

iscte

INSTITUTO
UNIVERSITÁRIO
DE LISBOA

U LISBOA

UNIVERSIDADE
DE LISBOA

Modelo Cópula-GARCH condicional para dependências não lineares entre os retornos de ativos

Beatriz Tomás de Castro

Mestrado em
Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor, Joaquim Paulo Viegas Ferreira de Carvalho, Professor Auxiliar
Convidado,
ISCTE-IUL

Outubro, 2023

Departamento de Finanças
Departamento de Matemática

Modelo Cópula-GARCH condicional para dependências não lineares entre os retornos de ativos

Beatriz Tomás de Castro

Mestrado em
Matemática Financeira

Orientador:
Professor Doutor, Joaquim Paulo Viegas Ferreira de Carvalho, Professor Auxiliar
Convidado,
ISCTE-IUL

Outubro, 2023

Para o meu avô

Agradecimento

O meu sincero agradecimento ao Professor Paulo Viegas de Carvalho, pela orientação, ajuda e disponibilidade que demonstrou durante o desenvolvimento desta dissertação.

Obrigada à minha mãe por sempre me dar força para alcançar os meus objetivos e por acreditar em mim. Obrigada à minha irmã por me ouvir e apoiar e ao meu cunhado que se juntou a nós nesta jornada. Obrigada à minha avó pelo apoio incondicional.

Sou grata ao João Borges por estar sempre ao meu lado e me ajudar ainda mais nesta fase.

Obrigada a todos os meus colegas e amigos da equipa de Risco de Mercado da Caixa Geral de Depósitos por toda a motivação e compreensão.

Agradeço à Dália e à Inês por nunca se esquecerem de mim e aceitarem todas as vezes em que adiei os nossos compromissos.

Quero expressar a minha gratidão aos meus amigos Miguel Marôco, Pedro Campina e Gonçalo Moreno, que tive o enorme gosto de conhecer na licenciatura e que desde aí seguem ao meu lado.

Obrigada à Michelle e ao Duarte, amigos que este mestrado me trouxe e que estão sempre prontos a ajudar.

Obrigada a todos os amigos da RURS que me mostraram que pode haver casa fora da nossa casa e sem os quais este caminho não teria sido tão agradável.

E, acima de tudo, obrigada ao meu avô, por ser sempre a minha força.

Resumo

As cópulas permitem capturar relações complexas e não lineares entre as variáveis, sendo por isso uma importante ferramenta para lidar com fenômenos financeiros. Desta forma, o modelo cópula-GARCH é uma abordagem que combina cópulas com o modelo GARCH para analisar a dependência e volatilidade em séries temporais financeiras. Este é um modelo mais preciso que os modelos tradicionais, nomeadamente para o cálculo do VaR uma vez que captura as relações entre as variáveis.

Neste estudo é feita uma análise deste modelo em cinco índices (FTSE 100, Nikkei, S&P 500, STOXX 600 e PHLX GOLD/SILVER), onde se inclui o cálculo do VaR. Desta forma, concluímos que a utilização da cópula t-student em conjunto com o modelo GARCH-t representa de forma precisa as complexas relações financeiras.

Palavras-chave: Funções cópula, Cópulas, Modelo GARCH, Modelo Cópula-GARCH

Classificação JEL:G14, G17

Abstract

Copulas make it possible to capture complex, non-linear relationships between variables and are an important tool for dealing with financial phenomena. Thus, the copula-GARCH model is an approach that combines copulas with the GARCH model to analyze dependence and volatility in financial time series. This is a more accurate model than traditional models, particularly for compute VaR, since it captures the relationships between variables.

This study analyzes this model on five indices (FTSE 100, Nikkei, S&P 500, STOXX 600 and PHLX GOLD/SILVER), including the calculation of VaR. We therefore conclude that the use of the t-student copula with the GARCH-t model accurately represents complex financial relationships.

Keywords: Copula functions, Copulas, GARCH Model, Copula-GARCH Model

JEL Classification: G14, G17

Índice

Agradecimento	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Figuras	xiii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. Revisão da Literatura	3
Capítulo 3. Definições e Metodologia	7
3.1. Modelos GARCH	7
3.1.1. Modelo GARCH	7
3.1.2. Modelo GJR-GARCH	7
3.1.3. Teste Durbin-Watson	8
3.1.4. Teste de Engle	8
3.1.5. Estimação de Parâmetros	8
3.2. Funções cópula	9
3.3. Famílias de Cópulas	10
3.3.1. Cópulas Elípticas	10
3.3.2. Cópulas Arquimedeanas	11
3.4. Função de máxima verossimilhança	12
3.5. Critério de Informação de Akaike e Critério de informação Bayesiano	13
3.5.1. Critério de Informação de Akaike	13
3.5.2. Critério de Informação Bayesiano	13
Capítulo 4. Dados e Análise	15
4.1. Dados	15
4.2. Análise	15
4.3. Modelos GARCH e GJR	19
4.3.1. Modelo GARCH-n	19
4.3.2. Modelo GARCH-t	21
4.3.3. Modelo GJR-n	23
4.3.4. Modelo GJR-t	25
4.4. Cópulas	27
4.4.1. Cópula Gaussiana	27
4.4.2. Cópula t-student	29
4.4.3. Cópula de Clayton	29

4.4.4. Cópula de Frank	30
4.4.5. Cópula de Gumbel	30
4.5. Previsão	31
4.6. VaR	35
Capítulo 5. Conclusões	37
Referências Bibliográficas	39
Anexo A : Representação gráfica dos retornos	41
Anexo B: Representação gráfica da relação entre as renbibilidades diárias	43
Anexo C: Autocorrelação - Modelo GARCH-n	47
Anexo D: Autocorrelação - Modelo GARCH-t	49
Anexo E: Autocorrelação - Modelo GJR-n	51
Anexo F: Autocorrelação - Modelo GJR-t	53

Lista de Tabelas

1	Dados estatísticos	19
2	Teste de Engle	19
3	Parâmetros do modelo GARCH-n	19
4	Estatísticas de Teste modelo GARCH-n	20
5	Teste Durbin-Watson - modelo GARCH-n	20
6	Teste de Engle - modelo GARCH-n	21
7	Parâmetros do modelo GARCH-t	22
8	Estatísticas de Teste modelo GARCH-t	22
9	Teste Durbin-Watson - modelo GARCH-t	22
10	Teste de Engle - modelo GARCH-t	23
11	Parâmetros do modelo GJR-n	24
12	Estatísticas de Teste modelo GARCH-t	24
13	Teste Durbin-Watson - modelo GJR-n	24
14	Teste de Engle - modelo GJR-n	25
15	Parâmetros do modelo GJR-t	25
16	Estatísticas de Teste modelo GJR-t	26
17	Teste Durbin-Watson - modelo GJR-t	26
18	Cópula Gaussiana	29
19	Cópula t-student	30
20	Cópula de Clayton	30
21	Cópula de Frank	30
22	Cópula de Gumbel	31
23	Erro Quadrático Médio	34
24	VaR do portfólio	35

Lista de Figuras

1	Famílias de Cópulas	10
1	Retorno diário FTSE 100	16
2	Retorno diário Nikkei 225	16
3	Retorno diário S&P500	17
4	Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do STOXX 600	17
5	Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e do Nikkei 225	18
6	Relação entre as rendibilidades diárias do Nikkei 225 e do PHLX GOLD/SILVER	18
7	Autocorrelação FTSE 100	20
8	Autocorrelação S&P500	21
9	Autocorrelação FTSE 100	22
10	Autocorrelação S&P500	23
11	Autocorrelação FTSE 100	24
12	Autocorrelação S&P500	25
13	Autocorrelação FTSE 100	26
14	Autocorrelação S&P500	27
15	Previsão vs Atual FTSE	31
16	Previsão vs Atual SP 500	32
17	Previsão vs Atual Nikkei	32
18	Previsão vs Atual STOXX 600	33
19	Previsão vs Atual Ouro e Prata	33
1	Retorno diário STOXX 600	41
2	Retorno diário PHLX GOLD/SILVER	41
3	Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do S&P 500	43
4	Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 do e Nikkei 225	44
5	Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do PHLX GOLD/SILVER	44
6	Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e do STOXX 600	45
7	Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e de PHLX GOLD/SILVER	45
8	Relação entre as rendibilidades diárias do Nikkei 225 e do STOXX 600	46
9	Relação entre as rendibilidades diárias do STOXX 600 e de PHLX GOLD/SILVER	46
10	Autocorrelação Nikkei 225	47

11	Autocorrelação STOXX 600	48
12	Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER	48
13	Autocorrelação Nikkei 225	49
14	Autocorrelação STOXX 600	50
15	Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER	50
16	Autocorrelação Nikkei 225	51
17	Autocorrelação STOXX 600	52
18	Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER	52
19	Autocorrelação Nikkei 225	53
20	Autocorrelação STOXX 600	54
21	Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER	54

CAPÍTULO 1

Introdução

O *Value at Risk* (VaR) é um método amplamente utilizado para estimar o risco em operações financeiras. Ele representa a maior perda esperada num determinado horizonte temporal, com base num dado nível de confiança.

Embora o VaR seja uma medida comum para quantificar o risco de mercado, quando aplicado a carteiras de ativos ele admite uma dependência linear entre os retornos dos ativos, o que muitas vezes não reflete a realidade. Adicionalmente, a distribuição dos retornos financeiros geralmente possui caudas mais pesadas do que a distribuição normal reflete, aumentando a probabilidade de eventos extremos.

Quando lidamos com variáveis aleatórias queremos entender como essas variáveis estão relacionadas entre si. As funções cópulas fornecem uma forma de modelar parametricamente essa relação, separando-a da especificação das distribuições marginais de cada variável.

Uma das particularidades que torna as cópulas especiais é a sua capacidade de capturar relações complexas e não lineares entre variáveis. Esta característica torna-as particularmente adequadas para lidar com fenômenos financeiros complexos, onde a dependência entre ativos pode variar sob diferentes condições de mercado.

A distribuição de probabilidade conjunta representa a probabilidade de duas ou mais variáveis aleatórias (X , Y , ...) caírem numa faixa específica ou num conjunto discreto de valores específicos. Quando lidamos com apenas duas variáveis, a distribuição é designada bivariada, quando temos um maior número de variáveis aleatórias, a distribuição é multivariada.

Com o objetivo de obter uma representação mais precisa da realidade, descrevemos a distribuição conjunta dos retornos de ativos, especificando as distribuições marginais e usando cópulas para modelar a relação entre esses retornos.

Uma das vantagens das cópulas é a capacidade de isolar a estrutura de dependência da estrutura da distribuição marginal. Isto significa que as cópulas podem ser aplicadas a qualquer distribuição marginal e podemos considerar marginais diferentes para cada retorno.

As cópulas têm várias formas, desde a Gaussiana, usada quando a dependência é aproximadamente linear, até às Arquimedianas, mais adequadas para modelar relações não lineares e distribuições com caudas pesadas.

O modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) é uma ferramenta essencial na modelação da volatilidade em séries temporais financeiras. Este modelo permite capturar a volatilidade condicional, reconhecendo que a volatilidade dos preços dos ativos pode variar ao longo do tempo.

O modelo é amplamente utilizado em finanças para prever a volatilidade futura dos ativos, uma informação crucial para a gestão de riscos e para a tomada de decisões de investimento.

O modelo cópula-GARCH combina as cópulas com o modelo GARCH, permitindo modelar simultaneamente a dependência e a volatilidade em séries temporais financeiras. Este

modelo é especialmente importante em finanças uma vez que ajuda a compreender melhor os riscos associados às carteiras e a tomar decisões de investimento mais informadas.

No entanto, é importante mencionar que apesar da sua utilidade, o modelo cópula-GARCH tem desafios. A sua principal limitação é a necessidade de haver dados históricos de qualidade, uma vez que este modelo depende da precisão das estimativas de dependência e volatilidade. Além disso, a complexidade computacional pode ser uma barreira em cenários onde se lida com grandes volumes de dados.

Resumindo, as cópulas e o modelo cópula-GARCH são ferramentas essenciais na modelação da dependência estatística e da volatilidade condicional em finanças. Desempenham um papel crucial na gestão de riscos, alocação de ativos e previsão de volatilidade em mercados financeiros complexos. À medida que os mercados evoluem, o modelo cópula-GARCH continua a ser uma abordagem valiosa para a análise de riscos e a gestão de portefólio num ambiente financeiro dinâmico.

Ao longo da sua história, a teoria das cópulas passou por uma notável evolução, tornando-se um instrumento essencial para modelar a dependência entre variáveis aleatórias em diversas áreas.

Reconhecendo a importância deste tema, a investigação nesta tese de mestrado tem como principal objetivo explorar uma abordagem alternativa aos modelos tradicionais. O modelo cópula-GARCH incorpora a não linearidade do retorno dos ativos e tem em conta a forma como as variáveis interagem entre si. Desta forma, serão analisados cinco índices de ações: FTSE 100, Nikkei 225, S&P500, STOXX 600, PHLX GOLD/ SILVER. Os cinco índices foram escolhidos tendo em conta a sua importância no mercado internacional e a sua diversificação.

Esta dissertação consiste numa aplicação específica dos modelos cópula-GARCH, para tal será necessário começar por aplicar os modelos GARCH aos retornos dos ativos para depois o modelar a uma cópula. No nosso estudo abordamos as cópulas Gaussiana, t-student, Clayton, Frank e de Gumbel calculando os seus parâmetros e indicadores como o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação Bayesiano que nos irão indicar qual o melhor modelo para o nosso estudo.

Durante este trabalho e tendo por base a análise de vários modelos GARCH, identificámos a cópula t-student com o modelo GARCH-t como a abordagem mais apropriada à nossa análise. Este resultado confirma as conclusões retiradas de estudos anteriores e o ênfase dado à cópula t-student nos modelos financeiros. Mostrando também que calcular o VaR por este método, em vez de optar por um método mais tradicional, conduz a valores mais precisos.

Para além desta secção, o estudo está organizado em cinco capítulos. No capítulo 2 é apresentada uma revisão da literatura e da evolução do estudo das cópulas. O capítulo 3 centra-se nos conceitos e metodologias utilizados no processo de calibração dos modelos GARCH e das cópulas. No capítulo 4 encontra-se a descrição dos dados e parâmetros estimados bem como os resultados obtidos neste processo. Por fim, o capítulo 5 conclui a dissertação, apresentando os resultados críticos e conclusões.

CAPÍTULO 2

Revisão da Literatura

O conceito de independência entre variáveis aleatórias tem sido fundamental na teoria de probabilidades. No entanto, tornou-se evidente a necessidade de uma forma mais geral para descrever e modelar a sua dependência.

Sklar (1959) introduziu o conceito de cópula, com o objetivo de responder a algumas questões levantadas por Fréchet (1951), sobre a relação entre a função de distribuição de probabilidade conjunta e a sua função de distribuição marginal, tal como nos explica Nelsen (2006).

O teorema de Sklar é o centro da teoria de cópulas, estabelecendo que qualquer distribuição conjunta multivariada pode ser expressa em termos das suas distribuições marginais e de uma função cópula. Desta forma, o teorema estabelece as cópulas como uma ferramenta poderosa para modelar dependências.

Segundo Palaro e Hotta (2006), o inverso do teorema de Sklar revela-se particularmente interessante para modelar distribuições multivariadas. Isto porque podemos vincular qualquer grupo de n distribuições univariadas, de qualquer tipo (não necessariamente da mesma família), com qualquer cópula, definindo assim uma distribuição multivariada válida.

Após a publicação do artigo de Sklar, poucos foram os desenvolvimentos realizados nesta área. Somente nos anos 80 é que a Teoria das Cópulas começou a ganhar um interesse mais significativo por parte dos investigadores, destacando-se o trabalho de Genest e Mackay (1986) onde são introduzidas as cópulas Arquimedianas.

Além disso, foi também notória a crescente relevância deste tema pela realização de diversas conferências internacionais tais como: conferência sobre distribuições com marginais dadas, realizada em Roma em 1990, a conferência sobre distribuições com marginais fixas, medidas duplamente estocásticas e operadores de Markov, em Seattle em 1993. A conferência sobre distribuições com marginais dadas e problemas de momento que se realizou em Praga em 1996, a conferência sobre distribuições com marginais dadas e modelagem estatística que ocorreu em 2000 em Barcelona e a conferência na modelação de dependência: teoria estatística e a sua aplicação em finanças e seguros, realizada no Québec em 2004.

Destas conferências resultaram diversas publicações, de entre as quais Ruschendorf et al. (1996) e Cuadras et al. (2002) que foram fundamentais para a disseminação do conhecimento sobre cópulas.

Nos anos seguintes realizaram-se diversos desenvolvimentos na Teoria das Cópulas cuja aplicação vai além das finanças, sendo de salientar a sua aplicação na engenharia e na medicina.

Na engenharia civil, os estudos realizados têm explorado como as cópulas podem ser usadas para modelar a dependência entre variáveis críticas, resultando em melhorias na avaliação de riscos e na tomada de decisões em projetos de grande porte. Além disso, esta teoria tem sido aplicada com sucesso na análise de falhas em sistemas de engenharia, permitindo

uma análise mais precisa da interdependência entre componentes e, conseqüentemente, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias de manutenção mais eficazes (Yan, 2023).

Na medicina, a Teoria das Cópulas tem sido adotada com êxito para analisar a dependência multivariada em dados clínicos, proporcionando *insights* valiosos que contribuem para o aprimoramento de diagnósticos e tratamentos. Adicionalmente, na cirurgia cardíaca, esta teoria tem sido aplicada para modelar a relação entre fatores de risco, o que tem resultado numa melhor compreensão dos resultados cirúrgicos e na melhoria das práticas clínicas (Winkelmann, 2012).

Para a área das finanças, e mais especificamente para a gestão de riscos financeiros, é importante modelar adequadamente a dependência entre os ativos de um portfólio, uma vez que as perdas podem ocorrer simultaneamente entre os ativos.

As cópulas são indispensáveis na gestão do risco devido à sua capacidade de modelar dependências complexas entre ativos e instrumentos financeiros. Estas permitem uma representação realista da forma como os diferentes ativos se correlacionam, permitindo optar por melhores estratégias de diversificação. Tal como nos revelam Lee et al. (2017), as cópulas são bastante úteis para fornecer informações sobre eventos extremos que os modelos tradicionais frequentemente ignoram.

Na modelação do risco de crédito, as cópulas são fundamentais, uma vez que permitem uma avaliação precisa do risco da carteira de crédito e a fixação do preço dos derivados de crédito. Além disso, ajudam na agregação do risco numa vasta gama de ativos, apoiam os testes de stress, melhoram as medidas de risco tradicionais, como o VaR, e são essenciais para avaliar o risco associado a produtos financeiros estruturados. De um modo geral, as cópulas permitem uma avaliação de risco mais exata e abrangente, essencial para a tomada de decisões informadas e para a estabilidade financeira.

De acordo com Fisher et al. (1997), as cópulas são de elevado interesse estatístico por duas razões: para estudar dependências entre variáveis e como ponto de partida para a construção de famílias de distribuição bivariadas.

Huang et al. (2009) combinaram as funções cópula com o *forecast* das funções do modelo GARCH, propondo assim um novo modelo, cópula-GARCH, para calcular o VaR de um portfólio. Após aplicarem o modelo cópula-GARCH condicional a um portfólio composto pelos índices de NASDAQ e TAIEX concluíram que, comparando com os métodos tradicionais, o modelo cópula-GARCH condicional apresenta melhores resultados, sendo a cópula t-student aquela com menor erro.

O modelo GARCH, abreviação de *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, é uma classe de modelos estatísticos usados para modelar a volatilidade condicional em séries temporais financeiras e económicas. Este modelo foi proposto inicialmente por Bollerslev (1986) como uma generalização do modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) desenvolvido por Engle (1982).

A criação deste modelo GARCH foi motivada pela necessidade de capturar a heteroscedasticidade condicional nos dados financeiros. Segundo Andersen et al. (2009), heteroscedasticidade condicional significa que a variância dos retornos não é constante ao longo do tempo, mas varia de acordo com informações passadas. Esta é uma característica comum em séries temporais financeiras, onde os períodos de alta volatilidade frequentemente são seguidos por períodos de baixa volatilidade, formando assim o que é chamado de "agrupamento de volatilidade".

Tradicionalmente a correlação é usada para descrever a dependência entre variáveis aleatórias, porém estudos têm comprovado a superioridade das cópulas para modelar a dependência, pois oferecem muito mais flexibilidade do que a obtida pela correlação tal como nos referem Embrechts et al. (2001).

Estudos recentes como o de Hong et al. (2022) exploraram a volatilidade dos preços à vista (*spot price*) e dos futuros de níquel. Estes autores escolheram um modelo GARCH apropriado à distribuição marginal dos rendimentos e usaram as funções cópula para encontrar a correlação, chegando à conclusão que o modelo cópula-GARCH descreve bem a correlação entre as variáveis em estudo.

Dada a diversidade de tipos de cópulas (cópula t-student, cópula Normal ou Gaussiana, cópulas Arquimedianas, entre outras), foram diversos os estudos realizados com o objetivo de apurar a cópula que melhor se ajusta a determinado objetivo ou ao tipo de dados que pretendemos trabalhar.

Um exemplo destes estudos foi realizado por Clemente e Romano (2021), onde descrevem alguns procedimentos para calibrar as funções cópula para os dados dos mercados financeiros. Esta é uma etapa importante para que a aplicação deste modelo seja bem sucedida. A calibração envolve a estimação dos parâmetros da cópula com base nos dados observados, o que permite capturar a estrutura de dependência subjacente entre os ativos. Os métodos e técnicas discutidos no estudo fornecem uma abordagem sólida e fundamentada para esta etapa. Além disso, o estudo aborda outro desafio importante: a seleção da cópula mais apropriada para os dados em questão. Num ambiente financeiro, a dependência entre ativos pode assumir diversas formas, desde linear até não linear, simétrica ou assimétrica, e com diferentes graus de caudas pesadas, sendo por isso de máxima importância a escolha da cópula adequada.

Por sua vez, Demarta e McNeil (2005) estudaram com mais detalhe a cópula t-student, tendo focado o seu estudo nas propriedades desta cópula e na dependência dos valores extremos. A cópula t-student é uma das cópulas mais utilizadas em finanças, especialmente quando os retornos têm caudas pesadas, ou seja, especialmente quando temos acontecimentos extremos ou raros que ocorrem com mais frequência do que seria de esperar numa distribuição normal ou gaussiana.

Num estudo realizado por Wang et al. (2011) foi usado o método cópula-GARCH condicional para estimar o VaR de um portfólio de ações da China. Os resultados mostram que o método cópula-GARCH condicional é mais preciso do que os métodos tradicionais de cálculo de VaR. Também McNeil e Wendin (2007) compararam vários métodos de cálculo de VaR para um portfólio de ações e mais uma vez os resultados demonstram que o método cópula-GARCH condicional é mais preciso do que outros métodos, como o método de simulação histórica (abordagem não paramétrica baseada na amostragem de dados históricos para calcular o VaR) e o método de Monte Carlo (abordagem paramétrica baseada na amostragem de uma distribuição, por exemplo, normal para calcular o VaR de um portfólio).

Aloui et al. (2013) estudaram a relação entre o preço do petróleo e as taxas de câmbio usando o modelo cópula-GARCH condicional. Neste artigo são usadas várias cópulas para encontrar o modelo e descrever esta dependência seja em momentos de crise ou em momentos mais prósperos para os mercados. Estes autores afirmam que existe uma dependência significativa e simétrica para todos os pares considerados, concluindo assim que o aumento do preço do petróleo está associado à desvalorização do USD. Mostram, também, que a cópula t-student é aquela que melhor descreve a dependência e aquela cuja previsão mais se adequa.

O uso de cópulas para modelar a dependência residual entre ativos tem aparecido em estudos recentes como é o caso de Jondeau e Rockinger (2006), Shams e Haghighi (2013). Os primeiros contribuíram significativamente para a compreensão da modelação de dependência entre ativos, demonstrando como as cópulas podem ser aplicadas com sucesso em várias configurações de portfólio e como é possível captar de forma mais precisa os eventos extremos nos mercados financeiros. Por sua vez, Shams e Haghighi exploraram o uso de cópulas em contextos de análise de risco, destacando a flexibilidade desses modelos para lidar com diferentes distribuições marginais.

Além disso, o trabalho de Lee et al. (2017) expandiu ainda mais o campo, explorando novas técnicas e abordagens para a modelação de dependência entre ativos usando cópulas, contribuindo assim para a evolução contínua da teoria e da prática na aplicação de cópulas em finanças.

As cópulas são frequentemente vinculadas à crise financeira de 2008. No entanto, o cerne da questão não reside na simples utilização de cópulas, mas sim na ausência de um modelo de cópula devidamente especificado, conforme destacado por Salmon (2009). Essa crise ressaltou a importância da correta calibração dos modelos, levando a um aumento significativo das fontes de informação disponíveis sobre o assunto. Um exemplo notável é o livro de Alexander (2008) que se dedica à análise de risco de mercado, apresentando os modelos GARCH e as cópulas como ferramentas essenciais para compreender este campo.

Anteriormente já Nelsen (2006) havia publicado um livro que oferece definições abrangentes, propriedades e métodos de construção de cópulas, juntamente com exercícios práticos.

Assim, hoje em dia é reconhecida a importância da Teoria de Cópulas e o trabalho nesta área é cada vez mais rico, tendo-se tornado uma ferramenta valiosa para modelar dependências entre ativos, fornecendo assim informações mais sofisticadas aos gestores de portfólios e analistas de risco. A pesquisa neste campo continua a evoluir, abrindo novas perspectivas e oportunidades para melhor compreender e gerir a complexa dinâmica dos mercados financeiros.

Neste sentido, este trabalho pretende reforçar a importância deste método através de uma análise concreta do modelo num contexto específico. Trata-se de uma abordagem que para além da discussão dos conceitos teóricos avalia a sua aplicabilidade na realidade dos mercados financeiros e, mais concretamente, a sua aplicabilidade aos cinco índices em estudo e a um portfólio composto pelos mesmos.

Definições e Metodologia

3.1. Modelos GARCH

3.1.1. Modelo GARCH

O modelo de GARCH é uma extensão do modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*).

O modelo ARCH tem em conta a variância condicional da série temporal. Contudo, não é capaz de capturar a presença de assimetria na volatilidade. O modelo GARCH, por sua vez, inclui a possibilidade de assimetria na volatilidade, permitindo que a magnitude dos choques positivos e negativos tenha efeitos diferentes na volatilidade.

O modelo é denominado *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* devido à generalização que Bollerslev's (1986) fez do modelo ARCH de Engle (1982), é autoregressivo uma vez que se trata de um modelo de séries temporais autoregressivas. A parte de heterocedasticidade condicional provem da variação da volatilidade ao longo do tempo.

DEFINIÇÃO 3.1 (Modelo GARCH). *Seja $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d), seja $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e $q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sejam $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0$, $\alpha_p > 0$, $\beta_1, \dots, \beta_{q-1} \geq 0$ e $\beta_q > 0$. Um modelo $GARCH(p, q)$ $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ com volatilidade $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ é a solução da equação:*

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (3.1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Geralmente, um modelo GARCH(1,1) é suficiente para capturar o *clustering* da volatilidade nos dados.

Para estimar os parâmetros do modelo é usado o método de máxima verosimilhança (*maximum likelihood, ML*), que tenta encontrar os valores dos parâmetros que maximizam a probabilidade de observar os dados reais sob o modelo GARCH. Este método é amplamente utilizado devido à sua robustez e eficácia na estimação dos parâmetros em séries temporais financeiras.

3.1.2. Modelo GJR-GARCH

O modelo GJR-GARCH (ou GARCH com componentes generalizadas) é uma extensão do modelo GARCH que inclui a capacidade de capturar assimetria não apenas na volatilidade, mas também nos choques positivos e negativos. Esta característica torna-o ainda mais adequado para modelar séries temporais financeiras, onde a volatilidade pode responder de maneira diferente a eventos positivos e negativos.

DEFINIÇÃO 3.2 (Modelo GJR). *Seja $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas (i.i.d). Seja $p \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ e $q \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. Sejam*

$\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0, \alpha_p > 0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1} \geq 0, \beta_q > 0, \gamma \geq 0$, onde γ é o parâmetro que captura a assimetria. Um modelo GJR-GARCH(p, q) $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ com volatilidade $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ é a solução das seguintes equações:

$$X_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \gamma X_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

O termo $\gamma X_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2$ na segunda equação é responsável por capturar a assimetria na volatilidade, uma vez que ele pondera os choques positivos e negativos de forma diferente. Isso permite que o modelo GJR-GARCH se ajuste melhor a situações onde os choques de preços positivos e negativos têm impactos diferentes na volatilidade.

Assim, como no modelo GARCH, a estimação dos parâmetros do modelo GJR-GARCH é geralmente realizada utilizando o método de máxima verossimilhança.

3.1.3. Teste Durbin-Watson

O Teste Durbin-Watson é utilizado principalmente para verificar a presença de autocorrelação dos resíduos de um modelo. Este teste gera uma estatística que varia entre 0 e 4. Um valor próximo de 2 sugere que não há autocorrelação serial significativa nos resíduos, ou seja, os resíduos são independentes ao longo do tempo. Valores menores que 2 indicam autocorrelação positiva, enquanto valores maiores que 2 indicam autocorrelação negativa. Quando a autocorrelação é significativa pode indicar que provavelmente o modelo não está a captar completamente a estrutura dos dados.

3.1.4. Teste de Engle

O Teste de Engle, também conhecido como teste ARCH-LM (ARCH- *Lagrange Multiplier*), é um teste estatístico usado para verificar a presença de heterocedasticidade condicional em séries temporais financeiras. Esse teste é frequentemente aplicado para determinar se um modelo GARCH ou GJR-GARCH é apropriado para modelar a volatilidade dos dados.

O teste consiste em ajustar um modelo de regressão linear aos resíduos ao quadrado da série e testar a significância das variáveis desfasadas nessa regressão. Se o valor for significativo, indica que a volatilidade é condicional e depende dos valores passados da série. Ou seja, sugere a presença de heterocedasticidade condicional, o que justificaria o uso de um modelo GJR-GARCH.

Ambos os testes, Durbin-Watson e Engle, são ferramentas úteis na análise e diagnóstico de modelos, ajudando a identificar potenciais problemas, como a autocorrelação nos resíduos ou a necessidade de considerar a heterocedasticidade condicional. Desempenhando assim um papel fundamental na seleção e validação do modelo adequado para a modelação de séries temporais financeiras.

3.1.5. Estimação de Parâmetros

Os modelos GARCH são frequentemente usados numa base diária uma vez que o efeito de agrupamento de volatilidade desaparece quando os retornos são calculados sobre grandes períodos.

Os parâmetros do modelo GARCH são estimados através da maximização do valor da *log likelihood function (LLF)*, ou seja, resolvendo o seguinte problema:

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\ln(\sigma_t)^2 + \left(\frac{\epsilon_t}{\sigma_t} \right)^2 \right) \quad (3.5)$$

onde θ é o parâmetro da equação da variância condicional.

3.2. Funções cópula

As funções cópula são aplicadas às finanças com o objetivo de determinar a dependência do retorno de ativos num portefólio.

Uma cópula n -dimensional é uma função de distribuição conjunta C , com distribuição marginal uniforme.

DEFINIÇÃO 3.3 (Cópula). *Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias com distribuição marginal contínua $F_1, \dots, F_n$. Uma cópula é uma função monótona crescente que satisfaz as seguintes condições:*

- (1) $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$;
- (2) $C(0, u_2, \dots) = \dots = C(u_1, \dots, 0) = 0$;
- (3) $C(u_1, 1, \dots, 1) = u_1, \dots, C(1, \dots, 1, u_n) = u_n$;

A condição 2 diz-nos que a cópula é igual a zero se qualquer um dos argumentos é zero. Enquanto a condição 3 significa que a cópula é igual a u_i se todos os outros elementos são iguais a um.

De uma forma mais simplificada, podemos também, definir cópula a duas dimensões:

DEFINIÇÃO 3.4 (Cópula 2-dimensional). *Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias com distribuição marginal contínua F_1, F_2 . Uma cópula é uma função monótona crescente que satisfaz as seguintes condições:*

- (1) $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$;
- (2) $C(0, u_2) = C(u_1, 0) = 0$;
- (3) $C(u_1, 1) = u_1$ e $C(1, u_2) = u_2$;
- (4) $C(v_1, v_2) - C(u_1, v_2) \geq C(u_1, v_2) - C(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1] \text{ onde } u_1 \leq v_1 \text{ e } u_2 \leq v_2$;

TEOREMA 3.1 (Teorema de Sklar). *Se tivermos um conjunto de distribuições marginais contínuas e escolhermos cópulas distintas, estas irão definir densidades conjuntas distintas.*

Dada uma qualquer função de distribuição $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com marginais contínuos $F_1, F_2, \dots, F_n$, temos uma única cópula C tal que:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.6)$$

Caso exista, a densidade da cópula é dada por:

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \quad (3.7)$$

Analogamente podemos escrever a densidade da cópula como:

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \quad (3.8)$$

onde $u_i = F_i(x_i)$

3.3. Famílias de Cóopulas

As cóopulas estão divididas em diversas famílias (Fig. 1). Neste trabalho, daremos mais realce às cóopulas elípticas e às cóopulas arquimedeanas.

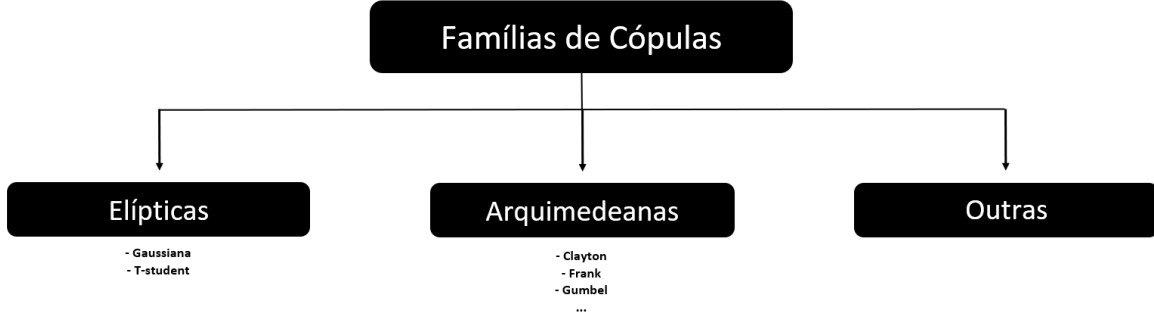


FIGURA 1. Famílias de Cóopulas

3.3.1. Cóopulas Elípticas

As distribuições elípticas têm algumas características em comum com a distribuição normal. As cóopulas elípticas resultam diretamente do Teorema de Sklar onde C é uma distribuição elíptica.

DEFINIÇÃO 3.5 (Distribuição elíptica). *Considere um vetor aleatório $\mathbf{X}$, n -dimensional, um vetor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $\Sigma, n \times n$ não definida negativa e simétrica. Se a função característica de $\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$, $\Psi_{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}(\mathbf{t})$, é uma função ϕ , de forma quadrática $\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t}$, $\Psi_{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}(t) = \phi(\mathbf{t}^T \Sigma \mathbf{t})$, então $\mathbf{X}$ tem uma distribuição elíptica com parâmetro μ, σ e ϕ , $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \sigma, \phi)$.*

A função ϕ é designada por gerador característico da distribuição elíptica.

Se $\mathbf{X}$ tem uma distribuição elíptica e Σ é uma matriz diagonal então as componentes de $\mathbf{X}$ são não correlacionadas. Se as componentes de $\mathbf{X}$ forem independentes então $\mathbf{X}$ tem uma distribuição normal multivariada.

3.3.1.1. Cóopula Gaussiana ou Cóopula Normal

Uma cóopula Gaussiana ou cóopula normal é a derivada de uma função de distribuição normal n -dimensional (Φ) e unidimensional (Φ), definida por:

$$C(u_1, \dots, u_n; \Sigma) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (3.9)$$

Derivando a equação (3.9) obtemos a densidade da cóopula Guassiana:

$$c(u_1, \dots, u_n; \Sigma) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\xi}^T (\Sigma^{-1} - \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi}\right) \quad (3.10)$$

onde Σ é a matriz de correlação e $|\Sigma|$ é o seu determinante. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ onde ξ_i é o quantil da variável aleatória X_i , ou seja,

$$u_i = P(X_i < \xi_i), \quad X_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

As cópulas Gaussianas são cópulas simétricas, ou seja, $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$, têm dependência da caudas próxima de 0 (caso haja independência) ou 1 no caso de a correlação ser 1.

Assim, este tipo de cópulas não é o mais apropriado para estudar dependências entre as rendibilidades de ativos financeiros. Quando o preço de duas ações cai a sua dependência é maior do que quando estes sobem, o que significa que a dependência da cauda é assimétrica para o retorno dos ativos, o que não se reflete numa cópula normal.

3.3.1.2. Cópula t-student

A Cópula t-student é obtida através da função de distribuição multivariada.

Definimos esta cópula da seguinte forma:

$$C_v(u_1, \dots, u_n : \Sigma) = \mathbf{t}_v(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (3.12)$$

onde $\mathbf{t}_v$ e t_v são funções distribuição t Student n-dimensional e unidimensional com v graus de liberdade e Σ é a matriz de correlação.

Da definição de função densidade t Student n-dimensional obtemos:

$$f(\mathbf{x}) = k |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + v^{-1} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right)^{-\frac{v+n}{2}} \quad (3.13)$$

onde $|\Sigma|$ é o determinante da matriz de correlação e

$$k = \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) (v\pi)^{-\frac{n}{2}} \quad (3.14)$$

3.3.2. Cópulas Arquimedeanas

As Cópulas Arquimedeanas são amplamente usadas nas finanças pois, além de poderem ser expressas de forma explícita, permitem uma grande variedade de estruturas de dependência.

Uma Cópula Arquimedeanas tem a seguinte forma:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi^{-1}(\Phi(u_1) + \dots + \Phi(u_d)) \quad (3.15)$$

onde Φ é a função geradora da cópula que satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) Φ é contínua, estritamente decrescente e convexa;
- (2) $\Phi(0) = \infty$;
- (3) $\Phi(1) = 0$

3.3.2.1. Cópula de Clayton

A Cópula de Clayton com gerador $\frac{(t^{-\theta}-1)}{\theta}$, $\theta > 0$, é definida da seguinte forma:

$$C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (3.16)$$

Para $\theta = 0$, definimos a cópula de clayton como o limite:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = u_1 \dots u_d \quad (3.17)$$

que representa a cópula independente.

3.3.2.2. Cópula Frank

A Cópula de Frank tem como gerador

$$\Phi^{Fr}(u) = -\log\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \quad -\infty < \theta < \infty \quad (3.18)$$

Desta forma, o inverso do gerador é:

$$(\Phi^{Fr})^{-1}(y) = -\frac{\log(e^{-y}(e^{-\theta} - 1) + 1)}{\theta} \quad (3.19)$$

Assim, para a cópula de Frank bivariada temos:

$$C^{Fr}(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) \quad (3.20)$$

3.3.2.3. Cópula Gumbel

A Cópula de Gumbel tem como gerador $-\log(t)^\theta$, onde $\theta \geq 1$ cuja representação é:

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp\left[-((\log u_1)^\theta + \dots + (\log u_d)^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\right] \quad (3.21)$$

Esta cópula diz-se independente se $\theta = 1$

3.4. Função de máxima verossimilhança

A função de máxima verossimilhança é usada para estimar os parâmetros das cópulas.

Suponhamos que a densidade conjunta é dada por $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n) c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$. Para simplificar podemos assumir que cada marginal tem apenas um parâmetro α_i , no entanto, é possível generalizar para o caso em que cada marginal tem um vetor de parâmetros. Desta forma, escrevemos a densidade marginal e a sua distribuição como $f_i(x_i; \alpha_i)$ e $F_i(x_i; \alpha_i)$.

Assim, podemos escrever a densidade conjunta como:

$$f(x_1, \dots, x_n; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}) = c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_n(x_n, \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^n f_i(x_i; \alpha_i) \quad (3.22)$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é o vetor dos parâmetros do marginal e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor dos parâmetros da cópula.

Da equação (3.22), obtemos o logaritmo da função de verossimilhança (*log-likelihood function* - *LLF*):

$$\ln L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \left(\ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}, \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^n \ln f_i(x_{it}; \alpha_i) \right) \quad (3.23)$$

onde $\mathbf{x}_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt})$ é o vetor de observações.

Podemos ainda simplificar a equação (3.23):

$$\ln L(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}, \alpha_n); \boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i) \quad (3.24)$$

Desta forma, podemos verificar que é possível maximizar o logaritmo da função de verossimilhança em dois passos:

- (1) Calcular os parâmetros para cada densidade marginal, individualmente usando MLE, ou seja, encontrar cada $\hat{\alpha}_i$ no vetor de máxima verossimilhança resolvendo:

$$\max_{\alpha_i} \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha)_n, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

- (2) Calcular os parâmetros da cópula resolvendo:

$$\max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_n(x_{nt}; \hat{\alpha}_n); \theta) \quad (3.26)$$

3.5. Critério de Informação de Akaike e Critério de informação Bayesiano

Para determinar qual a cópula que melhor se adequa aos dados que pretendemos estudar podemos comparar os valores que obtemos da otimização da função de verossimilhança, no entanto quantos mais parâmetros tiver a cópula mais difícil será este processo. Desta forma existem dois critérios relevantes: Critério de Informação de Akaike (AIC) e Critério de Informação Bayesiano (BIC).

A cópula que melhor se adequa será aquela que tiver menor AIC ou BIC.

3.5.1. Critério de Informação de Akaike

O AIC é definido por:

$$AIC = 2k - 2 \ln L \quad (3.27)$$

onde L é o valor da função de máxima verossimilhança otimizado e k é o número de parâmetros que temos de estimar.

3.5.2. Critério de Informação Bayesiano

O BIC é definido por:

$$BIC = T^{-1}(k \ln T - 2 \ln L) \quad (3.28)$$

onde T é o número de dados.

CAPÍTULO 4

Dados e Análise

Neste capítulo serão apresentadas as descrições dos dados bem como algumas estatísticas descritivas. Todas as análises serão acompanhadas de tabelas para uma melhor análise.

Os resultados foram obtidos em *python*, tendo sido maioritariamente usada a biblioteca *copulae*. Esta biblioteca oferece uma ampla quantidade de funções essenciais para as análises que se seguem.

4.1. Dados

Nesta dissertação serão usados dados diários extraídos do site yahoo finance relativos aos índices: S&P500, FTSE 100, EURO STOXX 600, Nikkei 225 e PHLX GOLD/ SILVER.

O índice FTSE 100 é calculado pela *FTSE The Index Company*. Este índice tem em conta 100 ações representativas da Bolsa de Valores de Londres e deteta movimentos de alta ou baixa cotação. A Bolsa de Valores de Londres é uma das mais antigas e famosas bolsas do mundo, por isso a escolha deste índice.

Nikkei 225, ou mais comumente, Nikkei, é o índice do mercado de ações da Bolsa de Valores de Tóquio. Sendo apurado diariamente é um índice calculado por preços e não por capitalização, estando refletido em ienes. Este índice revela o desempenho de 225 empresas no Japão que operam em diversos setores da indústria.

O S&P500 (abreviatura de *Standard & Poor's 500*) é um índice que mede o desempenho das 500 maiores empresas americanas. Este é um índice amplo que engloba setores como a tecnologia de informação, saúde, grandes empresas do setor financeiro, energético e de bens de consumo duráveis. Trata-se de um dos indicadores mais antigos e confiáveis de como estão as empresas dos EUA.

STOXX 600 trata-se de um índice da Bolsa de Valores que compreende cerca de 600 empresas de 18 países europeus. Este índice é um dos mais importantes a cobrir os países europeus contemplando diversos setores de atividade como a banca, petróleo ou até companhias áreas.

O PHLX GOLD/ SILVER é o índice para o ouro e prata da Filadélfia. Este índice tem em conta 30 empresas mineiras de metais preciosos que transacionam na Bolsa de Valores, sendo dos mais importantes índices de ouro no mercado.

Os dados foram extraídos para o período de 16/09/2005 até 30/12/2022.

Desta forma ficamos com uma amostra com 3,934 observações para cada índice.

4.2. Análise

Com os índices diários é possível definir os retornos diários para cada índice.

Definimos retorno como:

$$x_t = 100 \times \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (4.1)$$

onde P_t é o valor do índice no momento t .

Nas Figuras 1 a 3 podemos analisar o retorno das variáveis FTSE 100, Nikkei 225 e S&P500, estando as restantes disponíveis no Anexo A. Nestas figuras observamos o fenómeno conhecido como agrupamento de volatilidade, o que significa que grandes mudanças tendem a ser seguidas por grandes mudanças e pequenas mudanças tendem a ser seguidas por pequenas mudanças.

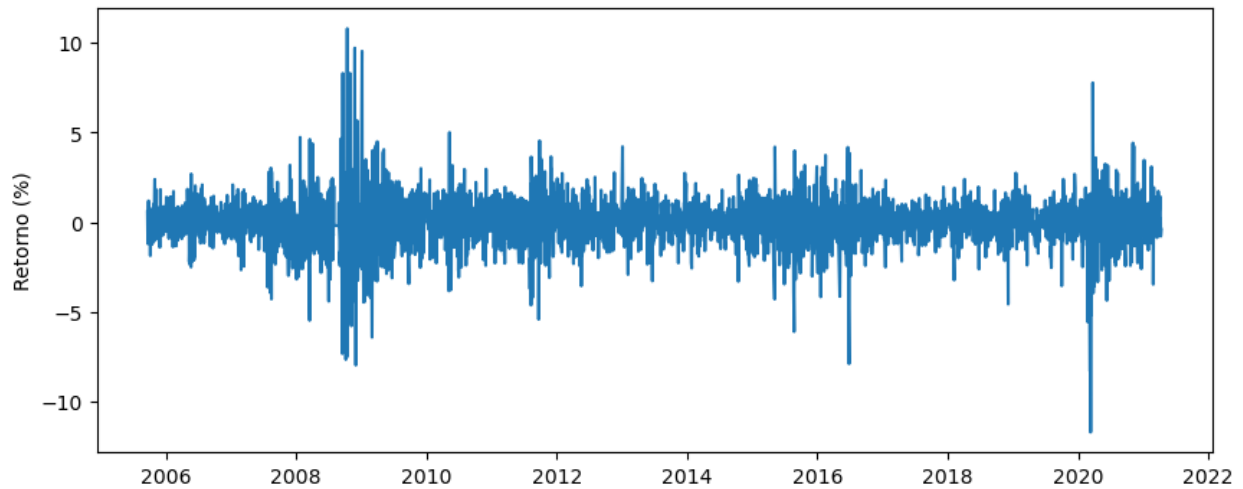


FIGURA 1. Retorno diário FTSE 100



FIGURA 2. Retorno diário Nikkei 225

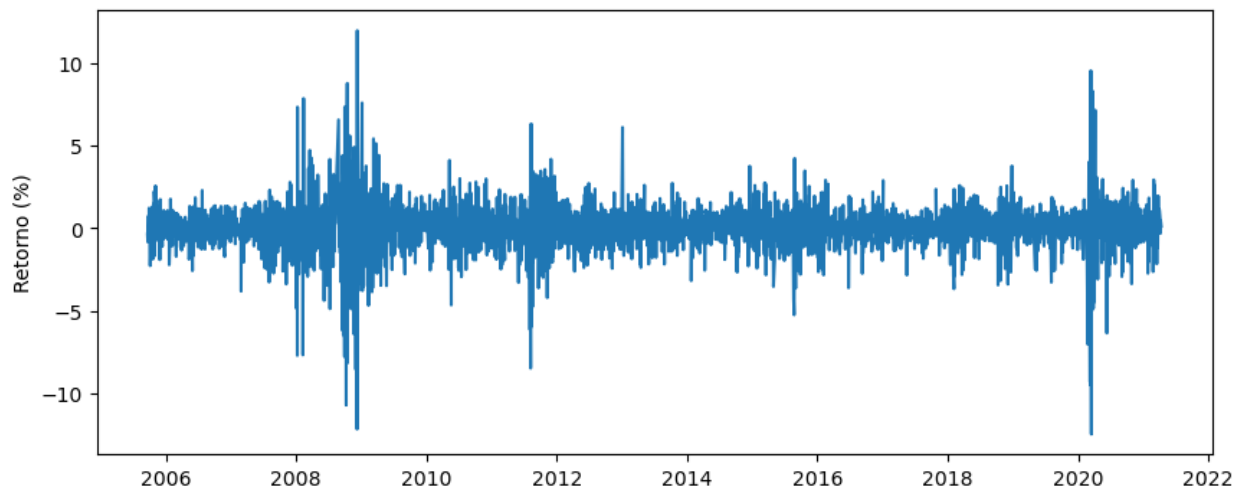


FIGURA 3. Retorno diário S&P500

É também importante analisar a relação entre os retornos dos índices em estudo, salientamos abaixo algumas delas. As restantes representações gráficas desta relação podem ser encontradas no Anexo B.

A Figura 4 é a única que apresenta uma relação mais próxima da linear uma vez que se trata da relação entre FTSE 100 e STOXX 600. Como vimos, o índice FTSE 100 tem em conta ações representativas da Bolsa de Valores de Londres enquanto o índice STOXX 600 trata-se do índice da Bolsa de Valores de países europeus. Desta forma, estes índices podem conter algumas empresas em comum, por exemplo, se uma empresa do Reino Unido tiver uma presença significativa noutros países europeus e atender aos critérios de inclusão no STOXX 600. Portanto, pode haver alguma sobreposição entre as empresas destes dois índices, mas essa sobreposição não é necessariamente grande, já que o foco geográfico principal de cada índice é diferente.

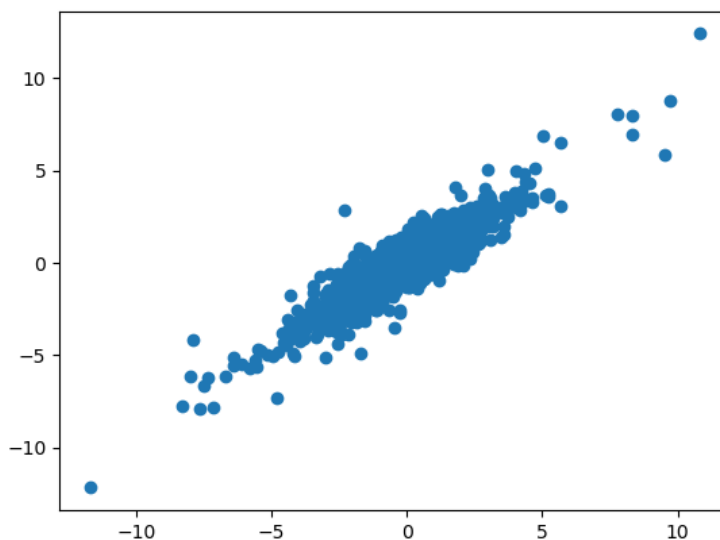


FIGURA 4. Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do STOXX 600

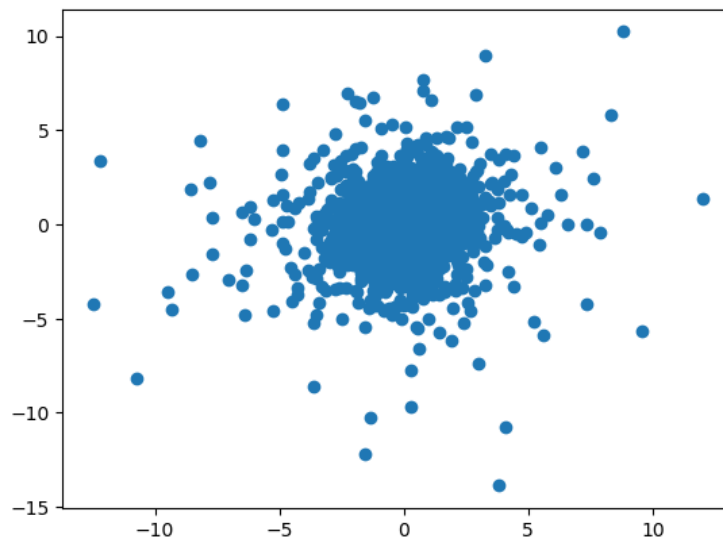


FIGURA 5. Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e do Nikkei 225

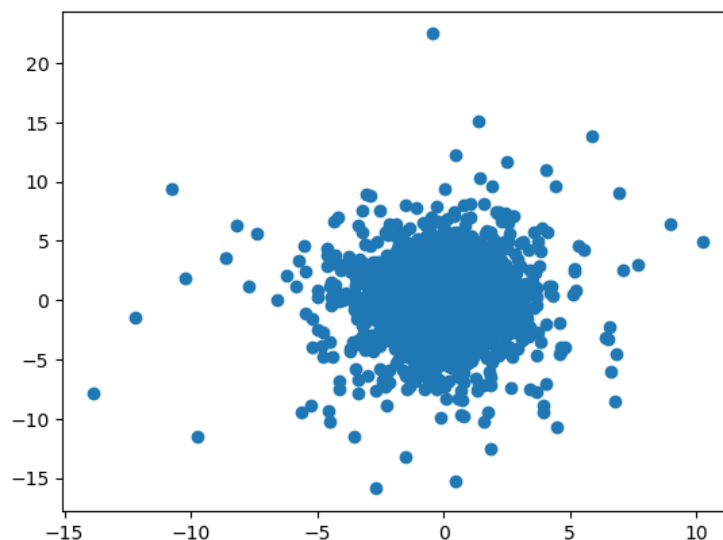


FIGURA 6. Relação entre as rendibilidades diárias do Nikkei 225 e do PHLX GOLD/SILVER

Na Tabela 1 estão alguns dados estatísticos, tais como a média, *skewness* ou simetria e *kurtosis*.

Através da *skewness* verificamos que todas as distribuições tem uma cauda esquerda (valores abaixo da média) mais pesada e, dado que a *kurtosis* é sempre positiva, as distribuições são mais afuniladas e mais concentradas que a distribuição normal. Dizemos, então, que se tratam de funções de probabilidade leptocúrticas.

A Tabela 2 apresenta o teste Engle ARCH. Este teste indica que as cinco variáveis em estudo têm efeito ARCH pois o seu *p-value* é menor que 0.05

TABELA 1. Dados estatísticos

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Observações	3 934	3 934	3 934	3 934	3 934
Média	0.0014	0.0323	0.0168	0.0094	0.0058
Desvio padrão	1.3488	1.4318	1.5027	1.2687	2.6276
Skewness	-0.2768	-0.5266	-0.5631	-0.3257	0.0155
Kurtosis	7.9807	10.6594	7.6718	9.6683	3.8339

TABELA 2. Teste de Engle

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Teste de Engle	Q-statistic	p-value	Q-statistic	p-value	Q-statistic	p-value	Q-statistic	p-value	Q-statistic	p-value
LM(4)	584.9445	0.0000	871.7287	0.0000	589.1199	0.0000	557.5735	0.0000	397.4511	0.0000
LM(8)	666.2284	0.0000	1014.3135	0.0000	642.6820	0.0000	647.9034	0.0000	576.6795	0.0000
LM(10)	730.2777	0.0000	1035.8904	0.0000	728.1379	0.0000	703.0676	0.0000	614.1422	0.0000

De seguida, dividimos os dados em conjunto de treino e conjunto de teste, ficando o primeiro com os dados até 09/04/2021, contemplando assim 3 541 observações enquanto o conjunto de teste vai de 21/04/2021 até 30/12/2022, com as restantes 393 observações.

A partir deste momento os dados apresentados referem-se apenas ao conjunto de treino.

Iremos então considerar o modelo GARCH e o modelo GJR. Para tal, ajustamos estes modelos ao retorno das séries em análise com a distribuição normal e com a distribuição t-student.

4.3. Modelos GARCH e GJR

4.3.1. Modelo GARCH-n

Na Tabela 3 podemos ver os parâmetros para o modelo GARCH com distribuição normal (GARCH-n). Por sua vez, na Tabela 4 temos os valores para LLF, AIC e BIC.

TABELA 3. Parâmetros do modelo GARCH-n

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Parâmetros	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão
μ	0.0346	0.0174	0.0582	0.0174	0.0486	0.0207	0.0533	0.0158	0.0031	0.0368
ω	0.0291	0.0124	0.0434	0.0163	0.0580	0.0184	0.0268	0.0078	0.0810	0.0261
α	0.0940	0.0220	0.0996	0.0222	0.1233	0.0232	0.1059	0.0177	0.0586	0.0078
β	0.8897	0.0273	0.8731	0.0298	0.8541	0.0262	0.8768	0.0202	0.9295	0.0095

TABELA 4. Estatísticas de Teste modelo GARCH-n

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
LLF	-5505.71	-5468.62	-5984.51	-5160.92	-8121.86
AIC	11 019.40	10 945.20	11 977.00	10 329.80	16 251.70
BIC	11 044.10	10 969.90	12 001.70	10 354.50	16 276.40

A Tabela 5 contém os valores referentes ao teste Durbin-Watson. Dado que os valores são todos próximos de 2, aceitamos a hipótese nula de que não existe autocorrelação de primeira ordem.

TABELA 5. Teste Durbin-Watson - modelo GARCH-n

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Estatística (d)	2.0565	2.4398	2.3675	2.0350	2.1430

Tal como vimos anteriormente, as Figuras 7 e 8 reforçam a ideia de que não existe autocorrelação, bem como as figuras no anexo "Autocorrelação - Modelo GARCH-n".

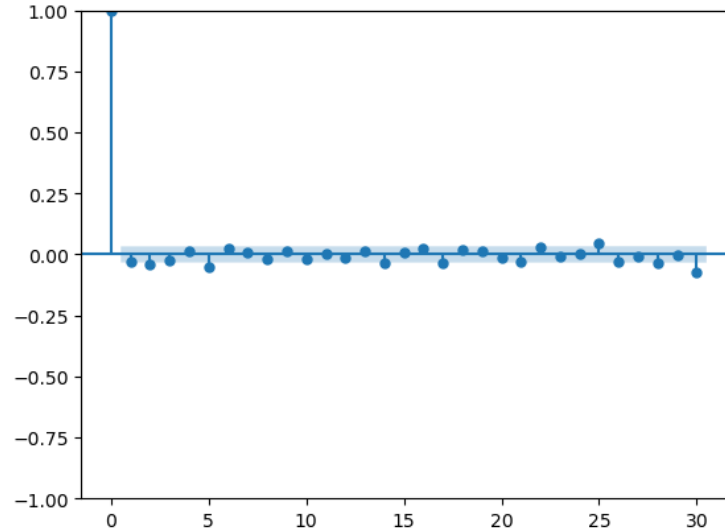


FIGURA 7. Autocorrelação FTSE 100

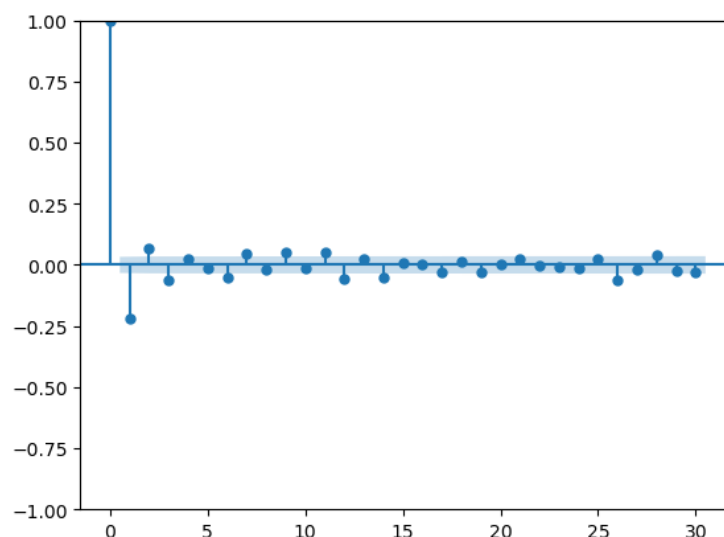


FIGURA 8. Autocorrelação S&P500

O teste de Engle encontra-se refletido na Tabela 6. Dado que todos os p-values são zero, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que o efeito ARCH está a ser capturado.

TABELA 6. Teste de Engle - modelo GARCH-n

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Teste de Engle	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q
LM(4)	0.0000	536.5732	0.0000	805.0833	0.0000	534.6408	0.0000	514.7158	0.0000	372.6520
LM(8)	0.0000	609.0775	0.0000	938.8165	0.0000	583.7344	0.0000	594.9229	0.0000	541.9420
LM(10)	0.0000	668.3878	0.0000	957.3770	0.0000	660.6166	0.0000	647.2969	0.0000	577.8023

4.3.2. Modelo GARCH-t

Da mesma forma, encontramos nas Tabelas 7 e 8 os parâmetros e estatísticas de teste para o modelo GARCH com distribuição t-student.

Na Tabela 9 são apresentados os valores do teste de Durbin-Watson. Por esta tabela, bem como pelas Figuras 9 e 10, podemos concluir que não existe autocorrelação. Em anexo (Anexo D) encontram-se as restantes representações gráficas da autocorrelação.

TABELA 7. Parâmetros do modelo GARCH-t

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Parâmetros	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão
μ	0.0438	0.0160	0.084	0.0148	0.0640	0.0180	0.0751	0.0140	0.0173	0.0358
ω	0.0252	0.0094	0.0293	0.0091	0.0409	0.0129	0.0241	0.0070	0.0760	0.0249
α	0.0916	0.0202	0.1029	0.0168	0.1046	0.0179	0.1212	0.0199	0.0585	0.0081
β	0.8952	0.0234	0.883	0.0193	0.8795	0.0207	0.8685	0.0206	0.9305	0.0099
ν	7.0418	0.7610	5.4866	0.4820	6.5135	0.7150	5.7577	0.5650	10.5424	1.5620

TABELA 8. Estatísticas de Teste modelo GARCH-t

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
LLF	-5436.08	-5334.31	-5887.29	-5056.46	-8093.93
AIC	10 882.20	10 678.60	11 784.60	10 122.90	16 197.90
BIC	10 913.00	10 709.50	11 815.40	10 153.80	16 228.70

TABELA 9. Teste Durbin-Watson - modelo GARCH-t

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Estatística (d)	2.0557	2.4376	2.3665	2.0322	2.1430

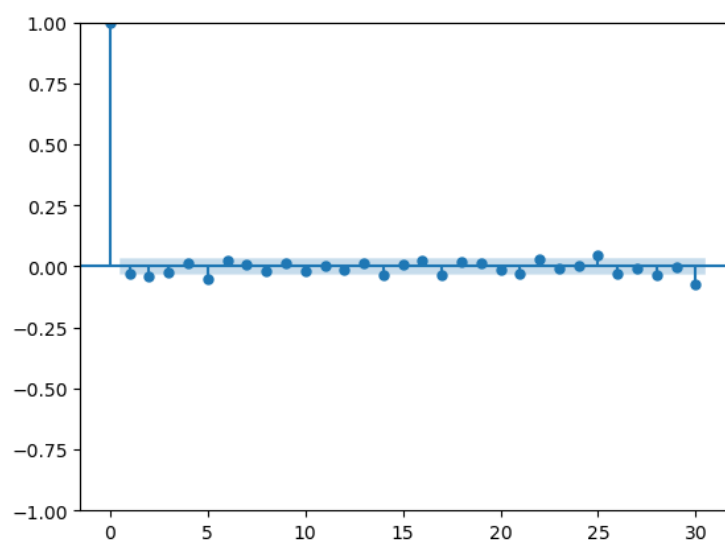


FIGURA 9. Autocorrelação FTSE 100

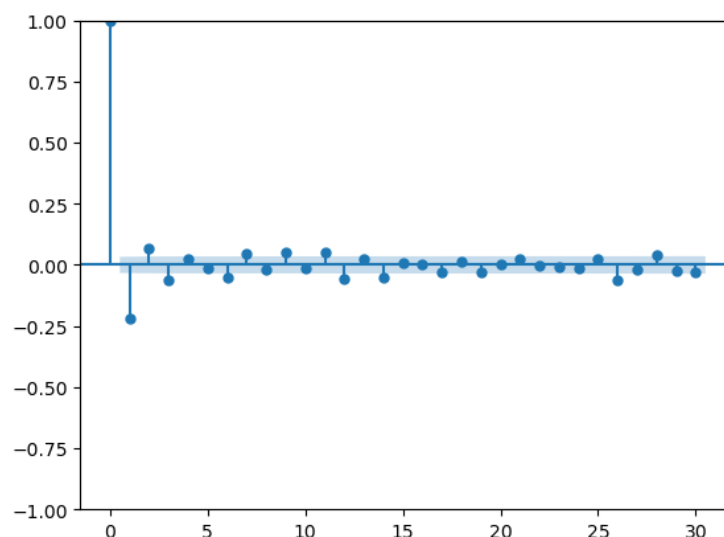


FIGURA 10. Autocorrelação S&P500

Na Tabela 10 estão representados os resultados do teste de Engle, de onde concluímos que o efeito ARCH está a ser capturado.

TABELA 10. Teste de Engle - modelo GARCH-t

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Teste de Engle	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q
LM(4)	0.0000	537.3385	0.0000	801.7965	0.0000	532.6383	0.0000	517.0169	0.0000	372.9768
LM(8)	0.0000	609.8627	0.0000	936.0851	0.0000	581.8208	0.0000	596.8587	0.0000	542.4160
LM(10)	0.0000	669.1457	0.0000	954.4414	0.0000	657.9934	0.0000	649.1949	0.0000	577.9186

4.3.3. Modelo GJR-n

Os parâmetros para o modelo GJR com distribuição normal (GJR-n) encontram-se na Tabela 11, enquanto na Tabela 12 estão os valores referentes a LLF, AIC e BIC.

O teste de Durbin-Watson apresenta resultados próximos de 2, pelo que, para este modelo, aceitamos a hipótese nula, ou seja, não existe autocorrelação de primeira ordem. Esta informação pode ser vista na Tabela 13, bem como nas figuras que lhe seguem, estando as restantes figuras no Anexo E.

A Tabela 14 apresenta informação sobre o teste de Engle. Desta informação, podemos concluir que temos efeito ARCH.

TABELA 11. Parâmetros do modelo GJR-n

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Parâmetros	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão
μ	-0.0015	0.0169	0.0219	0.0166	0.0174	0.0202	0.0159	0.0149	-0.0330	0.0374
ω	0.0325	0.0136	0.0454	0.0178	0.0712	0.0195	0.0268	0.0083	0.0769	0.0231
α	0.0117	0.0116	0.0043	0.0102	0.0595	0.0219	0.0000	0.0157	0.0228	0.0088
γ	0.1305	0.0308	0.1605	0.0419	0.1174	0.0412	0.1706	0.0293	0.0525	0.0124
β	0.9008	0.0284	0.8832	0.0327	0.8498	0.0236	0.8927	0.0266	0.9390	0.0093

TABELA 12. Estatísticas de Teste modelo GARCH-t

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
LLF	-5463.51	-5420.42	-5965.10	-5081.28	-8110.64
AIC	10937.00	10850.80	11940.20	10172.60	16231.30
BIC	10967.90	10881.70	11971.10	10203.40	16262.10

TABELA 13. Teste Durbin-Watson - modelo GJR-n

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Estatística (d)	2.0578	2.4402	2.3680	2.0372	2.1425

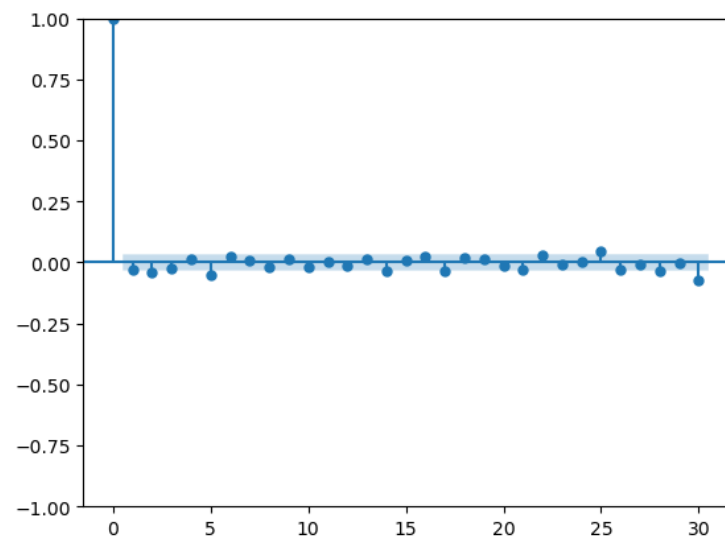


FIGURA 11. Autocorrelação FTSE 100

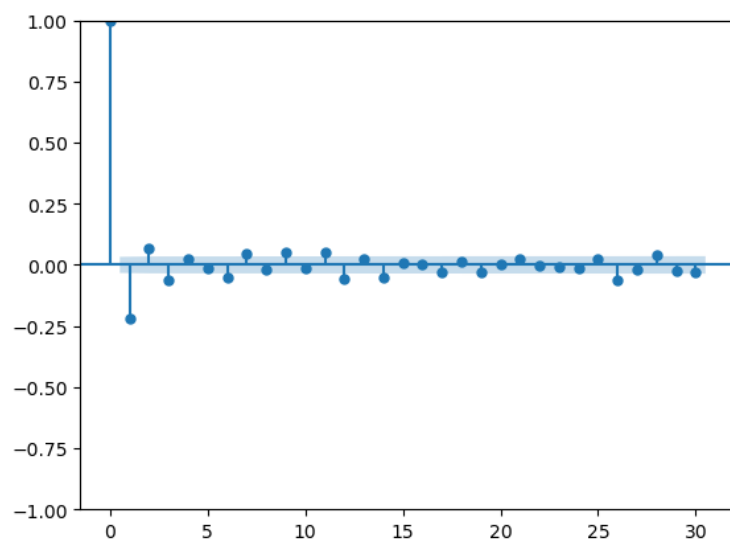


FIGURA 12. Autocorrelação S&P500

TABELA 14. Teste de Engle - modelo GJR-n

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Teste de Engle	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q	P-value	Estatística Q
LM(4)	0.0000	533.2349	0.0000	809.1881	0.0000	538.4794	0.0000	510.3685	0.0000	371.7033
LM(8)	0.0000	605.6574	0.0000	942.0539	0.0000	587.3833	0.0000	591.1531	0.0000	540.5751
LM(10)	0.0000	665.0572	0.0000	960.9120	0.0000	665.6916	0.0000	643.5832	0.0000	577.3523

4.3.4. Modelo GJR-t

Por fim, para o modelo GJR com a distribuição t-student (GJR-t) os parametros são apresentados na Tabela 15.

TABELA 15. Parâmetros do modelo GJR-t

Dados	FTSE 100		S&P 500		Nikkei 225		STOXX 600		PHLX GOLD/SILVER	
Parâmetros	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão	Valor	Desvio padrão
μ	0.0181	0.0162	0.0584	0.0153	0.0445	0.0184	0.0455	0.0138	-0.0079	0.0366
ω	0.0300	0.0117	0.0359	0.0102	0.0537	0.0151	0.0268	0.0074	0.0706	0.0224
α	0.0113	0.0106	0.0108	0.0098	0.0460	0.0128	0.0000	0.0135	0.0259	0.0091
γ	0.1389	0.0316	0.1675	0.0324	0.1147	0.0291	0.2108	0.0322	0.0476	0.0121
β	0.8985	0.0266	0.8799	0.0198	0.8707	0.0210	0.8736	0.0247	0.9392	0.0096
ν	7.6437	0.9010	5.8775	0.5490	6.8292	0.7980	6.5403	0.7610	11.2832	1.8000

Na Tabela 16 são apresentados os valores de LLF, AIC e BIC.

TABELA 16. Estatísticas de Teste modelo GJR-t

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
LLF	-5403.35	-5302.19	-5872.53	-4985.40	-8086.64
AIC	10818.70	10616.40	11757.10	9982.79	16185.30
BIC	10855.70	10653.40	11794.10	10019.80	16222.30

A Tabela 17 contém os valores do teste Durbin-Watson, de onde podemos concluir que não existe autocorrelação.

TABELA 17. Teste Durbin-Watson - modelo GJR-t

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Estatística (d)	2.0575	2.4398	2.3677	2.0357	2.1430

As Figuras abaixo, bem como as figuras no anexo "Autocorrelação - Modelo GJR-t", confirmar a não existência de autocorrelação nas variáveis em estudo.

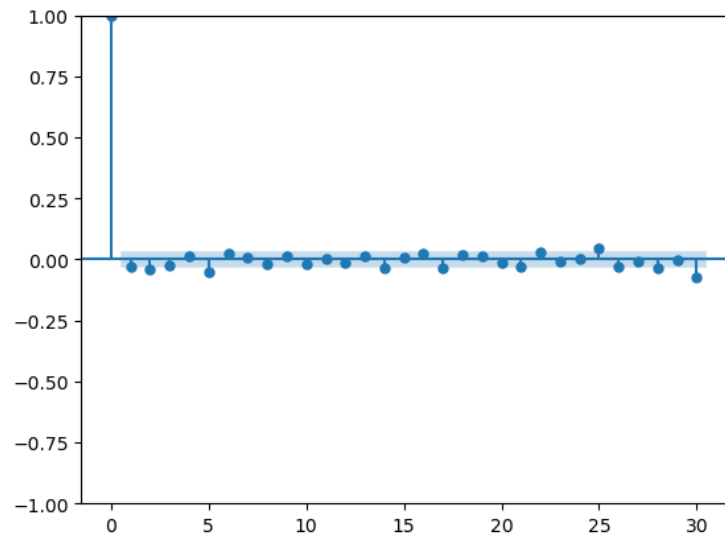


FIGURA 13. Autocorrelação FTSE 100

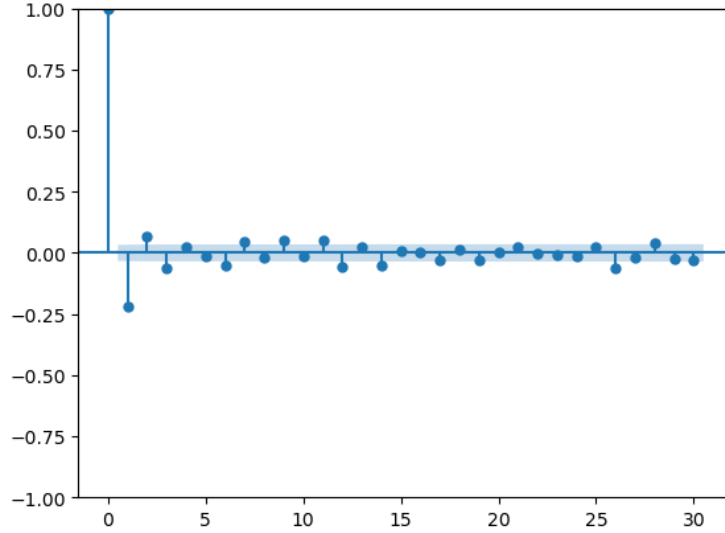


FIGURA 14. Autocorrelação S&P500

4.4. Cópulas

Para parametrizar as cópulas precisamos de calcular os valores dos resíduos dos modelos GARCH em estudo, tal como nos mostram Shams e Haghighi (2013).

Começamos por definir a cópula que pretendemos. Nesta dissertação iremos apresentar os resultados para as seguintes cópulas: cópula Gaussiana, cópula de Clayton, cópula de Frank, cópula t-student e cópula de Gambel.

De seguida, precisamos de transformar os dados para as cópulas. Os resíduos são transformados em distribuições marginais padronizadas usando a função de distribuição cumulativa (CDF) e a sua função inversa. A CDF dá a probabilidade cumulativa de os resíduos serem menores ou iguais a um determinado valor e a sua inversa transforma os valores uniformemente distribuídos em valores que seguem uma distribuição padrão.

Desta forma, em *python*, usamos a função *fit* para ajustar a cópula pretendida aos valores obtidos após a transformação dos resíduos.

4.4.1. Cópula Gaussiana

A matriz de correlação contém os parâmetros mais importantes a definir numa cópula Gaussiana. Desta forma, em seguida serão apresentadas as matrizes de correlação para os modelos GARCH e GJR. A biblioteca *copulae* do *python* fornece uma função cujo *output* consiste nos vários valores que completam a matriz de correlação, permitindo assim a construção da mesma. Não podemos esquecer que cada elemento da matriz representa a correlação entre dois pares de variáveis. Por exemplo, o elemento na linha *i* e na coluna *j* da matriz representa a correlação entre a variável *i* e a variável *j*.

Caso estejamos a calcular manualmente este valor primeiro será necessário obter a matriz de covariância.

A covariância entre duas variáveis *X* e *Y* é obtida da seguinte forma:

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (4.2)$$

onde n é o número de observações, X_i e Y_i são os valores das variáveis na observação i e $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são as médias das variáveis X e Y , respetivamente.

De seguida, calculamos a correlação entre X e Y .

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.3)$$

onde σ_X e σ_Y são o desvio-padrão de X e Y , respetivamente.

Desta forma obtemos a matriz de covariância juntando todas as combinações possíveis de variáveis, formando uma matriz $k \times k$

Para o modelo GARCH-n a matriz de correlação é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5441142556 & 0.2898945750 & 0.8607367468 & 0.2156839490 \\ 0.5441142556 & 1 & 0.1725520902 & 0.5230009868 & 0.3240169451 \\ 0.2898945750 & 0.1725520902 & 1 & 0.2598292637 & 0.0539152730 \\ 0.8607367468 & 0.5230009868 & 0.2598292637 & 1 & 0.1672239042 \\ 0.2156839490 & 0.3240169451 & 0.0539152730 & 0.1672239042 & 1 \end{bmatrix}$$

No âmbito do modelo GARCH-t, a matriz de correlação apresenta-se da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5441142924 & 0.2898945750 & 0.8607367468 & 0.2156839490 \\ 0.5441142924 & 1 & 0.1725520991 & 0.5230009868 & 0.3240169761 \\ 0.2898945750 & 0.1725520991 & 1 & 0.2598292242 & 0.0539152730 \\ 0.8607367468 & 0.5230009868 & 0.2598292242 & 1 & 0.1672239042 \\ 0.2156839490 & 0.3240169761 & 0.0539152730 & 0.1672239042 & 1 \end{bmatrix}$$

Referente ao modelo GJR-n, a matriz de correlação é descrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5441142133 & 0.2898943468 & 0.8607364056 & 0.2156837612 \\ 0.5441142133 & 1 & 0.1725521974 & 0.5230007542 & 0.3240169200 \\ 0.2898943468 & 0.1725521974 & 1 & 0.2598291213 & 0.0539152645 \\ 0.8607364056 & 0.5230007542 & 0.2598291213 & 1 & 0.1672236714 \\ 0.2156837612 & 0.3240169200 & 0.0539152645 & 0.1672236714 & 1 \end{bmatrix}$$

Quanto ao modelo GJR-t, a matriz de correlação é representada do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5441143674 & 0.2898946555 & 0.8607366901 & 0.2156840062 \\ 0.5441143674 & 1 & 0.1725521436 & 0.5230008280 & 0.3240169434 \\ 0.2898946555 & 0.1725521436 & 1 & 0.2598292465 & 0.0539152497 \\ 0.8607366901 & 0.5230008280 & 0.2598292465 & 1 & 0.1672237483 \\ 0.2156840062 & 0.3240169434 & 0.0539152497 & 0.1672237483 & 1 \end{bmatrix}$$

Na Tabela 18 encontram-se os valores para a *Log-likelihood Function*, AIC e BIC. Por esta tabela podemos perceber que, para a cópula Gaussiana, o modelo com o menor valor de AIC e BIC é o GJR-t, uma vez que estas variáveis tomam os valores -6743.3080 e -6650.7255 , respetivamente.

TABELA 18. Cópula Gaussiana

Modelo	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
LLF	3386.6511	3386.6539	3386.6506	3386.6540
AIC	-6743.3022	-6743.3079	-6743.3013	-6743.3080
BIC	-6650.7198	-6650.7254	-6650.7188	-6650.7255

4.4.2. Cópula t-student

A cópula t-student apresenta dois parâmetros essenciais: a matriz de correlação e os graus de liberdade.

A baixo são apresentadas as matrizes de correlação para os modelos GARCH-n, GARCH-t, GJR-n e GJR-t, respetivamente.

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0.563822 & 0.282204 & 0.853031 & 0.215582 \\
 0.563822 & 1 & 0.196577 & 0.542865 & 0.322459 \\
 0.282204 & 0.196577 & 1 & 0.253437 & 0.057333 \\
 0.853031 & 0.542865 & 0.253437 & 1 & 0.167630 \\
 0.215582 & 0.322459 & 0.057333 & 0.167630 & 1
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0.564159 & 0.282370 & 0.853115 & 0.215584 \\
 0.564159 & 1 & 0.196336 & 0.543158 & 0.322459 \\
 0.543158 & 0.543158 & 1 & 0.543158 & 0.057343 \\
 0.853115 & 0.543158 & 0.253518 & 1 & 0.167658 \\
 0.215584 & 0.322622 & 0.057343 & 0.167658 & 1
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0.563781 & 0.282167 & 0.853015 & 0.215595 \\
 0.563781 & 1 & 0.196654 & 0.542975 & 0.322422 \\
 0.282167 & 0.196654 & 1 & 0.253480 & 0.057299 \\
 0.853015 & 0.542975 & 0.253480 & 1 & 0.167554 \\
 0.215595 & 0.322422 & 0.057299 & 0.167554 & 1
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0.564159 & 0.282370 & 0.853115 & 0.215584 \\
 0.564159 & 1 & 0.196336 & 0.543158 & 0.322622 \\
 0.282370 & 0.196336 & 1 & 0.253518 & 0.057343 \\
 0.853115 & 0.543158 & 0.253518 & 1 & 0.167658 \\
 0.215584 & 0.322622 & 0.057343 & 0.167658 & 1
 \end{bmatrix}$$

A tabela 19 começa por apresentar os graus de liberdade, ν , para cada modelo em análise. Nesta tabela são também apresentados os valores para a *Log-likelihood Function*, o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação de Bayesiano. Por estes últimos valores concluímos que a cópula t-student com os modelos GARCH-t é a que melhor se adequa.

4.4.3. Cópula de Clayton

Como vimos anteriormente, a cópula de Clayton apresenta um parâmetro θ . Este parâmetro controla o grau de dependência entre as variáveis, ou seja, quanto maior for, maior será a dependência positiva entre as variáveis. Por outro lado, quanto menor for este valor, mais fraca será a dependência.

TABELA 19. Cópula t-student

Modelo	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
ν	4.02846905294	4.03027976992	4.02878996092	4.03027976992
LLF	4 010.03024066779	4 010.03131931388	4 010.02952147021	4 010.03024066779
AIC	- 7 990.0604813356	- 7 990.0626386278	- 7 990.0590429404	- 7 990.0604813356
BIC	- 7 897.4780145539	- 7 897.4801718461	- 7 897.4765761587	- 7 897.4780145539

Desta forma, na tabela 20, encontramos o valor de θ para os diversos modelos em estudo, bem como os valores de LLF, AIC e BIC.

TABELA 20. Cópula de Clayton

Modelo	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
θ	0.47760538866	0.47760679539	0.47760522082	0.47760538866
LLF	1 486.68826064707	1 486.68826068683	1 486.68826064131	1 486.68826364707
AIC	- 2 943.3765212941	- 2 943.3765213737	- 2 943.3765212826	- 2 943.3765212941
BIC	- 2 850.7940545125	- 2 850.7940545920	- 2 850.7940545010	- 2 850.7940545125

Concluimos assim que, para a cópula de Clayton, o modelo GARCH-t é o que melhor se adequa dado que apresenta um menor valor para as variáveis AIC e BIC.

4.4.4. Cópula de Frank

A cópula de Frank, tal como a cópula de Clayton, apresenta um parâmetro θ , medindo se a dependência é positiva ou negativa.

Pela tabela abaixo vemos que o θ toma sempre valores positivos o que significa que, à medida que uma variável aumenta, a outra tende a aumentar também.

TABELA 21. Cópula de Frank

Modelo	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
θ	2.02785713803	2.02792683939	2.02785666268	2.02792683939
LLF	1 208.16075972507	1 208.16076031329	1 208.16075971411	1 208.16076031329
AIC	- 2 386.3215194502	- 2 386.3215206266	- 2 386.3215194282	- 2 386.3215206266
BIC	- 2 293.7390526685	- 2 293.7390538449	- 2 293.7390526465	- 2 293.7390538449

Os modelos GARCH-t e GJR-t apresentam os menores valores de AIC e BIC para a cópula de Frank.

4.4.5. Cópula de Gumbel

O parâmetro θ das cópulas de Gumbel mede a dependência entre as variáveis. Este parâmetro foi apurado para os modelos em análise e encontra-se refletido na tabela 22.

Para a cópula de Gumbel o modelo GARCH-t é aquele que melhor se adequa dado que o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação de Bayesiano tomam os valores -2407.97 e -2315.39 , respetivamente.

TABELA 22. Cópula de Gumbel

Modelo	GARCH-n	GARCH-t	GJR-n	GJR-t
θ	1.26087541075	1.26066886175	1.26094449445	1.26066886175
LLF	1 218.98706527304	1 218.98733017737	1 218.98680903870	1 218.98733017737
AIC	- 2 407.9741305461	- 2 407.9746603548	- 2 407.9736180774	- 2 407.9746603548
BIC	- 2 315.3916637644	- 2 315.3921935731	- 2 315.3911512957	- 2 315.3921935731

4.5. Previsão

Da análise apresentada acima percebemos que, de entre as cópulas em estudo, a cópula t-student apresenta menores valores para o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação de Bayesiano.

É relevante destacar a cópula t-student com o modelo GARCH-t que, ao tomar o menor valor, revela ser o modelo que tem uma melhor combinação de ajuste aos dados e simplicidade. Assim, este modelo é o mais adequado para descrever os dados.

É, no entanto, interessante fazer uma previsão com este modelo para os dias correspondentes ao nosso conjunto de treino. Desta forma, podemos comparar os valores previstos pelo modelo e aqueles que efetivamente se verificaram. Tal análise pode ser vista nas figuras abaixo, para alguns segmentos deste período.

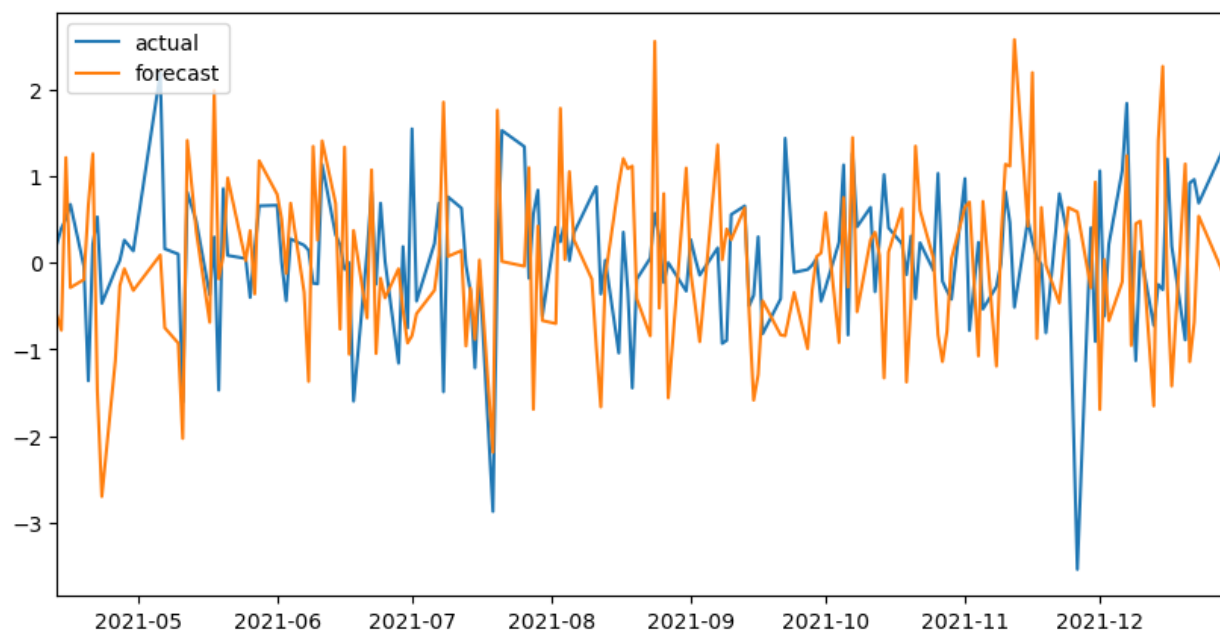


FIGURA 15. Previsão vs Atual FTSE

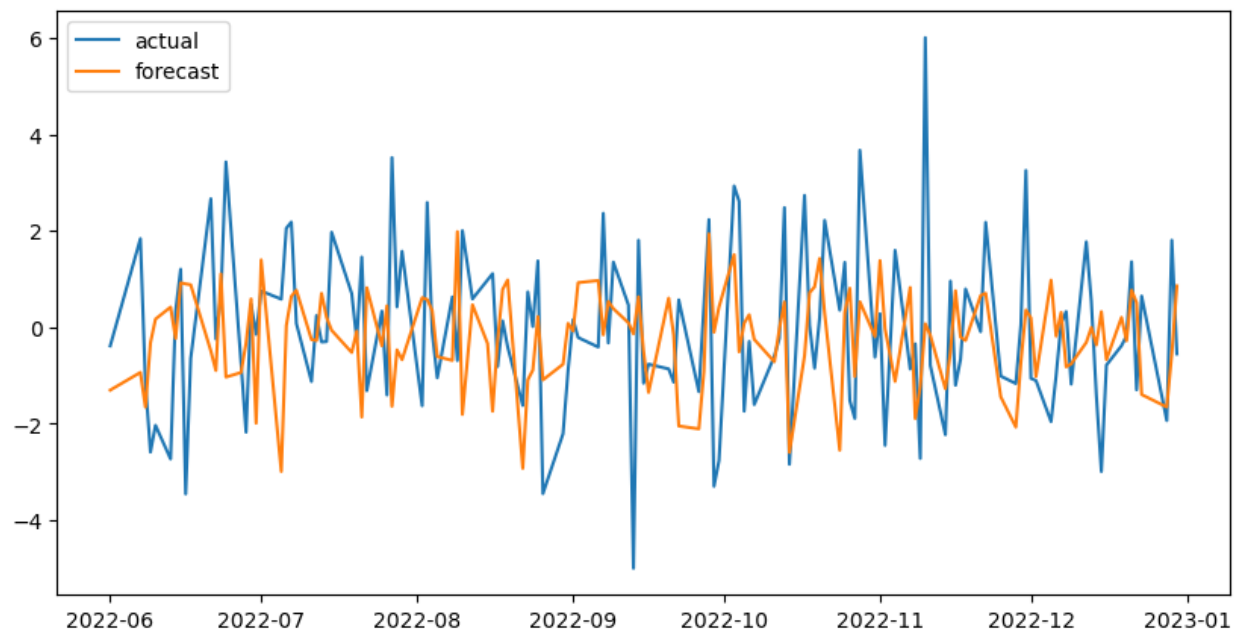


FIGURA 16. Previsão vs Atual SP 500

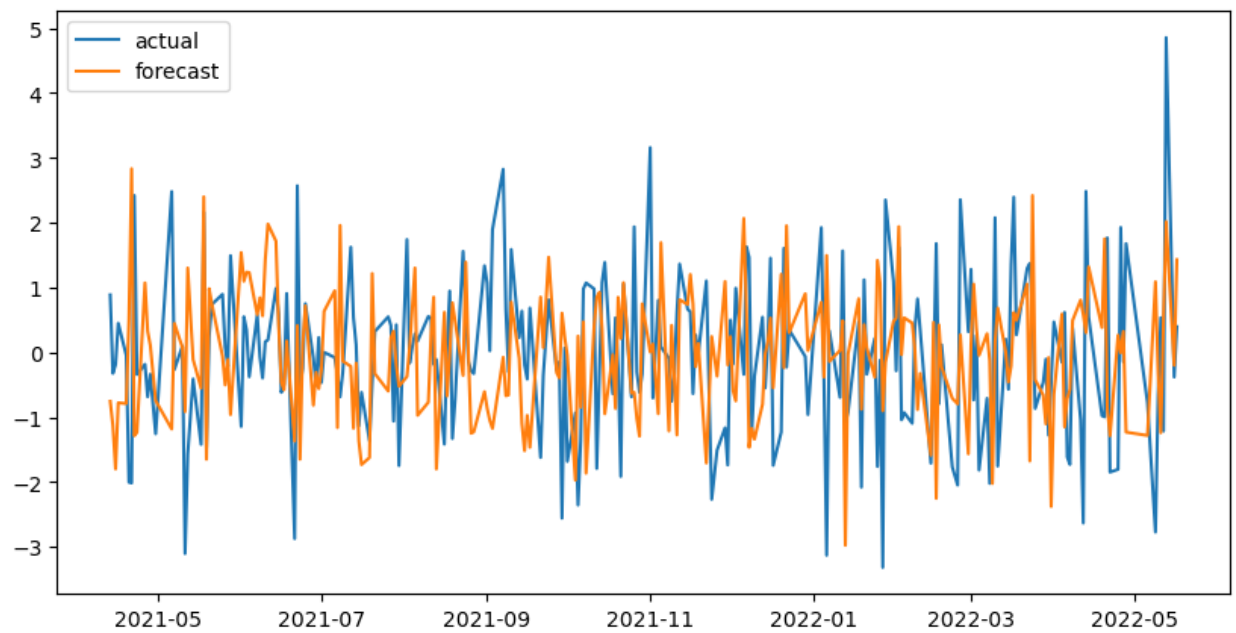


FIGURA 17. Previsão vs Atual Nikkei

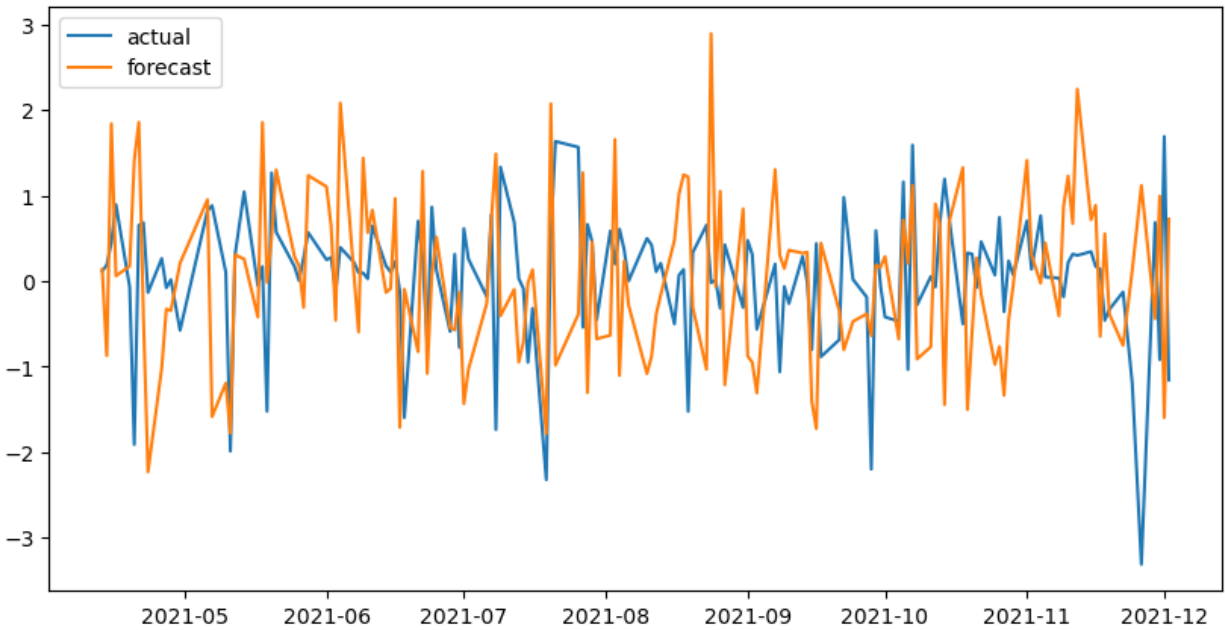


FIGURA 18. Previsão vs Atual STOXX 600

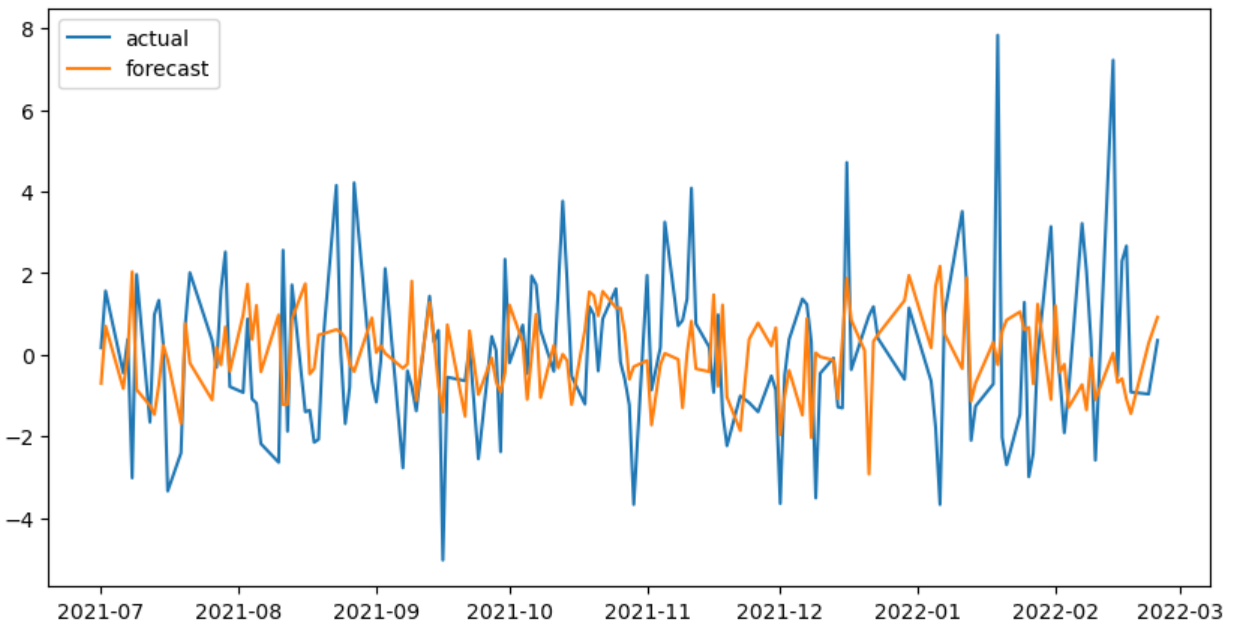


FIGURA 19. Previsão vs Atual Ouro e Prata

O erro quadrático média (EQM) trata-se de uma medida estatística frequentemente usada para avaliar o desempenho de um modelo. O EQM mede a média dos quadrados dos erros entre os valores previstos pelo modelo e os valores reais observados. Quanto menor for este valor, melhor o modelo se ajusta aos dados.

Na Tabela 23 encontram-se os valores para o EQM associado a cada índice. Podemos verificar que todos têm um valor próximo de 2, à exceção do índice de Ouro e Prata. Tendo em conta que o período em análise se trata de anos atípicos devido à pandemia COVID-19, podemos dizer que o modelo revela um bom desempenho, sendo um pouco mais reduzido para o índice PHLX GOLD/SILVER.

TABELA 23. Erro Quadrático Médio

Dados	FTSE 100	S&P 500	Nikkei 225	STOXX 600	PHLX GOLD/SILVER
Erro quadrático médio	2.0883	2.7721	2.3249	2.1349	6.5536

4.6. VaR

O VaR é uma medida amplamente usada para quantificar o risco, no entanto, existem consequências caso este valor seja subestimado ou sobrestimado.

A subestimação do VaR implica a subestimação do risco envolvido numa posição ou portfólio, dando uma falsa sensação de segurança que pode resultar na tomada de risco excessivos. Assim, podemos estar perante decisões de investimento ou de gestão de risco inadequadas que podem levar a estratégias financeiras arriscadas e à não alocação de recursos para cobrir riscos.

Por outro lado, a sobrestimação do VaR tem subjacente a alocação de recursos para cobrir riscos que não são significativos, tomando uma abordagem excessivamente conservadora que pode resultar na perda de oportunidades de investimento.

Desta forma, tanto a subestimação como sobrestimação do VaR têm implicações significativas na tomada de decisão. Assim, é importante que o VaR seja calculado com precisão para que as decisões de investimento e a gestão do risco sejam apropriadas e equilibradas.

Como vimos anteriormente, o método cópula-GARCH considera a correlação entre os ativos e, ao usar cópulas permite modelar a dependência multivariada de uma forma mais flexível que as abordagens tradicionais. Por sua vez, modelos paramétricos, por exemplo os normais, assumem que o retorno do portfólio segue uma distribuição normal, o que implica que os retornos são independentes. Os modelos paramétricos são portanto uma abordagem mais simplificada e, por vezes, inadequada para capturar riscos.

No nosso estudo, verificámos que a cópula t-student é aquela que melhor se adequa para descrever aos dados, desta forma, é possível calcular o VaR de um portfólio composto pelos cinco índices em estudo de forma igual. Para um nível de confiança de 95% obtemos um valor para o VaR de, aproximadamente, 0.5352, enquanto que, para um nível de confiança de 99% este valor é 1.0350.

Se o valor fosse calculado parametricamente, assumindo que os retornos seguem uma distribuição normal, o VaR seria 0.9307, para um nível de confiança de 95% e 0.9419 para um nível de confiança de 99%.

Desta forma, podemos verificar que, ao considerarmos um modelo paramétrico usando a distribuição normal, para um nível de confiança de 95% ocorreremos numa sobrestimação do valor de VaR, enquanto para um nível de confiança de 99% estamos perante uma subestimação do VaR.

TABELA 24. VaR do portefolio

Método	Cópula-GARCH		Paramétrico	
	95%	99%	95%	99%
VaR	0.5352	1.0350	0.9307	0.9419

CAPÍTULO 5

Conclusões

Ao longo desta dissertação, explorámos a relevância dos modelos de cópula GARCH principalmente no contexto das finanças, com o objetivo principal de avaliar a sua eficácia. Esta pesquisa demonstrou que estes modelos desempenham um papel fundamental na compreensão e gestão de riscos nos mercados financeiros. Para o efeito foram analisados cinco índices bolsistas, cuja importância foi também realçada.

Esta análise abrangeu cinco índices cuidadosamente selecionados, cuja importância foi enfatizada durante o nosso estudo. As séries temporais vão de 20/09/2005 a 30/12/2022, sendo portanto um período de quase 15 anos marcado por eventos turbulentos, como a crise de 2008 e a pandemia. Assim, foi possível analisar os métodos tendo em conta o contexto dos mercados financeiros.

De entre as várias abordagens consideradas, destacamos a cópula t-student em conjunto com o modelo GARCH-t como a mais apropriada para a nossa análise. Este resultado é então consistente com estudos anteriores. Através da aplicação rigorosa e extensa de testes na análise, confirmámos a capacidade do modelo GARCH para capturar a cauda pesada e a heterocedasticidade observadas nas séries financeiras.

É importante ressaltar que, embora estes resultados estejam em linha com pesquisas anteriores, a sua contribuição reside na aplicação específica desses modelos num contexto financeiro particular. A complexidade e dinâmica dos mercados financeiros exigem abordagens flexíveis e precisas. Este estudo reforça a posição dos modelos cópula GARCH como ferramentas vitais para a gestão eficaz de riscos financeiros.

Além disso, destacamos a importância de continuar a pesquisa nessa área, procurando aprimorar ainda mais a eficácia dos modelos cópula GARCH e a sua aplicação em diferentes cenários financeiros. A constante evolução dos mercados e a crescente complexidade dos ativos financeiros exigem uma adaptação contínua das metodologias de modelação do risco.

Concluindo, os modelos de cópula GARCH, e em particular a cópula t-Student com o modelo GARCH-t, desempenham um papel crucial nas finanças, permitindo uma melhor compreensão e gestão dos riscos. Este estudo confirma a relevância dessas ferramentas e incentiva a pesquisa contínua nesta área para melhor atender às exigências provocadas pela constante mudança dos mercados financeiros.

Referências Bibliográficas

- Alexander, C. (2008). Market Risk Analysis, Volume II: Practical Financial Econometrics.
- Aloui, R., Aïssa, M. S. B., & Nguyen, D. K. (2013). Conditional dependence structure between oil prices and exchange rates: A copula-GARCH approach. *Journal of International Money and Finance*, 32, 719-738.
- Amo, E., Carrillo, M. D., Fernández-Sánchez, J. (2012). Characterization of all copulas associated with non-continuous random variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 191, 103-112.
- Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiß, J. P., Mikosch, T. V. (Eds.). (2009). *Handbook of financial time series*. Springer Science Business Media.
- Bauwens, L., Laurent, S., Rombouts, J. V. (2006). Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of applied econometrics*, 21(1), 79-109.
- Bera, A. K., Higgins, M. L. (1993). ARCH models: properties, estimation and testing. *Journal of economic surveys*, 7(4), 305-366.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3), 307-327.
- Chen, X., Fan, Y., & Tsyrennikov, V. (2006). Efficient estimation of semiparametric multivariate copula models. *Journal of the American Statistical Association*, 101(475), 1228-1240.
- Cherubini, U., Luciano, E., & Vecchiato, W. (2004). *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Cherubini, U., Mulinacci, S., Gobbi, F., & Romagnoli, S. (2011). *Dynamic copula methods in finance*. John Wiley & Sons.
- Cuadras, C. M., Fortiana, J., Rodriguez-Lallena, J. A. (Eds.). (2002). *Distributions with given marginals and statistical modelling*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Demarta, S., & McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas. *International statistical review*, 73(1), 111-129.
- Di Clemente, A., & Romano, C. (2021). Calibrating and simulating copula functions in financial applications. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, 7, 642210.
- Durante, F., Fernandez-Sanchez, J., & Sempì, C. (2013). A topological proof of Sklar's theorem. *Applied Mathematics Letters*, 26(9), 945-948.
- Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2001). *Modelling dependence with copulas*. Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich, 14, 1-50.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 987-1007.
- Fisher, N. I., Kotz, S., Read, C., & Banks, D. (1997). *Encyclopedia of statistical sciences*.
- Fréchet, M. (1951). Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. *Ann. Univ. Lyon*, 3 e serie, Sciences, Sect. A, 14, 53-77.
- Genest, C., & Favre, A. C. (2007). Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of hydrologic engineering*, 12(4), 347-368.
- Genest, C., & Nešlehová, J. (2007). A primer on copulas for count data. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 37(2), 475-515.
- Genest, C., & MacKay, J. (1986). The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40(4), 280-283.
- Gonçalves, S., & White, H. (2004). Maximum likelihood and the bootstrap for nonlinear dynamic models. *Journal of Econometrics*, 119(1), 199-219.
- Huang, J. J., Lee, K. J., Liang, H., & Lin, W. F. (2009). Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. *Insurance: Mathematics and economics*, 45(3), 315-324.

- Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006). The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of international money and finance*, 25(5), 827-853.
- Lee, E. J., Klumpe, N., Vilk, J., & Lee, S. H. (2017). Modeling conditional dependence of stock returns using a copula-based GARCH model. *International Journal of Statistics and Probability*, 6(2), 32-41.
- Nelsen, R. B. (1995). Copulas, characterization, correlation, and counterexamples. *Mathematics Magazine*, 68(3), 193-198.
- Nelsen, R. B. (2006). *An introduction to copulas*. Springer.
- Palaro, H. P., & Hotta, L. K. (2006). Using conditional copula to estimate value at risk. *Journal of Data Science*, 4, 93-115.
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International economic review*, 47(2), 527-556.
- Patton, A. J. (2012). A review of copula models for economic time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 110, 4-18.
- Rémillard, B. (2017). Goodness-of-fit tests for copulas of multivariate time series. *Econometrics*, 5(1), 13.
- Rüschendorf, L. (1996). Developments on Fréchet-bounds. *Lecture Notes-Monograph Series*, 273-296.
- Salmon, F. (2009). Recipe for disaster: The formula that killed Wall Street. *Wired Magazine*, 17(3), 17-03.
- Schweizer, B. (1991). Thirty years of copulas. In *Advances in probability distributions with given marginals: Beyond the copulas* (pp. 13-50). Dordrecht: Springer Netherlands.
- Shams, S., & Haghighi, F. K. (2013). A copula-garch model of conditional dependencies: estimating tehran market stock exchange value-at-risk. *Journal of Statistical and Econometric Methods*, 2(2), 39-50.
- Sklar, M. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. In *Annales de l'ISUP* (Vol. 8, No. 3, pp. 229-231).
- Wang, K., Chen, Y. H., & Huang, S. W. (2011). The dynamic dependence between the Chinese market and other international stock markets: A time-varying copula approach. *International Review of Economics & Finance*, 20(4), 654-664.
- Winkelmann, R. (2012). Copula bivariate probit models: with an application to medical expenditures. *Health economics*, 21(12), 1444-1455.
- Yan, J. (2023). Multivariate modeling with copulas and engineering applications. *Springer handbook of engineering statistics*, 931-945.

Anexo A : Representação gráfica dos retornos

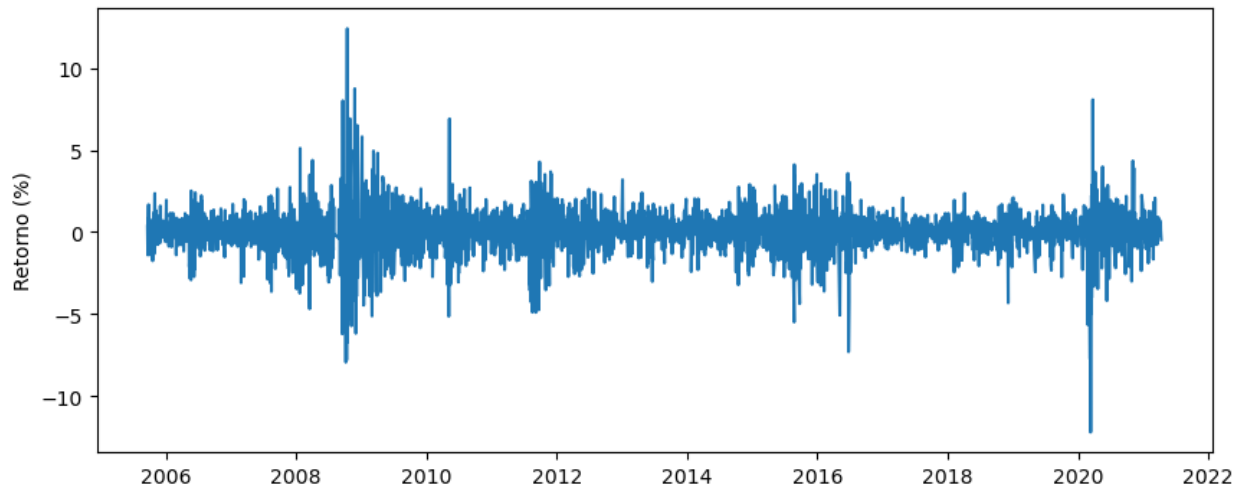


FIGURA 1. Retorno diário STOXX 600

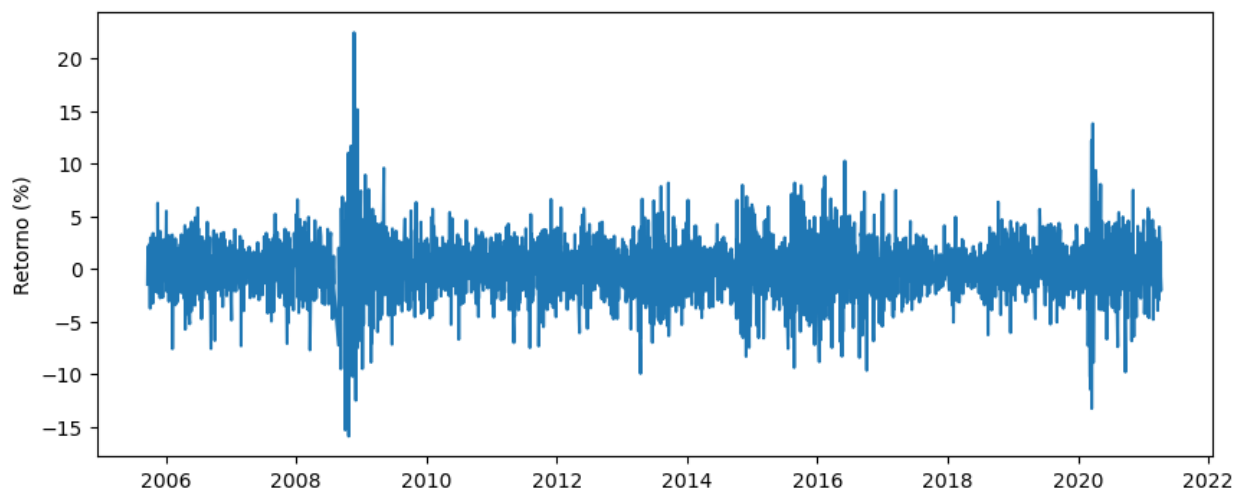


FIGURA 2. Retorno diário PHLX GOLD/SILVER

Anexo B: Representação gráfica da relação entre as rendibilidades diárias

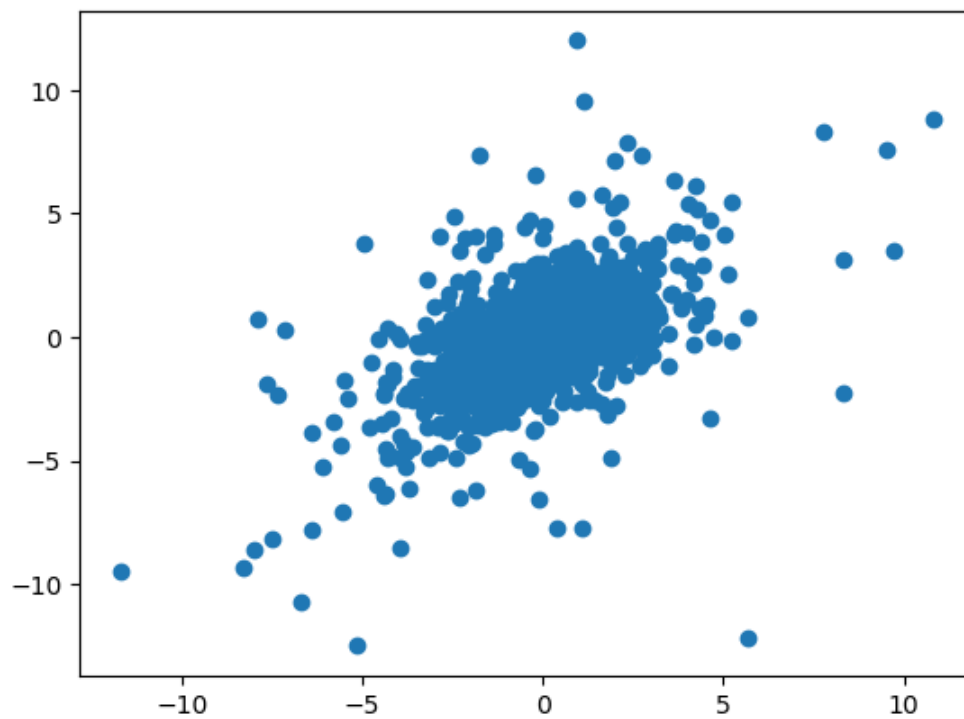


FIGURA 3. Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do S&P 500

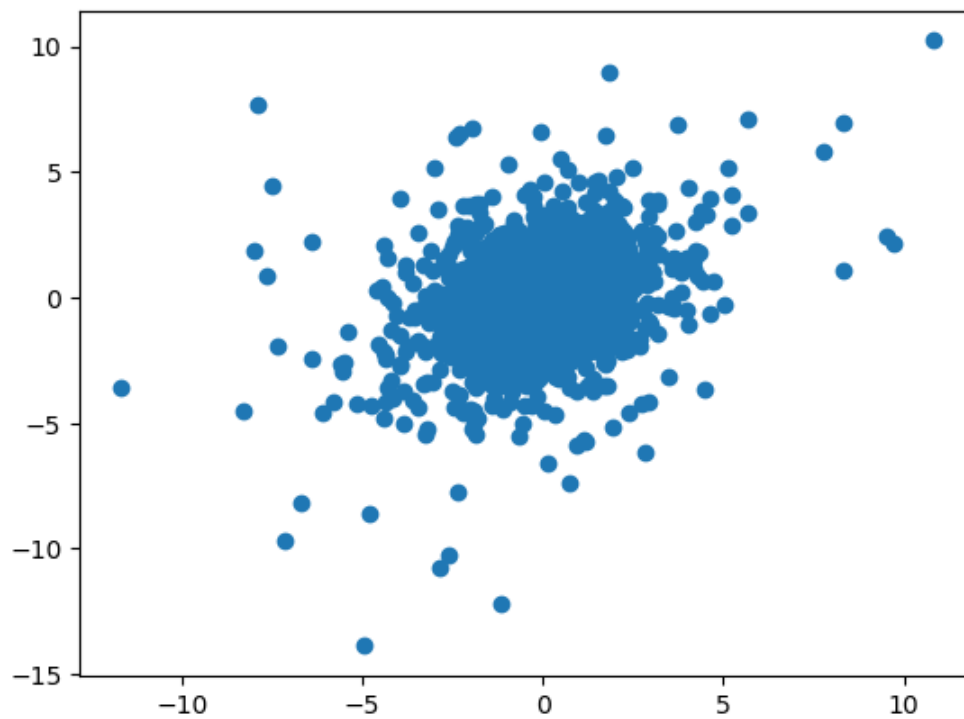


FIGURA 4. Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 do e Nikkei 225

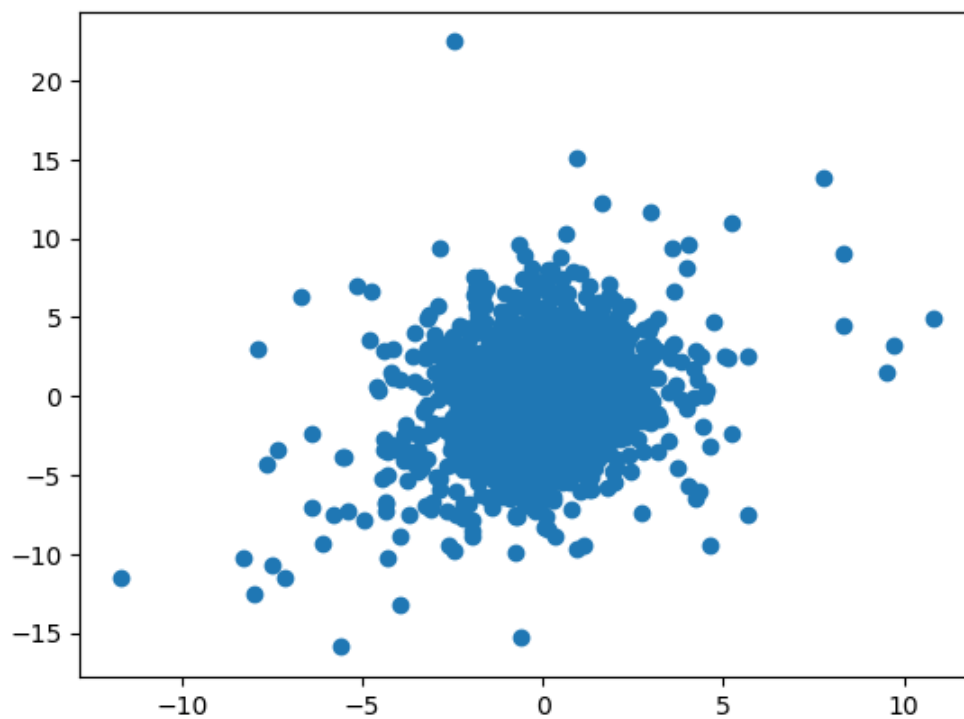


FIGURA 5. Relação entre as rendibilidades diárias do FTSE 100 e do PHLX GOLD/SILVER

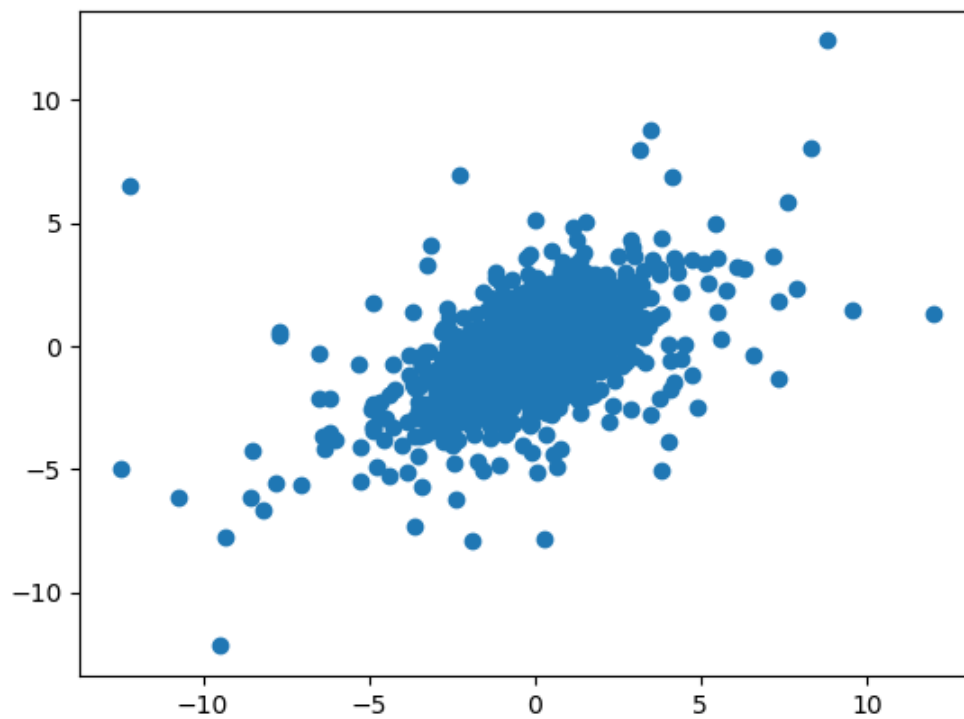


FIGURA 6. Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e do STOXX 600

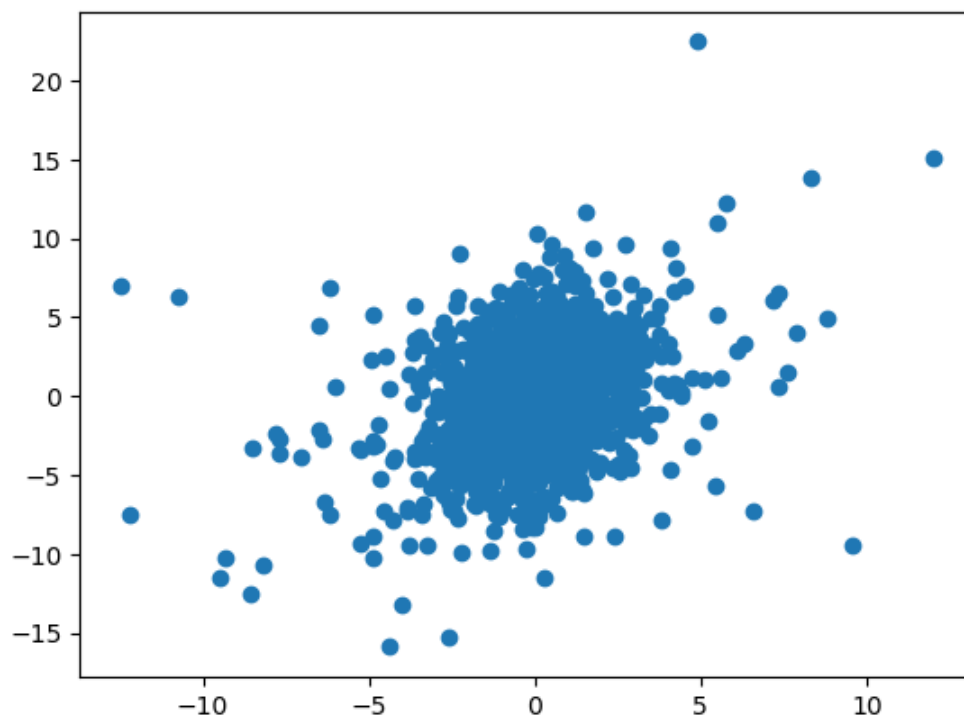


FIGURA 7. Relação entre as rendibilidades diárias do S&P 500 e de PHLX GOLD/SILVER

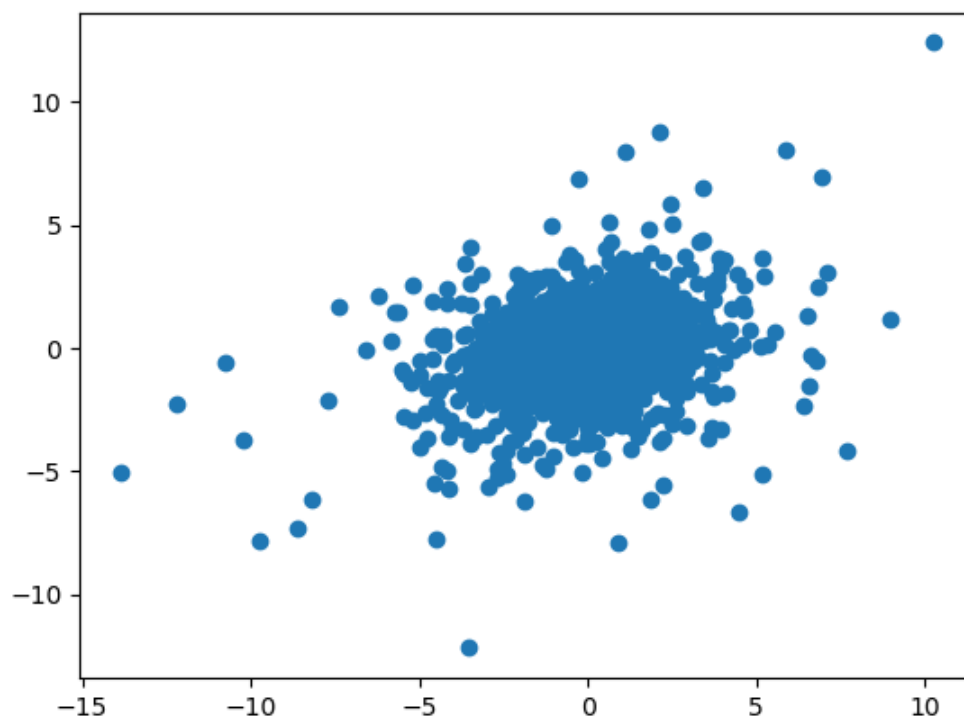


FIGURA 8. Relação entre as rendibilidades diárias do Nikkei 225 e do STOXX 600

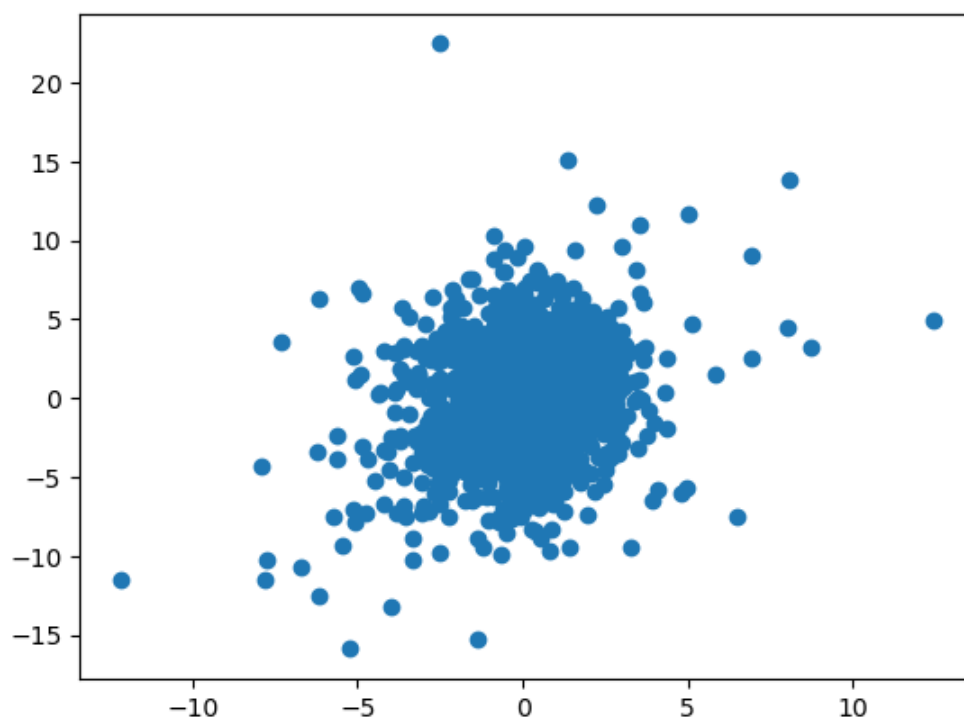


FIGURA 9. Relação entre as rendibilidades diárias do STOXX 600 e de PHLX GOLD/SILVER

Anexo C: Autocorrelação - Modelo GARCH-n

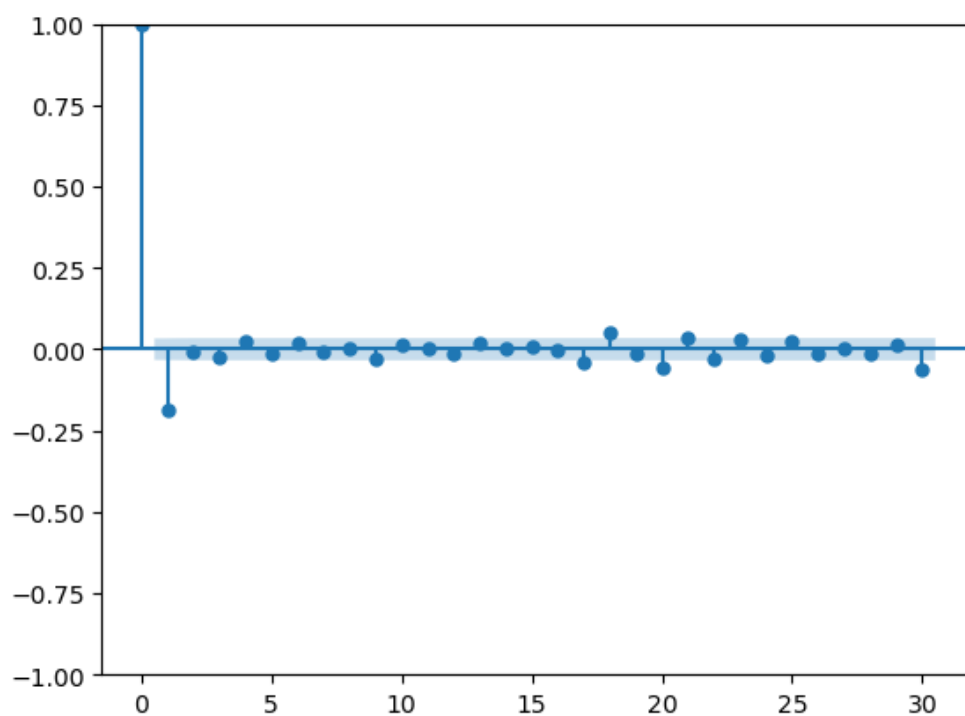


FIGURA 10. Autocorrelação Nikkei 225

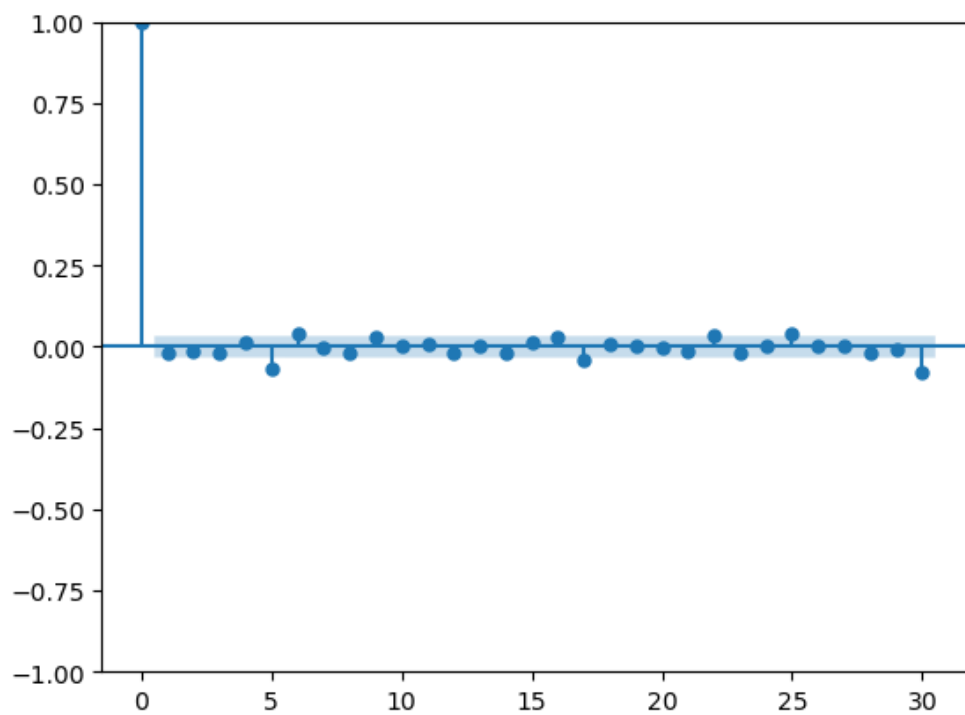


FIGURA 11. Autocorrelação STOXX 600

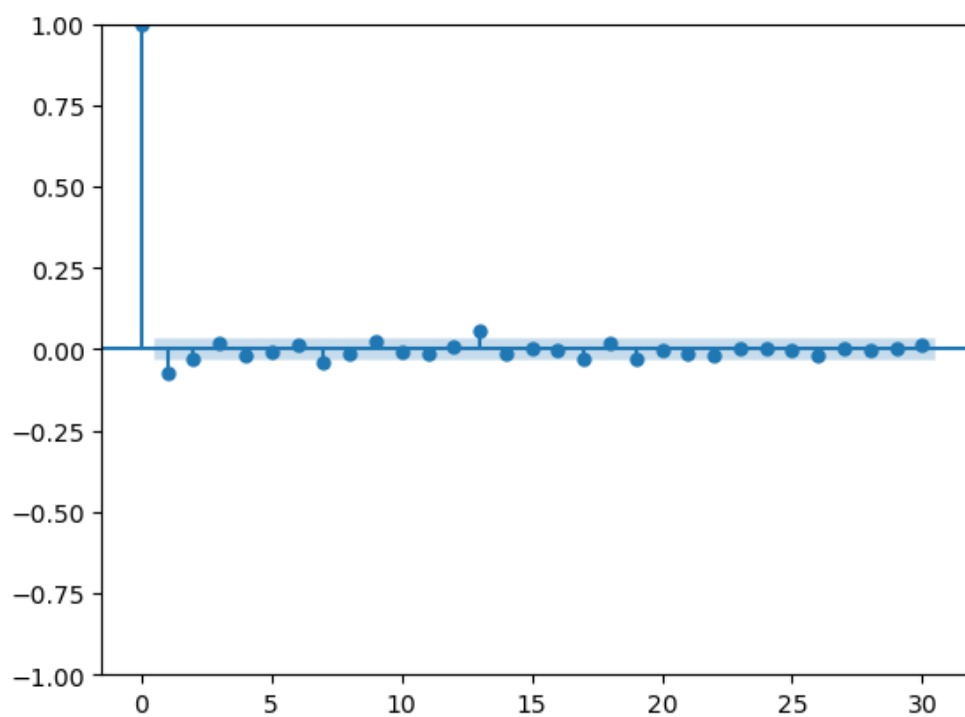


FIGURA 12. Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER

Anexo D: Autocorrelação - Modelo GARCH-t

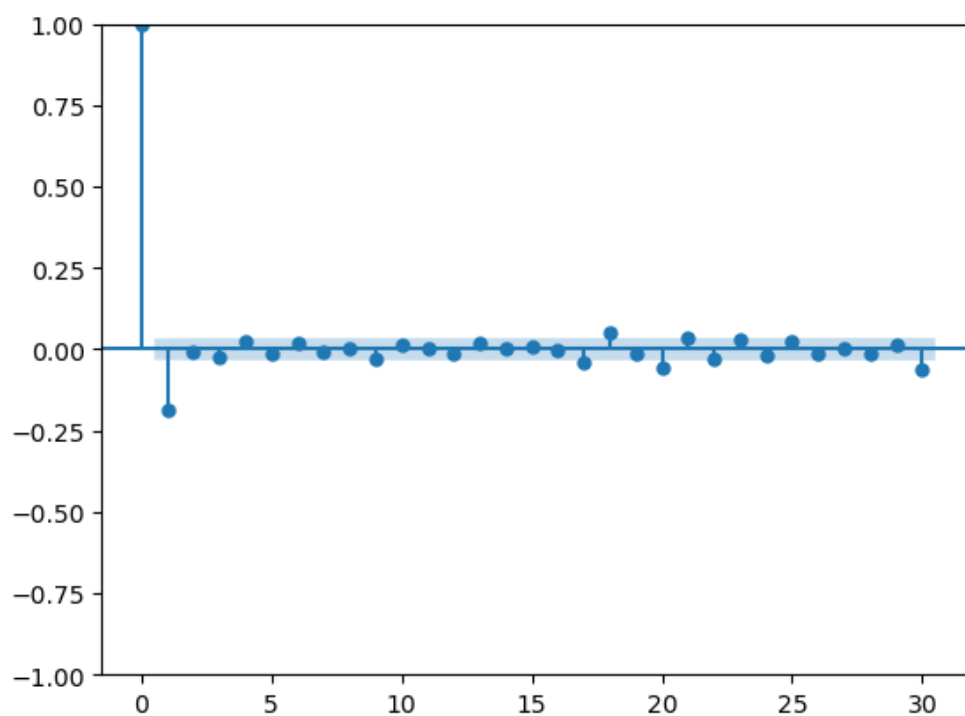


FIGURA 13. Autocorrelação Nikkei 225

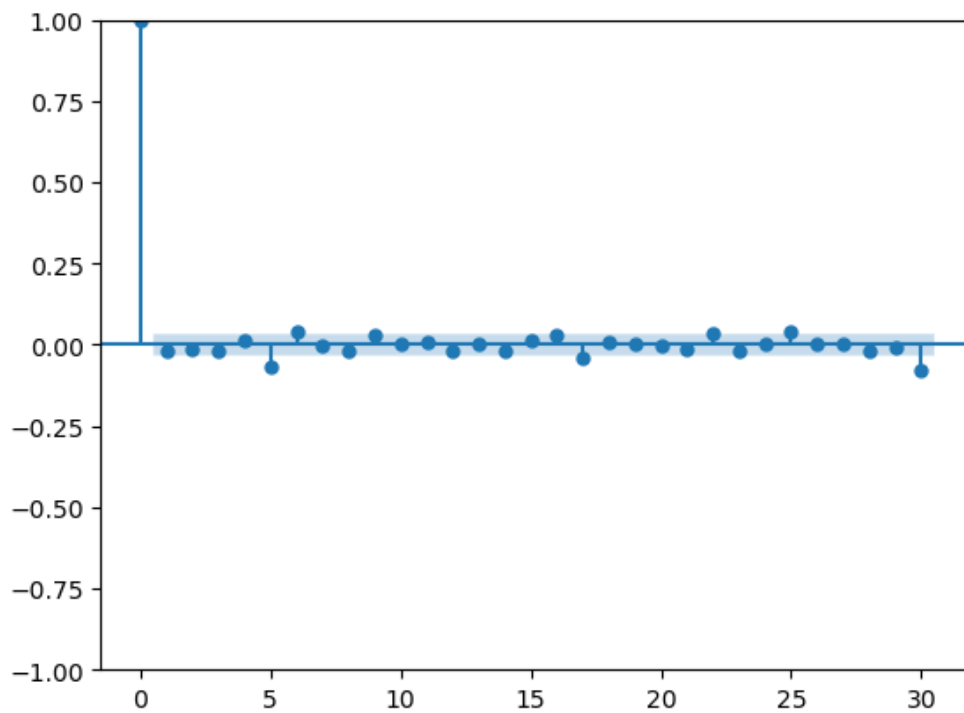


FIGURA 14. Autocorrelação STOXX 600

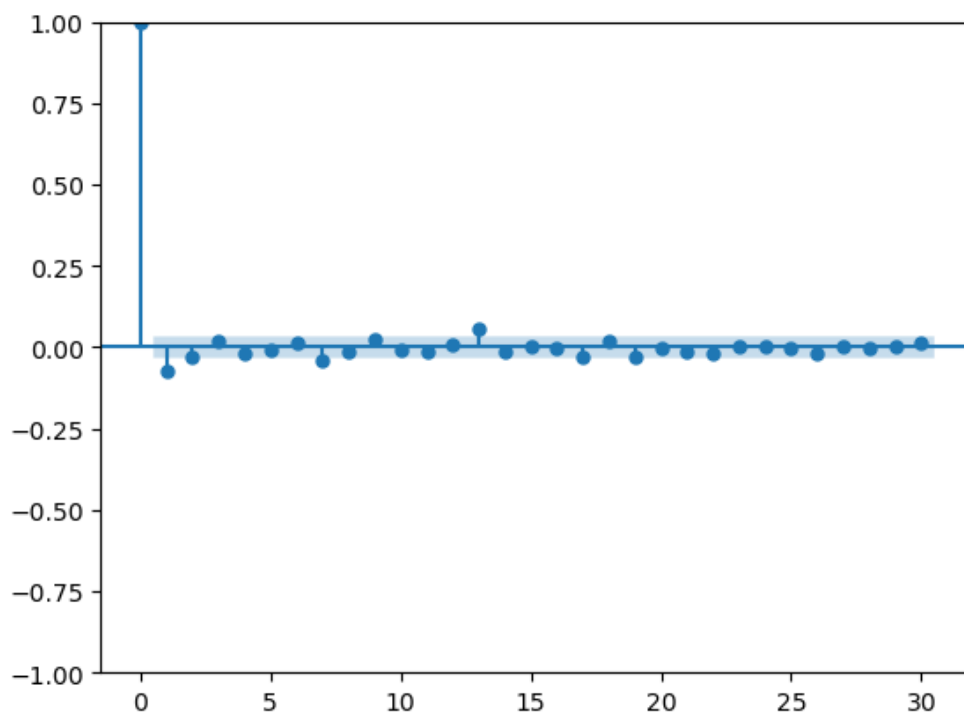


FIGURA 15. Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER

Anexo E: Autocorrelação - Modelo GJR-n

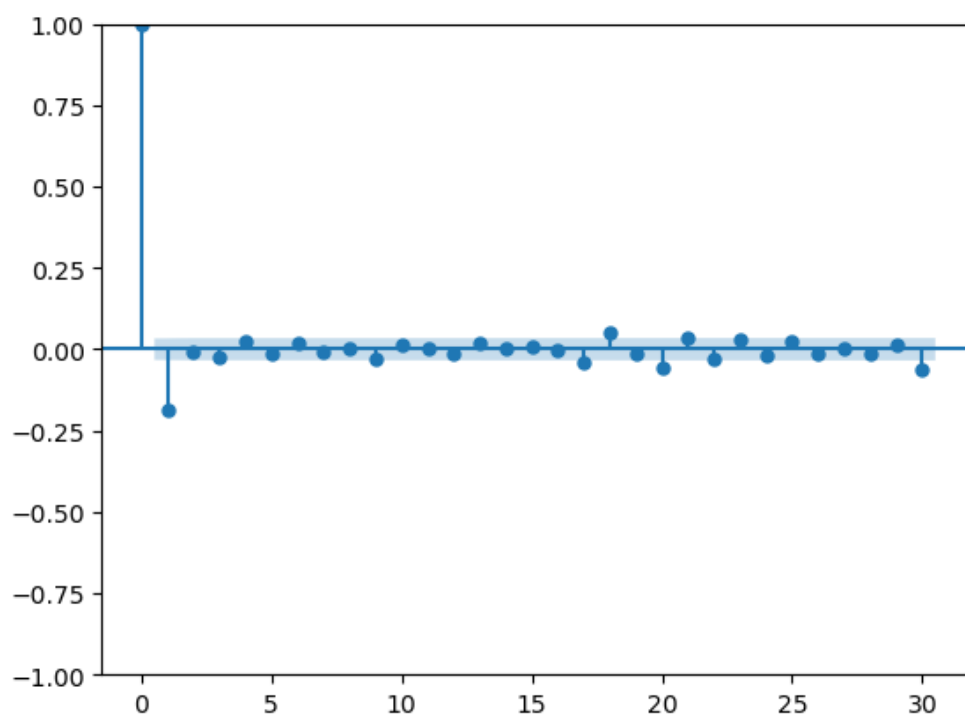


FIGURA 16. Autocorrelação Nikkei 225

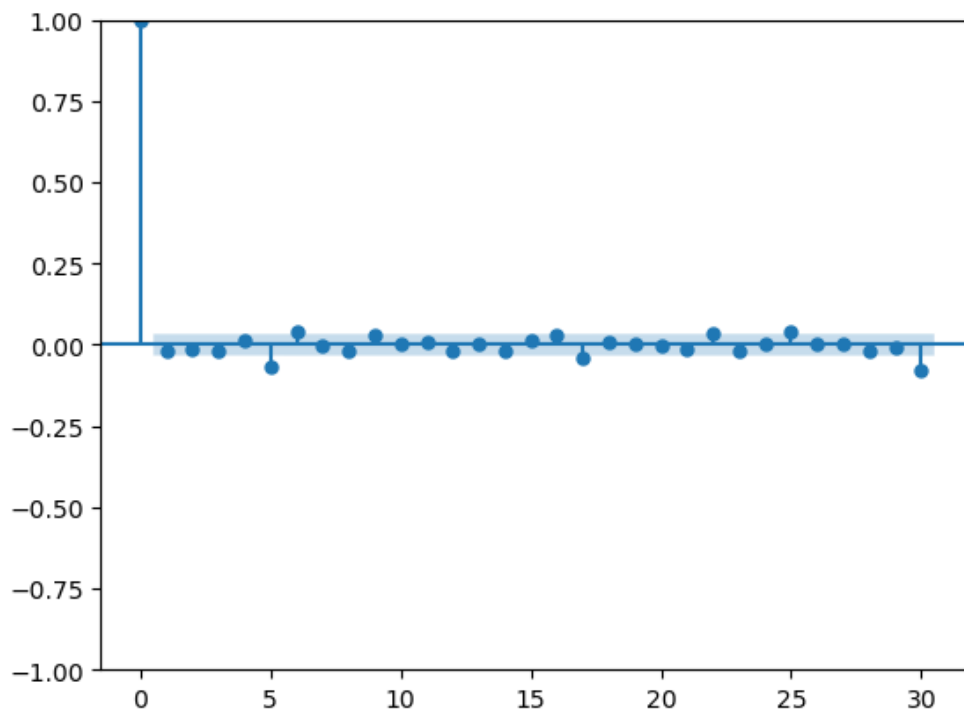


FIGURA 17. Autocorrelação STOXX 600

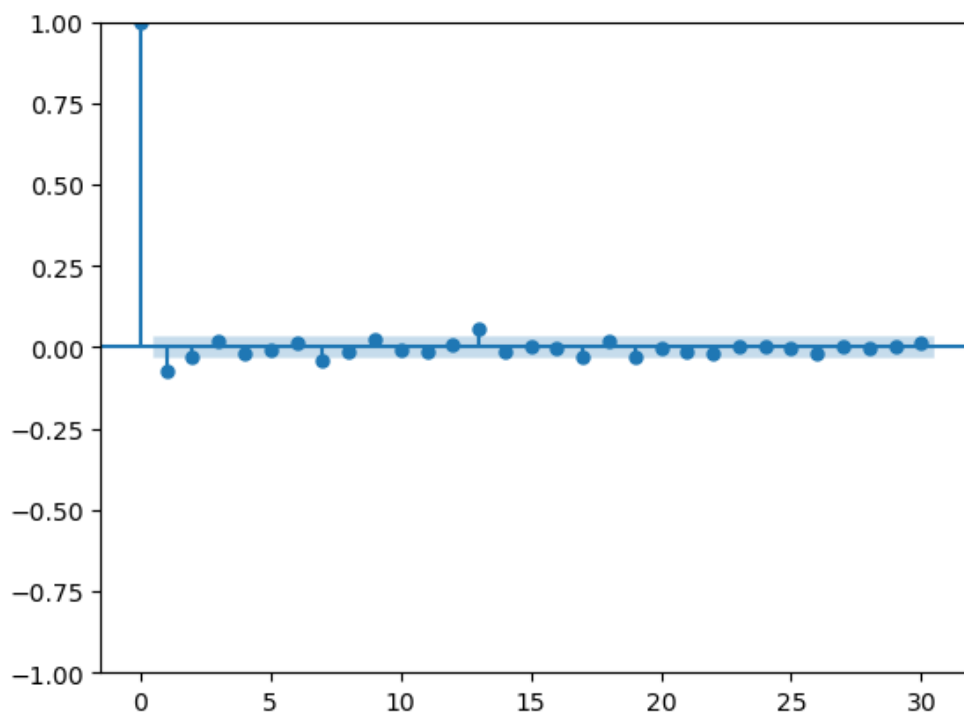


FIGURA 18. Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER

Anexo F: Autocorrelação - Modelo GJR-t

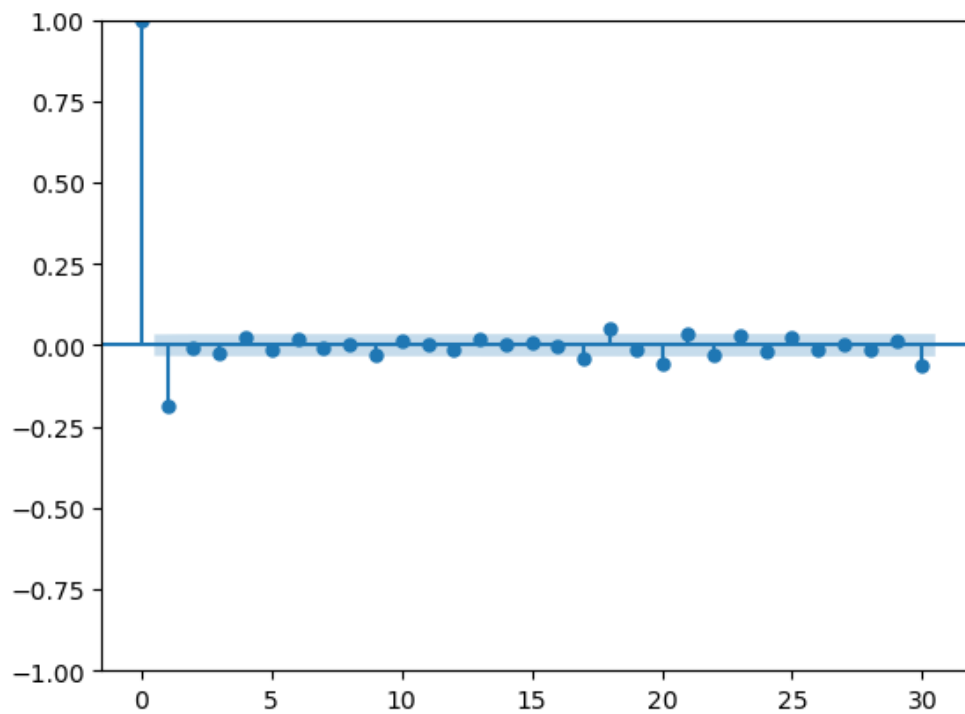


FIGURA 19. Autocorrelação Nikkei 225

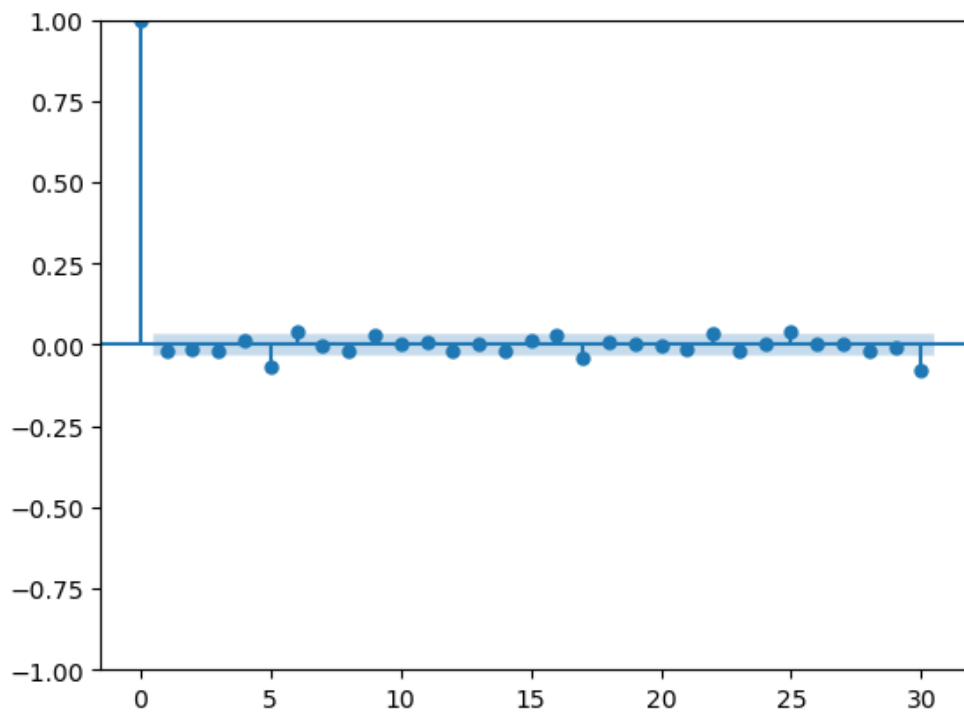


FIGURA 20. Autocorrelação STOXX 600

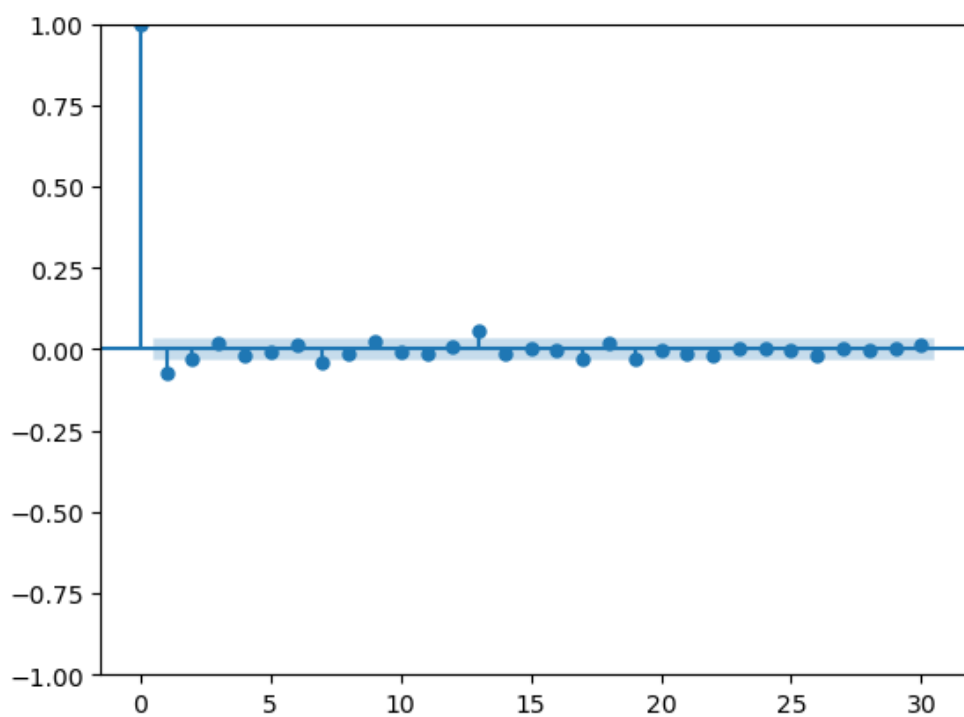


FIGURA 21. Autocorrelação PHLX GOLD/SILVER