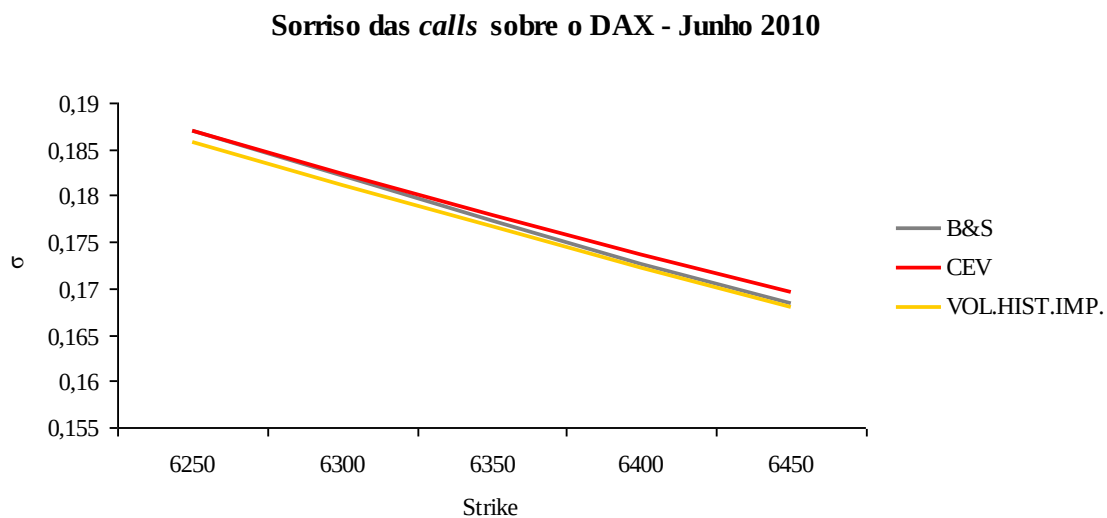
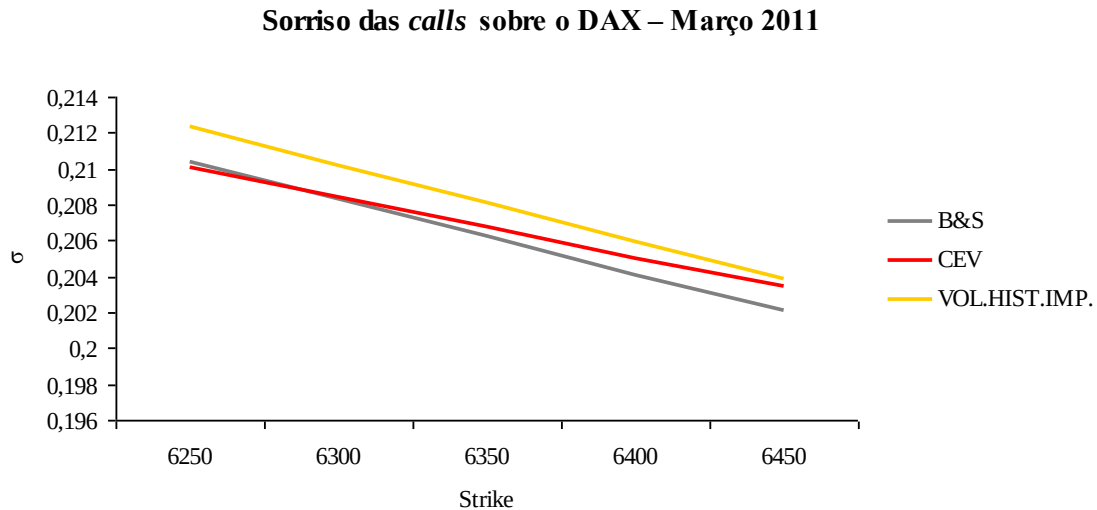
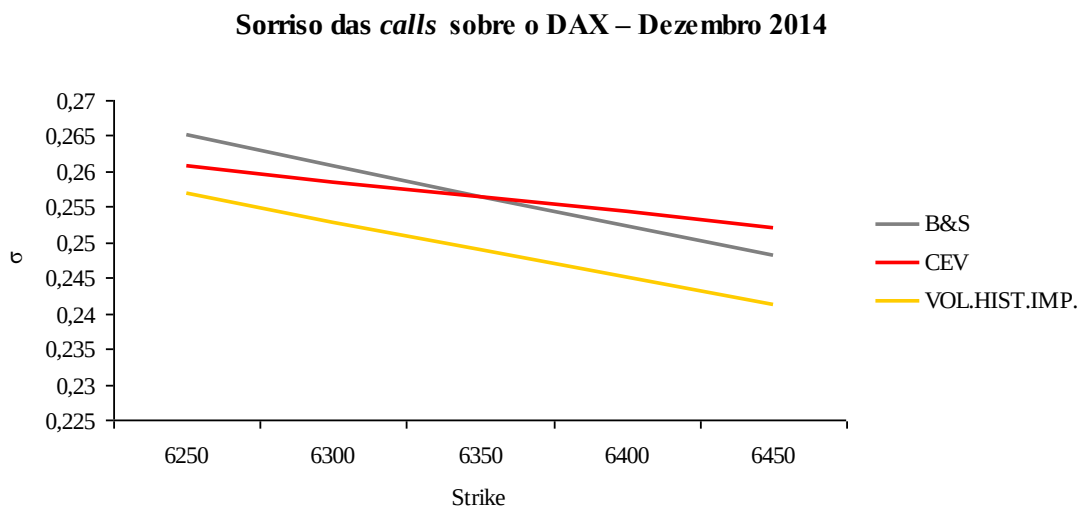


Fig.1: Sorriso das *calls* sobre o DAX – Junho 2010

Para as *calls* de maturidade mais curta, não se verificam diferenças significativas entre os distintos padrões de volatilidade devolvidos pelos modelos e as volatilidades históricas (fig.1).

Fig.2: Sorriso das *calls* sobre o DAX – Março 2011

Para as opções de compra com maturidade próxima de um ano (fig.2) pudemos identificar dois momentos distintos. Enquanto *out-of-the-money* os valores de volatilidade obtidos pelos dois modelos não registam diferenças significativas e são inferiores às volatilidades históricas observadas. Nas opções *out-of-the-money*, constata-se ainda que, o padrão da volatilidade obtido via modelo CEV é superior ao obtido no modelo Black-Scholes, convergindo para os valores de volatilidade histórica à medida que aumenta o *strike*.

Fig.3: Sorriso das *calls* sobre o DAX – Dezembro 2014

Para as opções com maturidade longa (fig.3) os padrões de volatilidade devolvidos pelos modelos diferem significativamente e são superiores aos valores históricos. Para as opções *in-*

the-money o modelo de Black-Scholes devolve valores de volatilidade superiores ao CEV, situação que se inverte para as opções que estão *out-of-the-money*. Independentemente do *strike* os valores históricos da volatilidade são consideravelmente inferiores.

A análise do padrão de volatilidade das *calls* ao longo de maturidades crescentes permite observar que o diferencial entre os valores históricos e a volatilidade devolvida pelos modelos aumenta significativamente. Nas opções de compra os modelos devolvem, sistematicamente, volatilidades superiores às históricas.

Uma vez que o espectro de *strikes* das opções disponíveis não é muito alargado, as diferenças entre os padrões de volatilidade resultantes dos modelos não apresentam diferenças acentuadas.

Merece ainda referência, o facto das volatilidades históricas se situarem consistentemente acima das volatilidades dos modelos para maturidades até um ano, momento a partir do qual a situação se inverte. Como seria de esperar, a volatilidade diminui à medida que as opções reduzem o seu nível de *moneyness*.

4.2.2. Padrão de volatilidade das *puts*

Seleccionámos, para a nossa análise, as opções de venda com os mesmos *strikes* e maturidades considerados no ponto anterior.

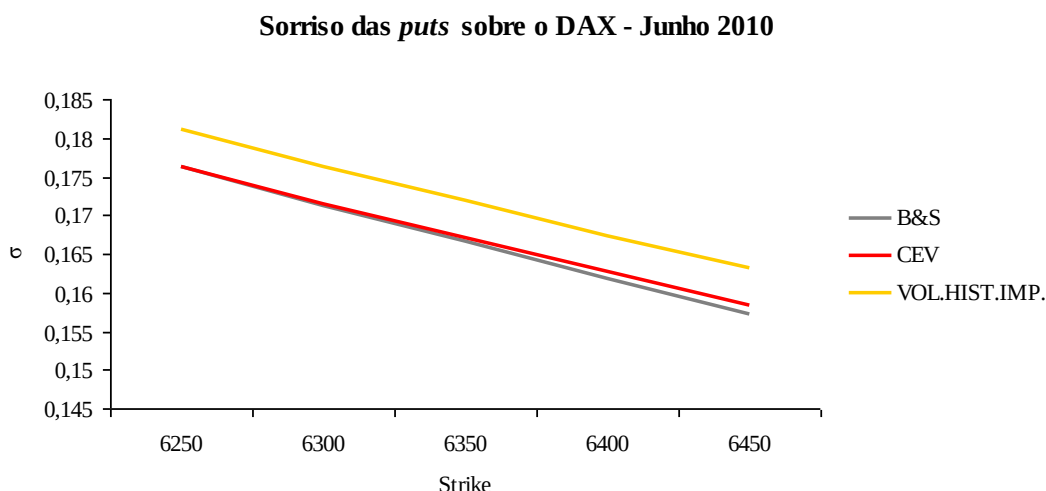


Fig.4: Sorriso das *puts* sobre o DAX – Junho 2010

Para as *puts* de menor maturidade (fig.4), embora não se observem diferenças significativas nos padrões de volatilidade devolvidos pelos modelos, regista-se um *gap* significativo face às

volatilidades históricas. Nas opções mais *out-of-the-money* o modelo CEV tende, ainda que ligeiramente, para a linha de volatilidade histórica.

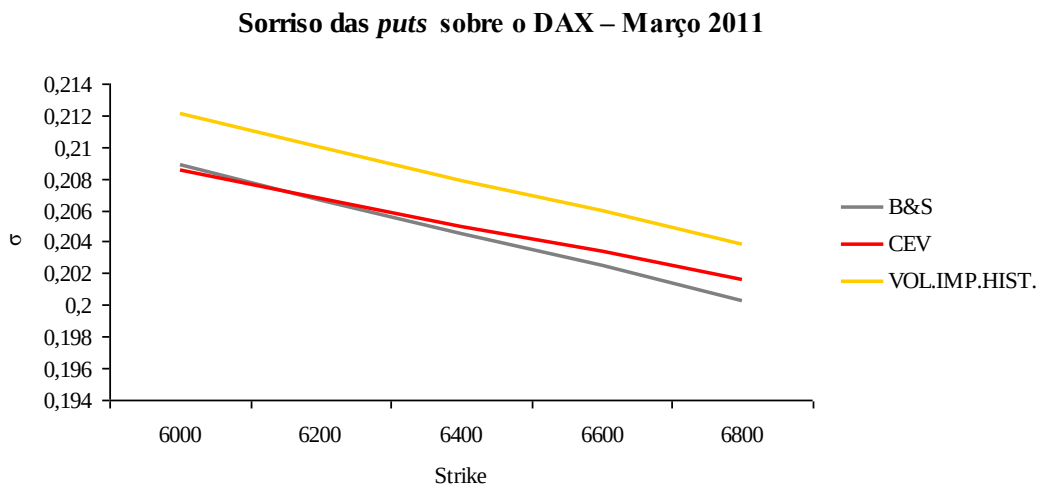


Fig.5: Sorriso das puts sobre o DAX – Março 2011

Para as *puts* com maturidade aproximada de um ano (fig.5) verificamos que, contrariamente ao observado nas *calls* (para o mesmo prazo), as volatilidades históricas são superiores às dos modelos, facto que iremos observar ao longo de todas as maturidades para as opções de venda. Também aqui se registam dois comportamentos distintos em função do nível de *money*ness das opções. Enquanto as opções se encontram *in-the-money*, os padrões de volatilidade obtidos pelos modelos de Black-Scholes e CEV são praticamente idênticos começando a divergir, ainda que ligeiramente, à medida que as opções perdem *money*ness.

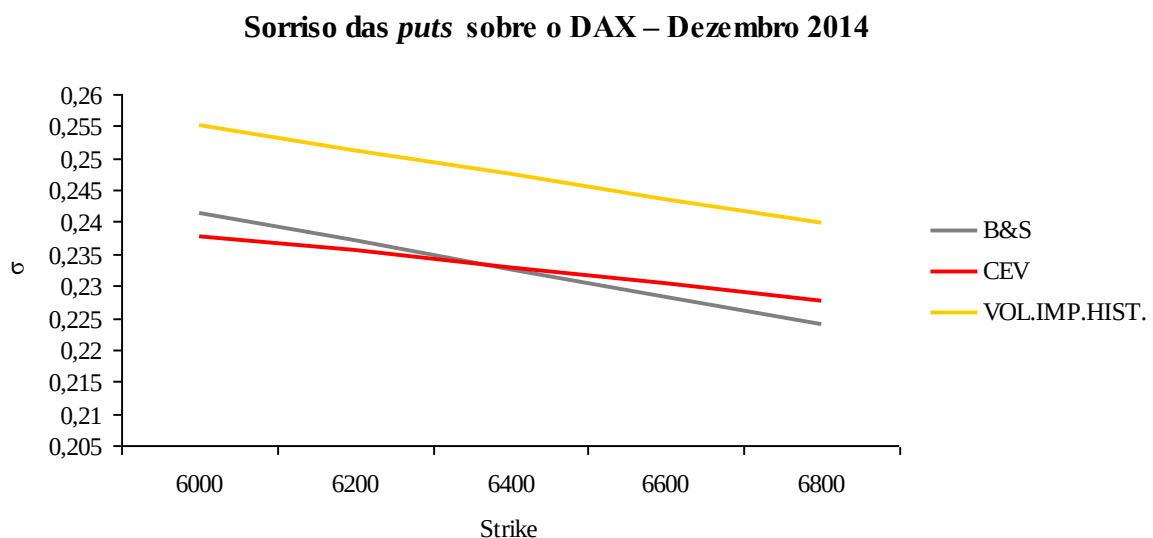


Fig.6: Sorriso das puts sobre o DAX – Dezembro 2014

Quando analisamos as opções de venda com maturidade mais longa (fig.6) constatamos que, tal como nas opções de compra, os padrões de volatilidade provenientes dos modelos diferem significativamente dos valores históricos que, neste caso, apresentam valores mais elevados.

À semelhança do observado nas opções de compra de idêntica maturidade, enquanto as opções de venda estão *in-the-money* o modelo de Black-Scholes devolve valores superiores ao CEV, situação que se inverte quando as opções estão *out-of-the-money*.

O padrão de volatilidade das *puts*, à medida que as maturidades aumentam, traduz um diferencial crescente entre os valores históricos e a volatilidade devolvida pelo modelo de Black-Scholes. As volatilidades históricas são consistentemente superiores às volatilidades devolvidas pelos modelos.

4.2.3. Padrões de volatilidades de *Calls* e *Puts* – Comparativo

Analisaremos agora os padrões produzidos pelos modelos Black-Scholes e CEV, para *calls* e *puts* ao longo de diferentes *strikes* para uma mesma maturidade.

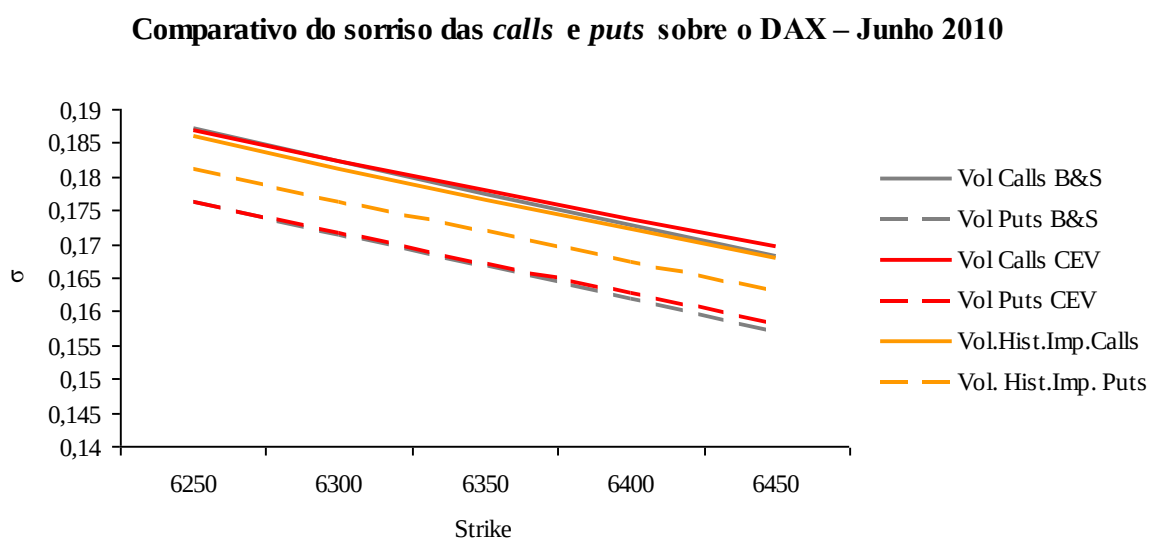
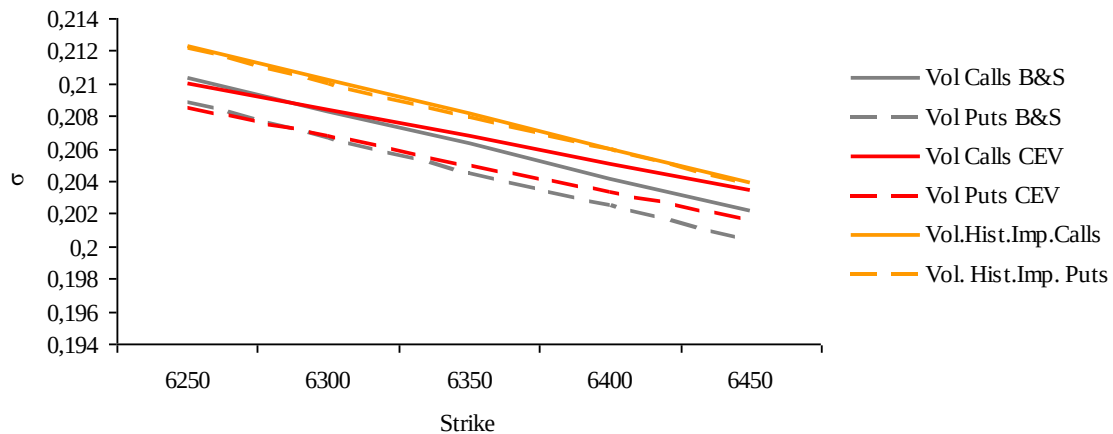


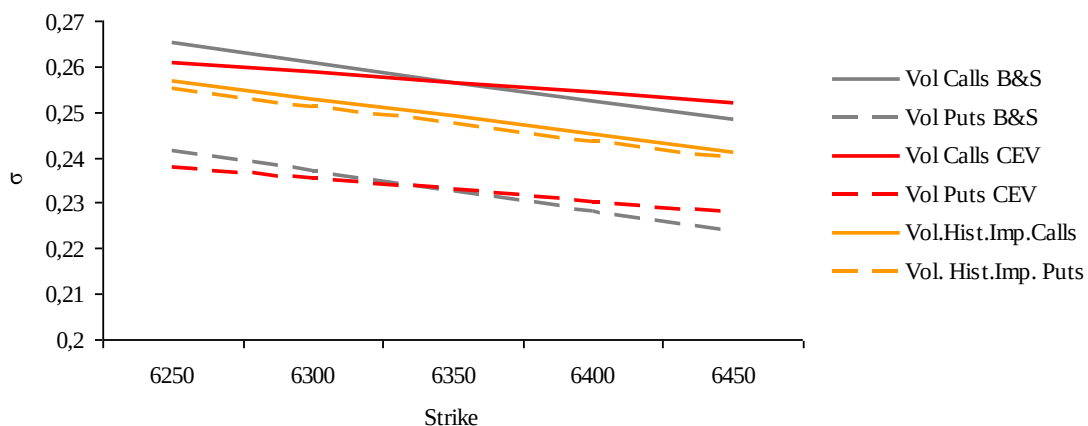
Fig.7: Comparativo do sorriso das *calls* e *puts* sobre o DAX – Junho 2010

Quando comparamos volatilidades de opções de compra e de venda com igual maturidade (fig.7), observamos que as volatilidades das *calls* são sistematicamente superiores às das *puts*. Mais se constata que as volatilidades apuradas pelos modelos se aproximam mais dos valores históricos registados nas opções de compra do que nas opções de venda. Nestas, os valores libertados pelos modelos diferem dos valores históricos.

Comparativo do sorriso das *calls* e *puts* sobre o DAX – Março 2011Fig.8: Comparativo do sorriso das *calls* e *puts* sobre o DAX – Março 2011

Nas opções *call* e *put* de maturidade próxima de um ano (fig.8), observamos uma sobreposição das volatilidades históricas.

Verifica-se ainda, uma aproximação dos valores das volatilidades devolvidas pelos modelos, entre as opções de compra e de venda. Nas opções de compra, as volatilidades provenientes do modelo CEV tendem a aproximar-se, mais do que as do modelo Black-Scholes, dos valores históricos a partir do momento em que as opções perdem *moneyness*. Este movimento também se verifica, no caso das opções de venda ainda que de forma menos acentuada.

Comparativo do sorriso das *calls* e *puts* sobre o DAX – Dezembro 2014Fig.9: Comparativo do sorriso das *calls* e *puts* sobre o DAX – Dezembro 2014

Nas opções de maturidades superiores, verifica-se uma grande proximidade entre as volatilidades históricas das *calls* e das *puts* (fig.9). As volatilidades devolvidas pelos modelos

para as opções de compra são consistentemente superiores aos valores históricos, sendo estes sistematicamente superiores às volatilidades das opções de venda.

Constata-se assim que o nível de *moneyness* influencia o padrão de volatilidade produzido pelos modelos Black-Scholes e CEV. Contrariamente aos pressupostos do modelo de Black-Scholes, verifica-se que a volatilidade das *calls* e *puts*, com a mesma data de vencimento e diferentes *strikes*, não é igual. O mesmo se observa quando limitamos a análise a um único *strike*.

4.2.4. Superfícies de Volatilidade

Analisaremos agora as superfícies de volatilidade obtidas a partir dos modelos de Black-Scholes e CEV para as opções *call* e *put*, bem como a volatilidade implícita histórica.

Segundo Alexander (2001), a superfície de volatilidade corresponde à expectativa do mercado acerca da volatilidade futura do preço do activo subjacente, obtida a partir da volatilidade implícita das opções *vanilla* para diferentes maturidades. As superfícies de volatilidade foram descritas, nomeadamente, por Das e Sundaram (1999), Rubinstein (1994) e Jackwerth e Rubinstein (1996).

Os gráficos seguintes representam a relação tridimensional entre volatilidades implícitas, preços de exercício e maturidades, comumente denominadas de superfície de volatilidade.

**Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX
(modelo Black-Scholes)**

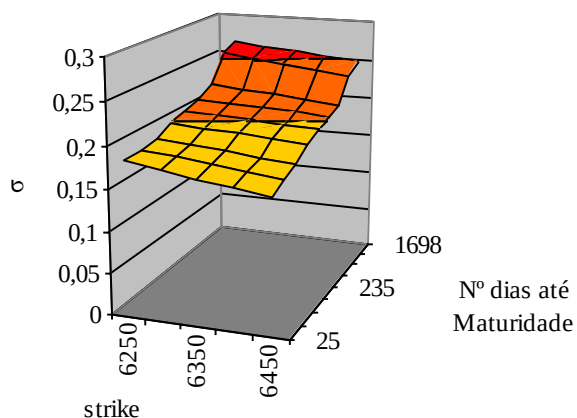


Fig.10: Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX (modelo Black-Scholes)

Na superfície de volatilidade das *calls* obtida via modelo de Black-Scholes (fig.10) observamos que à medida que a maturidade aumenta se verifica também um incremento da volatilidade implícita, especialmente pronunciado nas opções com 417, ou mais, dias até à expiração.

Verifica-se, ainda, tal como nas análises anteriores, que a volatilidade diminui à medida que as opções perdem *moneyness* independentemente da maturidade considerada.

Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX (modelo CEV)

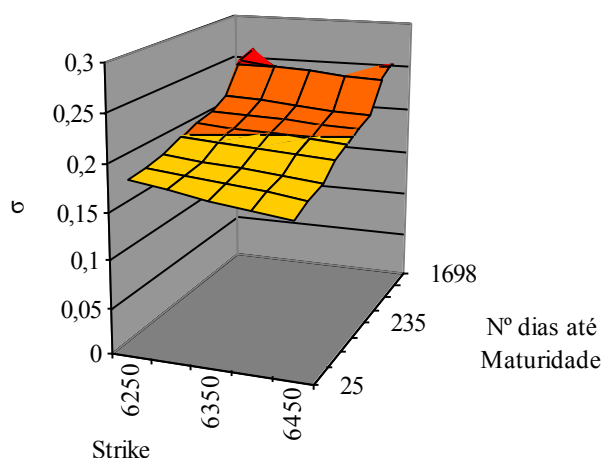


Fig.11: Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX (modelo CEV)

A superfície de volatilidade das opções de compra, obtida com a aplicação do modelo CEV (fig.11), apresenta uma forma gráfica distinta da obtida através do modelo Black-Scholes.

Observa-se que a volatilidade implícita das opções com maior maturidade e que se encontram muito *in-the-money* ou muito *out-of-the-money* é, no modelo CEV, superior à das restantes opções com a mesma maturidade. No conjunto das opções cujo *strike* é superior ao *spot* do DAX (6332,1 pts), destacam-se, com os mais elevados valores de volatilidade, as opções com maturidades mais elevadas. Para as opções com mais de 417 dias até à maturidade constata-se que, ao contrário do observado anteriormente, a volatilidade aumenta à medida que as opções perdem *moneyness*.

Já para as opções com maturidade inferior a 417 dias, observamos que a volatilidade diminui à medida que as opções perdem *moneyness*.

**Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX
(Volatilidade Histórica)**

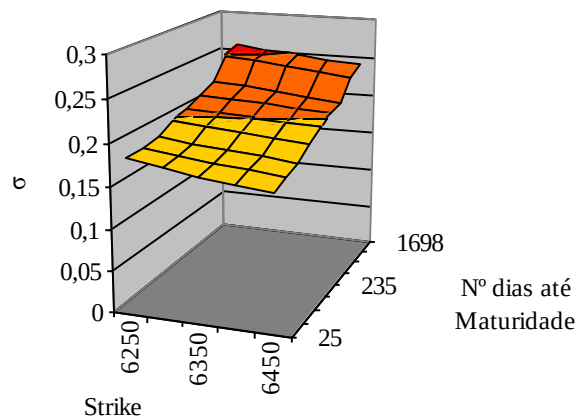


Fig.12: Superfície de volatilidade das *calls* sobre o DAX (Volatilidade Histórica)

A superfície de volatilidade histórica (fig.12) apresenta um padrão bastante semelhante à obtida via modelo de Black-Scholes. Também aqui, se verifica um aumento mais pronunciado da volatilidade nas opções com tempo de expiração superior ou igual a 417 dias, bem como uma diminuição da volatilidade à medida que o *strike* das opções se distânciia positivamente do *spot* do subjacente.

**Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX
(modelo Black-Scholes)**

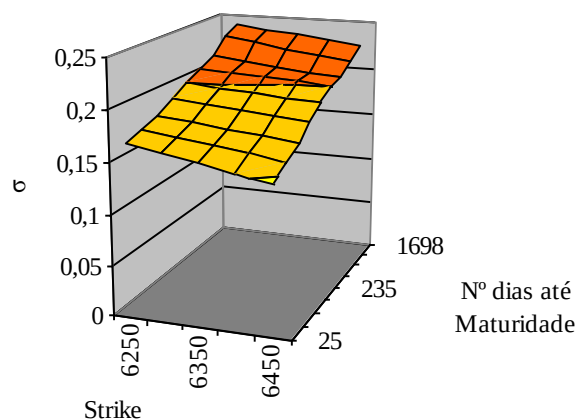


Fig.13: Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX (modelo Black-Scholes)

A superfície de volatilidade das opções *put* obtida pelo modelo Black-Scholes (fig.13) apresenta um comportamento semelhante à das *calls* para as menores maturidades. Para

opções com maturidade superior a 417 dias a volatilidade das *puts* resulta significativamente inferior à das *Calls*, o que seria de esperar face à menor liquidez das opções de venda, que é ampliada pelas elevadas maturidades.

Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX (modelo CEV)

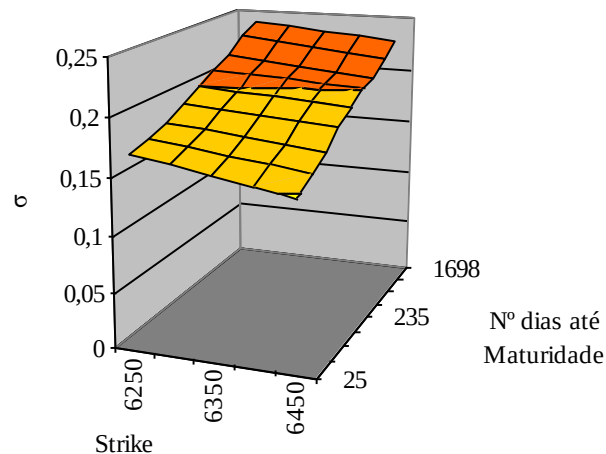


Fig.14: Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX (modelo CEV)

A superfície de volatilidade das opções de venda obtida via modelo CEV (fig.14) é praticamente idêntica à obtida no modelo de Black-Scholes resultado da reduzida liquidez do mercado de opções de venda e do facto de estarmos a trabalhar sobre opções com intervalo de *strikes* relativamente estreito. Também aqui se observa uma redução da volatilidade com a redução do nível de *moneyness* das opções.

Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX (Volatilidade Histórica)

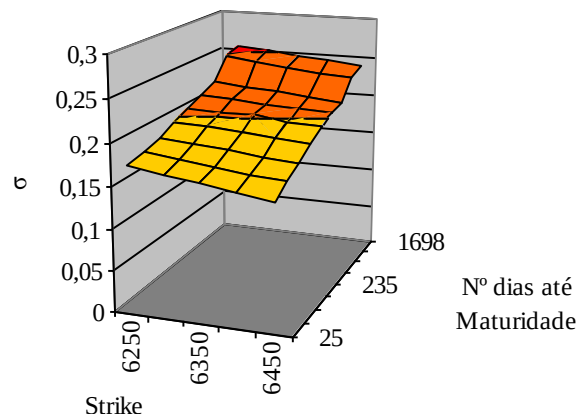


Fig.15: Superfície de volatilidade das *puts* sobre o DAX (Volatilidade Histórica)

As volatilidades históricas das opções de venda (fig.15) apresentam uma forma muito semelhante à das opções de compra. Quando comparadas com os valores do modelo CEV, as volatilidades históricas das opções com maturidade entre 417 e 1334 dias são superiores. Uma vez mais se constata que a perda de *moneyness* é acompanhada de diminuição de volatilidade.

5. Conclusões e Pistas de Investigação Futuras

De tudo quanto fica exposto na presente tese, importa agora, extrair as principais conclusões e apontar algumas pistas de investigação futuras.

A partir de um conjunto de opções europeias sobre o DAX para diferentes maturidades foi possível, recorrendo aos modelos de Black-Scholes e CEV, calcular as suas volatilidades implícitas e, de seguida, construir as respectivas superfícies de volatilidade.

Como vimos podem ser encontrados indícios da existência do efeito sorriso em Heynen et al. (1994), Taylor e Xu (1994), Duque e Paxon (1994), Gemmill (1996), Dumas et al. (1998), Viana (1998) e Duque e Viana (1999), entre outros. Em Portugal, identificámos alguns estudos que abordaram o efeito sorriso, como por exemplo Duque e Paxon (1994) e Duque e Viana (1999). Duque e Viana (1999) mostraram que, de acordo com a equação do desvio empírico do modelo de Black-Scholes desenvolvida por Hull e White (1988), a dimensão do efeito sorriso depende da volatilidade associada ao activo subjacente e do prazo de vencimento das opções. O efeito sorriso será mais intenso à medida que se aproxima o vencimento das opções, e menos intenso em situações de aumento da volatilidade.

Os resultados obtidos identificaram diferenças assinaláveis entre, por um lado, a volatilidade obtida via modelos de Black-Scholes e CEV e, por outro, entre estes e os valores históricos praticados pelo mercado. Apesar do reduzido número de observações de opções *out-of-the-money* na amostra, pode-se perceber que os modelos subestimam os seus prémios. Por outro lado, as opções *in-the-money* foram as que apresentaram menores diferenças entre os preços calculados pelos modelos e os preços históricos. Não foi possível, ainda, observar variações significativas no cálculo do prémio das opções pelo modelo.

Os resultados mostram ainda a existência de uma relação inversa entre a inclinação do sorriso e o tempo de vida das opções: para opções com datas de vencimento mais curtas, o efeito sorriso tornava-se mais acentuado. Estes resultados confirmam então as conclusões de Viana (1998) e Duque e Viana (1999), e o previsto pela equação do desvio empírico de Black-Scholes desenvolvida por Hull e White (1988).

Por fim, os resultados demonstram que o modelo de Black-Scholes apresenta enviesamentos sistemáticos no cálculo do prémio de opções, apesar de resultar em valores próximos e da sua fácil aplicabilidade, e que o conhecimento de tais enviesamentos é de fundamental importância para a avaliação de opções sobre o índice DAX.

Uma vez que o modelo de Black-Scholes é a “linguagem” de Mercado para a determinação dos preços das opções, a volatilidade local continua a ser a forma mais natural para obter as volatilidades futuras em função dos valores dos *portfolios* de diferentes opções, tal como as taxas *forward* são a via natural para replicar as curvas de taxas de juro futuras

Todos os modelos financeiros apresentam limitações sendo, frequentemente, válidos apenas durante curtos intervalos de tempo, enquanto os participantes no mercado não alteram o seu comportamento. Aristóteles, em *Nicomachean Ethics*, refere que na resolução de qualquer problema dever ser adoptado o grau de precisão adequado para o assunto em causa. Na teoria de opções tem havido uma tendência para violar este princípio utilizando métodos com um nível de precisão consideravelmente superior ao grau de fiabilidade do tema. Como na maioria das ciências sociais, a grande batalha na teoria de opções e na modelação do *smile* consiste em evitar utopias e procurar encontrar modelos cujos resultados dependam, tanto quanto possível, de pressupostos verificáveis na prática.

Mais de 20 anos após o *smile* se ter convertido numa questão na modelação em finanças, continua a não existir um consenso para a resposta à questão: se tivermos de proceder ao *hedging* de uma opção *vanilla* sobre o DAX, qual o *hedge ratio* que deveremos usar? Maior, menor ou igual ao dado pelo modelo de Black-Scholes? A resposta não é fácil nem exacta pois, independentemente de tudo o resto, estamos a assumir a possibilidade de poder proceder ao *hedging* de uma opção sobre o índice com o próprio índice; no caso de assumirmos a volatilidade como estocástica tal exigirá outros instrumentos para completar o *hedge*.

Acreditamos ter contribuído, com este estudo, para a melhoria do entendimento do fenómeno do “sorriso” bem como para o processo de escolha dos modelos de avaliação de opções que melhor se adaptem à realidade dos mercados accionistas, em que se registam elevados níveis de volatilidade.

Pistas de Investigação

Uma verificação experimental mais aprofundada, alargada a outros índices bem como a outros mercados, seria, sem dúvida, uma interessante área de investigação futura. Tal permitiria validar e extrapolar as conclusões e resultados a que chegámos.

Alargar o nosso trabalho aos modelos de volatilidade estocástica seria igualmente uma outra pista de investigação a considerar.

Resulta claro que se olharmos para a importância e interesse crescente, por parte dos agentes de mercado, encontrar a modelação “ideal” do *smile* é um campo altamente promissor.

Constitui nossa intenção, num futuro próximo, estender a nossa análise do efeito *smile* a um conjunto de opções sobre taxa de juro.

6. Bibliografia

- Alexander, C. (2001). Principles of the skew, *RISK* 14(1): S29–S32.
- Amin K. e Jarrow R. (1992), Pricing Options on Risky Assets in a Stochastic Interest Rate Economy, *Mathematical Finance* 2, 217-237.
- Bakshi G., Cao C. e Chen Z. (1997), Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models *Journal of Finance* 52, 2003-2049.
- Bakshi, G. e Z. Chen (1997), An Alternative Valuation Model for Contingent Claims, *Journal of Financial Economics*, 44, 123-165.
- Ball C. e Roma A. (1994), Stochastic Volatility Option Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 29, 589-607.
- Bates, D. (1991), The Crash of 87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets, *Journal of Finance*, 46, N. 3, July, 1009-1044.
- Bates, D. (1996), Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in PHLX Deutschemark Options. *Review of Financial Studies*, 9, 69-107.
- Beckers, S. (1980). The constant elasticity of variance model and its implications for option pricing, *Journal of Finance*, Vol.35, 661-673.
- Beckers S. (1981), Standard Deviations Implied in Option Prices as Predictors of Future Stock Price Variability, *Journal of Banking and Finance* 5, 363-382.
- Black, F. (1975), Fact and Fantasy in the Use of Options, *Financial Analysts Journal*, 31, 36-72.
- Black, F. e M. Scholes (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81, N. 3, May/June, 637-659.
- Bookstaber, R. (1991), *Option Pricing and Investment Strategies*, 3rd edition, Probus Publishing, Chicago.
- Christie, A.A., (1982), The stochastic behavior of common stock variances, *Journal of Financial Economics* 10, 407–432.
- Clewlow, L. e X. Xu (1992), A Review of Option Pricing with Stochastic Volatility, *Financial Options Research Centre Working Paper*, 92/35, Warwick University.
- Clewlow, L. e X. Xu (1993), The Dynamics of Stochastic Volatility, *Financial Options Research Centre Working Paper*, 94/53, Warwick University.
- Constantinides, G. M. (1997), Transaction Costs and The Volatility Implied by Options Prices, *Working Paper*, University of Chicago, Outubro.
- Corrado, C. e T. Su (1996), Skewness and Kurtosis in S&P 500 Index Returns Implied by Option Prices, *The Journal of Financial Research*, Vol. 19, N. 2, Summer, 175-192.
- COX, J. (1975), Notes on option pricing I: Constant elasticity of diffusions. Unpublished draft, Stanford University.
- Cox, J. (1996), The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model, *The Journal of Portfolio Management*, special edition, 15-17.

- Cox, John C. e Stephen A. Ross, 1976, A Survey of Some New Results in Financial Option Pricing Theory, *Journal of Finance* **31**, 383-402.
- Das, Sanjiv R., e Rangarajan K. Sundaram (1999), Of smiles and smirks: A term-structure perspective, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **34**, 211–239.
- Dennis P. e Mayhew S. (2001), Implied Volatility Skews: Evidence from Options on Individual Equities, *University of Virginia/ University of Georgia Working paper*.
- Derman E. (1999), Regimes of Volatility: Some Observations on the Variation of S&P 500 Implied Volatilities, *Goldman Sachs, Quantitative Strategies Research Notes*.
- Dumas, B., J. Fleming e R. Whaley (1998), Implied Volatility Functions: Empirical Tests, *Journal of Finance*, Vol. 53, N. 6, December, 2059-2106.
- Duque, J. e D. Paxson (1994), Implied Volatility and Dynamic Hedging, *The Review of Futures Markets*, 13, N. 2, pp. 381-421.
- Duque J. e Teixeira Lopes P. (1999), Maturity and volatility Effects on Smiles. Or Dying Smiling?, *EFA 1999 Working Paper*, Helsinki.
- Emanuel, D. C. e J. D. MacBeth (1982), Further Results on the Constant Elasticity of Variance Call Option Pricing Model, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 533-554.
- Gemmell, G. (1996), Did Option Traders Anticipate the Crash? Evidence from Volatility Smiles in the U. K. with U.S. Comparisons, *The Journal of Futures Markets*, 16, N. 8, 881-897.
- Gemmell, G. e N. Kamiyama (1997), International Transmission of Option Volatility and Skewness: When you're smiling, does the whole world smile?, *Proceedings of the 24th Annual Meeting of European Finance Association*, Vienna, 27-30 August.
- Geske, R. e R. Roll (1984), On Valuing American Call Options with the Black-Scholes European Formula, *Journal of Finance*, 39, N. 2, June, 443-455.
- Gkamas, Dimitrios e D. Paxson (1999), Which Stochastic Volatility Model for Option Pricing?, *Working Paper*, Manchester Business School.
- Grossman, S. e Z. Zhou (1996), Equilibrium Analysis of Portfolio Insurance, *Journal of Finance*, 51, n. 4, September, 1379-1403.
- Hafner R. e Wallmeier M. (2000), The Dynamics of DAX Implied Volatilities, *Working paper*, University of Augsburg.
- Heynen, R. (1994), An Empirical Investigation of Observed Smile Patterns, *The Review of Futures Markets*, 13, N. 2, 317-353.
- Heynen, A. Kemma e T. Vorst (1994), Analysis of The Term Structure of Implied Volatilities, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 29(1), 31-56.
- Hull, J. e A. White (1987), The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance*, Vol. 42, n. 2, June, 281-300.
- Hull, J. e A. White (1988), An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility, *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 3, 29-61.
- Hull J. e A. White (1999), The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities, *Journal of Finance* 42, 281-300.

- Jackwerth, J. C., & Rubinstein, M. (1996), Recovering probability distributions from option prices, *Journal of Finance*, 51, 1611–1631.
- Johnson H. e D. Shanno (1987), Option Pricing When Variance is Changing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, N. 2, June, 143-151.
- Macbeth, J. e L. MERVILLE (1979), An Empirical Examination of the Black-Scholes Call Option Pricing Model”, *Journal of Finance*, December, 1173-1186.
- MacBeth, J., e Merville, L. (1980), Tests of the Black-Scholes and Cox-Call Option Valuation Models, *Journal of Finance*, 285-301.
- Madan, Dilip B., Peter P. Carr e Eric C. Chan (1998), The Variance Gamma Process and Option Pricing, *European Finance Review*, Vol. 2, n. 1, 79-105.
- Mayhew S. (1995), Implied Volatility, *Financial Analysts Journal*, July-August, 8-20.
- Merton, R. (1976), Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.
- Peña I., Rubio G. e Serna G. (1997), Why Do We Smile? On the Determinants of the Implied Volatility Function, *Working Paper*, University Carlos III, October.
- Peña I., Rubio G. e Serna G. (1999) Why do we Smile? On The Determinants of the Implied Volatility Function, *Journal of Banking and Finance* 23, 1151-1179.
- Peña I., Rubio G. e Serna G. (2001), Smiles, Bid-Ask Spreads and Option Pricing, *European Financial Management*, forthcoming.
- Roll R. (1977), An Analytical Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends, *Journal of Financial Economics* 5, 251-258.
- Rubinstein M. (1985), Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978, *Journal of Finance* 40, 455-480.
- Rubinstein M. (1994), Implied Binomial Trees, *Journal of Finance* 49, 771-818.
- Schroder, M., (1989), Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula, *Journal of Finance*, 44, 211-219.
- Scott, L. (1987), Option Pricing When Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, N.4, December, 419-438.
- Stein, J. 1989, Overreactions in the options market, *Journal of Finance* 44, 1011-1024.
- Stein, E. e J. Stein (1991), Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *Review of Financial Studies*, 4, Winter, 727-752.
- Taylor, S. e X. Xu (1994), The Magnitude of Implied Volatility Smiles: Theory and Empirical Evidence for Exchange Rates, *The Review of Futures Markets*, 13 N. 2, 355-380.
- Viana, P., (1998), *O Efeito “sorriso” da volatilidade implícita de opções financeiras: estudo empírico aplicado a opções sobre ações da LIFFE*. Tese de Mestrado FEP, Faculdade de Economia do Porto.
- Wiggins, J. (1987), Option Values Under Stochastic Volatility: Theory and Empirical Estimates, *Journal of Financial Economics*, 19, 351-372.