

Instituto Superior de Ciências do Trabalho e da Empresa



Sincronização de sistemas dinâmicos caóticos por ligação unidireccional e bidireccional

Maria do Rosário Domingos Laureano

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de
Doutor em Métodos Quantitativos
Especialidade em Matemática

Orientadora

Prof. Doutora Diana Aldea Mendes, Prof. Auxiliar, ISCTE Business School,
Departamento de Métodos Quantitativos

s

Co-orientador

Prof. Doutor Manuel Alberto M. Ferreira, Prof. Catedrático, ISCTE Business School,
Departamento de Métodos Quantitativos

Agosto de 2008

Resumo

Abordamos o fenómeno de sincronização de sistemas dinâmicos caóticos em tempo contínuo e em tempo discreto. Por permitir abordar as questões que consideramos essenciais em sincronização, todas as ligações estudadas envolvem apenas dois sistemas caóticos. Em tempo contínuo, nos regimes de sincronização idêntica e generalizada, aplicamos diversos esquemas de ligação unidireccional e bidireccional entre sistemas de Lorenz ou de Rössler com comportamento caótico. Procedemos à combinação de alguns deles com substituição total ou parcial nos termos não-lineares do segundo sistema, uma possibilidade que tem sido pouco explorada. Embora em alguns esquemas apenas se conclua acerca da estabilidade local do estado síncronico, apresentamos esquemas de ligação onde a estabilidade global é garantida. As condições de estabilidade global resultam de uma abordagem do método directo de Lyapunov diferente da usual. Em tempo discreto estudamos um esquema de ligação não-linear que surge de forma natural a partir da família de transformações quadráticas complexas analíticas. Tanto quanto sabemos esta ligação não foi até agora objecto de estudo. Trata-se de uma ligação assimétrica entre transformações quadráticas reais. Quando não é alcançada sincronização prática, mas a diferença entre as variáveis dinâmicas dos dois sistemas é limitada, aplicamos uma técnica de controle de caos. Obtemos sincronização idêntica e generalizada estável com algumas variantes da ligação original, privilegiando a ausência de simetria. Duas delas constituem uma generalização ao uso de parâmetros de ligação distintos. Por análise da diferença entre as variáveis dinâmicas dos sistemas, estabelecemos alguns resultados que garantem a sua sincronização estável.

Palavras-chave

Sistemas dinâmicos caóticos contínuos e discretos, sincronização de caos, estabilidade assintótica local e global, simulações numéricas.

Classificação do JEL: C65 e C68

Abstract

We consider synchronization phenomena of chaotic dynamical systems, both in continuous and discrete time. In what follows we will always consider two chaotic dynamical systems, since they are sufficient to study the essential in the proposed coupling schemes. In continuous time, for identical and generalized synchronization, we apply various unidirectional and bidirectional coupling schemes between Lorenz or Rössler systems with chaotic behavior. We combine some of these with total or partial substitution on the nonlinear terms of the second system, a coupling version that was less explored. In some cases we only conclude about local stability of the synchronous state, and in other studies we present coupling schemes where the global stability is guaranteed. The conditions of global stability are obtained from a different approach of the Lyapunov direct method. In discrete time, we study a nonlinear coupling scheme that appears in natural a family of analytic complex quadratic maps. We are not aware about any studies of this type of coupling. It is an asymmetric coupling between two real quadratic maps. When practical synchronization is not achieved, but the difference between the dynamical variables of the systems is limited, we still can apply a chaos control technique. We obtain stable identical and generalized synchronization with some versions of the original coupling, highlighting the absence of symmetry. Two of them are generalizations promoting the use of different parameters coupling. By analysing the difference between the dynamical variables of the systems, we obtain some results leading to stable synchronization.

Key-words

Continuous and discrete chaotic systems, chaos synchronization, local and global asymptotical stability, numerical simulations.

JEL Classification: C65 e C68.

Agradecimentos

Quero prestar um enorme agradecimento aos meus orientadores, Diana Mendes e Manuel Alberto, pela disponibilidade constante no esclarecimento de dúvidas, pelas valiosas sugestões que deram e por toda a dedicação ao trabalho desenvolvido.

Aos meus filhos, Xavier e Maria Inês, agradeço a compreensão que tiveram nos momentos em que a falta de tempo impedia que lhes desse toda a atenção a que têm naturalmente direito.

Para os meus pais, Estela e José, a minha irmã Fátima, o meu irmão António e a minha prima Maria Teresa vai um agradecimento muito especial, pela ajuda incondicional que sempre disponibilizaram durante a preparação deste trabalho.

Quero ainda agradecer as palavras de incentivo que tive o privilégio de receber da Francisca Sousa, do Abdul, do Álvaro Rosa, da Anabela, do António Teixeira, da Helena Soares, da Marina, do Nuno e do Sérgio.

Um obrigado ao ISCTE por me ter sido proporcionado a dispensa das actividades lectivas e as necessárias condições de trabalho.

Para *Maria Inês* e *Xavier*, os meus filhos

Conteúdo

Introdução	1
1 Noções preliminares em dinâmica não-linear e sincronização de caos	17
1.1 Generalidades em sistemas dinâmicos	17
1.1.1 Sistemas dinâmicos	18
1.1.2 Conjuntos invariantes e sua estabilidade	23
1.1.3 Conjuntos atractores e bacias de atracção	33
1.1.4 Comportamento caótico	39
1.1.5 Bifurcações	51
1.2 Generalidades em sincronização de caos	59
1.2.1 Sincronização idêntica	62
1.2.2 Generalizações da noção de sincronização idêntica	70
2 Sincronização de sistemas dinâmicos contínuos	75
2.1 Sincronização idêntica	76
2.1.1 Diferentes tipos de ligação unidireccional	77
2.1.2 Estabilidade do sistema ligado em ligação unidireccional	82
2.1.3 Ligação difusiva linear bidireccional	87

2.2	Sincronização generalizada	92
2.2.1	Ligação unidireccional por controle <i>feedback</i> negativo	94
2.2.2	Ligação unidireccional por função de controle	95
2.3	Estudo de caso	97
2.3.1	Análise de sincronização no sistema não-linear de Lorenz	97
2.3.2	Análise de sincronização no sistema não-linear de Rössler	113
3	Ligação assimétrica de sistemas dinâmicos discretos caóticos	127
3.1	Ligação obtida da transformação quadrática complexa	129
3.1.1	Análise da dinâmica do sistema ligado	130
3.1.2	Estabilidade local da sincronização	134
3.1.3	Abordagem computacional	137
3.1.4	Sincronização por controle de caos	140
3.2	Caso particular da ligação entre transformações idênticas	144
3.2.1	Análise da dinâmica do sistema ligado	145
3.2.2	Estabilidade local da sincronização	146
3.2.3	Abordagem computacional	150
3.2.4	Aplicação de controle de caos	155
3.3	Generalização da ligação a parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2	157
3.3.1	Caso particular de transformações idênticas	158
3.3.2	Transformações não-idênticas e dois parâmetros ρ_1 e ρ_2	176
3.4	Generalização da ligação em configuração unidireccional	191
3.4.1	Análise da dinâmica do sistema ligado	192
3.4.2	Estabilidade local da sincronização	193

3.4.3	Abordagem computacional	196
4	Conclusões	199
	Bibliografia	202

Lista de Tabelas

2.1	Comportamento do atrator caótico $\mathcal{A}$ em função de ρ	110
2.2	Ligações unidireccionais por <i>feedback</i> negativo deslocado	123
2.3	Ligações por decomposição activo-passivo	125
2.4	Ligações por substituição completa de variáveis	131
2.5	Controle <i>feedback</i> negativo no sistema de Rössler	131
2.6	Ligações unidireccionais por <i>feedback</i> negativo e substituição parcial	138
3.1	Valores próprios relativos aos pontos fixos do sistema ligado	152
3.2	Pontos fixos $P'_i(u, v)$ e valores próprios $\Lambda_{\pm}^{P'_i}$ para $i = 1, 2$	156
3.3	Pontos fixos P_i , $i = 1, \dots, 4$, e respectivos valores próprios	160
3.4	Pontos fixos P_i de (3.13), $i = 1, \dots, 4$ para $a = -0.24$ e $a = 0.74$	168
3.5	Intervalos $I(1.97, x_0, -x_0)$ para diferentes valores de x_0	171
3.6	Intervalos $I_e(\rho)$ de amplitude de inferior a 1	173
3.7	Pontos fixos P_i , $i = 1, \dots, 4$, e valores próprios para $a = 1.97$	178
3.8	Pontos fixos P_i , $i = 1, \dots, 4$ para $a = -0.24$ e $a = 0.74$	183
3.9	Intervalos $I^i(\rho_1)$ $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$	188

3.10	Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$	189
3.11	Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$	191
3.12	Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$	191
3.13	Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$	191
3.14	Intervalos $I(\rho_1)$ e respectiva amplitude	193
3.15	Intervalos $I(\rho_1)$, $I_{e,\min}(\rho_1)$ e $I_{e,\max}(\rho_1)$ e amplitude de $I(\rho_1)$	193
3.16	Intervalos $I(\rho_1)$, $I_{e,\min}(\rho_1)$ e $I_{e,\max}(\rho_1)$ e amplitude de $I(\rho_1)$	193
3.17	Pontos fixos P'_i e valores próprios $\Lambda_{\pm}^{P'_i}$ para $i = 1, \dots, 4$	198
3.18	Intervalos $I(\rho_2)$ com amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ inferior a 1	199
3.19	Intervalos $I(\rho_2)$ com amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ superior a 1	200
3.20	Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$	202
3.21	Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$	202
3.22	Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$	203
3.23	Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$	203
3.24	Pontos de período 4 para $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$	204
3.25	Pontos de período 2 para $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$	204
3.26	Intervalos $I_A(\rho_2) \subset I(\rho_2)$ e valores extremos de e	209
3.27	Intervalos $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$ e valores extremos de e	209
3.28	Intervalos $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$ e valores extremos de e	209

Lista de Figuras

2.1	Atrator caótico de Lorenz	98
2.2	Espectro dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado: tangenciais e condicionados	101
2.3	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	103
2.4	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	104
2.5	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	106
2.6	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	109
2.7	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	110
2.8	(a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	112
2.9	Atrator caótico de Rössler	115

2.10	(a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	116
2.11	Espectro dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado: tangenciais e condicionados	118
2.12	(a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	122
2.13	(a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização	124
3.1	Diagrama de bifurcação da transformação quadrática $f(x) = a - x^2$	131
3.2	Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.5) para $\rho \in [-1.0, 0.5]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$	134
3.3	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ para $\rho \in [-1.0, 0.5]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$	138
3.4	Ligação bidireccional em (3.5): (a) séries temporais, (b) atrator caótico . .	139
3.5	Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.5) versus ρ para $\rho \in [-1.0, 0.5] \supset [-0.39, 0.24]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$	139
3.6	Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.5) para $a = 1.87$, $b = 1.97$ e $\rho = -0.39$	140
3.7	Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.13) para $\rho \in [-350, 10]$ com $a = 1.97$	147
3.8	Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização	150

3.9	Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.17) para $\rho = 0.01$ e $a = -0.24$	151
3.10	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.17) versus ρ para $\rho \in [-10, 1]$ e $a = 1.97$	151
3.11	Ligação bidireccional em (3.13): (a) séries temporais, (b) atractor caótico .	152
3.12	Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização	153
3.13	Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b) atractor caótico	154
3.14	Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.13) versus ρ para $\rho \in [-350, 10] \supset [-338.29, 0.24]$ e $a = 1.97$	155
3.15	Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.24) versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-20, 25]$ com $a = 1.97$ e $\rho_1 = 0.9$	160
3.16	Diagram de bifurcação do sistema ligado (3.24) em função de ρ_2 para $a = 1.97$ e $\rho_1 = 0.9$	160
3.17	Diagram de bifurcação do sistema ligado (3.24) em função de ρ_1 para $a = 1.97$ e $\rho_2 = 3.8$	161
3.18	Ligação bidireccional em (3.24): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização	165
3.19	Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) para $a = -0.24$, $\rho_1 = -0.01$ e $\rho_2 = 0.02$	166
3.20	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ_1 para $\rho_1 \in [-15, 15]$ com $a = 1.97$ e $\rho_2 = 0.02$	166

3.21	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-15, 15]$ com $a = 1.97$ e $\rho_1 = -0.01$	167
3.22	Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b,f) hiperplanos de sincronização, (d) atrator caótico	168
3.23	Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b,f) hiperplanos de sincronização, (d) atrator caótico	168
3.24	Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b) atrator caótico, (d,f) hiperplanos de sincronização	169
3.25	Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) hiperplano de sincronização	171
3.26	Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) atrator caótico	173
3.27	Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) atrator caótico	175
3.28	Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.23) para $\rho_1 \in [-7.5, -0.5]$ com $\rho_2 = -0.7$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$	176
3.29	Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.23) para $\rho_2 \in [-2.5, 0.5]$ com $\rho_1 = -7.00$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$	177
3.30	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-0.5, 6.5]$ com $\rho_1 = 9.53$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$	179
3.31	Expoentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ_1 para $\rho_1 \in [2, 4.5]$ com $\rho_2 = -7$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$	180
3.32	Ligação bidireccional em (3.23): (a,c) séries temporais, (b,d) atractores caóticos	182

3.33 Ligação bidireccional em (3.23): (a,c) séries temporais, (b,d) atractores periódicos	185
3.34 Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) atractor periódico	187
3.35 Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) atractor periódico	188
3.36 Ligação bidireccional em (3.23): hiperplano de sincronização	188
3.37 Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) hiperplano de sincronização	191
3.38 Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.30) para $\rho \in [-18, 23]$ com $a = 1.97$	193
3.39 Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ para $\rho \in$ $[-45, 45]$ com $a = 1.97$	196
3.40 Ligação unidireccional em (3.30): (a,c,e) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização, (f) atractor caótico	197

Introdução

A primeira observação de sincronização foi descrita pelo físico holandês Christiaan Huygens em 1665 [24]. Neste caso, o fenómeno foi evidenciado pela igualdade de período em relógios mutuamente ligados. Posteriormente, a sincronização de sinais periódicos foi sendo detectada em muitos outros processos dinâmicos, tornando-se comum a outras áreas científicas e objecto de aplicações diversas em engenharia. Dada esta descoberta original de Huygens, o fenómeno de sincronização está, no sentido clássico do termo, associado à capacidade de sistemas dissipativos auto-oscilatórios ajustarem os seus comportamentos de modo a seguirem um movimento periódico global.

O estudo de sistemas dinâmicos baseou-se, durante muito tempo, em exemplos de equações diferenciais com soluções regulares. Se essas soluções permaneciam numa região limitada do espaço de fase, então elas ajustavam-se a um de dois tipos de comportamento, um ponto de equilíbrio estável ou uma oscilação periódica ou quase-periódica.

Actualmente, o termo "sincronização" é usado num sentido mais amplo incluindo sistemas caóticos, tanto discretos como contínuos. A análise numérica de populações caóticas presentes na natureza, mesmo heterogéneas, revela que a sincronização é possível e frequente.

O caos pertence ao vasto campo da teoria de oscilações não-lineares cujo desenvolvimento significativo foi iniciado no século passado. Embora, já nos anos 20 e 30, Andronov tenha proposto uma classificação de comportamentos não-lineares (1933) e Van der Pol tenha detectado experimentalmente oscilações tipo-ruído em circuitos electrónicos (1927), a experiência que impulsionou a consideração de comportamento caótico deve-se a Lorenz [42]. Em 1961, trabalhando num modelo simplificado de transferência atmosférica de três equações diferenciais não-lineares simples, observou numericamente que fazendo mudanças muito pequenas nas condições iniciais obtinha um efeito enorme nas suas soluções. Tratava-se da evidência de uma das propriedades fundamentais da dinâmica caótica que mais tarde foi designada por dependência sensível às condições iniciais. É de notar que

esta propriedade já havia sido investigada do ponto de vista topológico por Poincaré, e descrita na sua monografia *Science and Method* de 1903.

A sensibilidade às condições iniciais leva a que uma perturbação infinitesimal nas condições iniciais de um sistema dinâmico, em tempo discreto ou contínuo, conduza à divergência/separação exponencial no decurso do tempo de órbitas inicialmente próximas. Por muitos anos esta propriedade tornou o caos indesejável, visto que reduz a previsibilidade do sistema caótico em longos períodos de tempo. No entanto, a comunidade científica foi progressivamente tomando consciência de um terceiro tipo de comportamento na dinâmica: o comportamento caótico. Algumas experiências, cujo resultado anômalo tinha sido anteriormente explicado em termos de erro experimental ou ruído introduzido, foram reavaliadas para uma explicação em termos de caos e este passou a ser objecto de um estudo matemático rigoroso. Uma medida da sensibilidade às condições iniciais é hoje quantificada pelos expoentes de Lyapunov. A entropia topológica e a entropia métrica são quantidades que, tal como os expoentes de Lyapunov, também medem a complexidade da dinâmica de um sistema.

Em meados dos anos 70, o termo "caos determinístico" foi introduzido por Li e Yorke [41] num célebre artigo *Period three implies chaos*. Nesse artigo é apresentado o estudo dos possíveis períodos em pontos periódicos de transformações reais contínuas definidas num intervalo e é provado que se uma transformação tem uma órbita periódica de período três então ela é caótica. No entanto, este resultado pode ser considerado como um corolário de um forte resultado de Sharkowski [78] apresentado num artigo escrito em russo de 1964. Esse resultado, relativo à existência de pontos periódicos para transformações contínuas, baseia-se numa certa ordem dos números naturais hoje designada por sucessão ou ordem de Sharkowski. Embora não exista uma definição formal única do termo "caos determinístico", o comportamento caótico pode ser definido como um padrão observável que se apresenta irregular e imprevisível em grandes escalas de tempo.

Muitos sistemas dinâmicos não-lineares são dependentes de parâmetros de controle num certo espaço paramétrico. Para fins aplicativos é crucial entender a evolução do comportamento qualitativo dos elementos de uma família de sistemas dinâmicos quando os parâmetros variam. A mudança qualitativa do comportamento de sistemas dinâmicos induzida por variação de um dos seus parâmetros é hoje conhecida por bifurcação. O trabalho de Poincaré – para descrever a separação das soluções de equilíbrio numa família de equações diferenciais – é pioneiro na importância dada às mudanças qualitativas/topológicas do comportamento dinâmico, e na introdução do termo "bifurcação".

No entanto, ainda não há concordância quanto ao significado rigoroso deste termo. É de salientar que a teoria de bifurcações é um tema com origens matemáticas clássicas, por exemplo nos trabalhos de Euler no século XVIII. Para esclarecer quais os possíveis "itinerários para caos", tem grande relevância um artigo [45] de May, publicado em 1976 na revista *Nature*, em que descreve a bifurcação duplicação-período na transformação logística.

Geometricamente, um atrator pode ser um único ponto, uma curva, uma variedade, ou mesmo um conjunto com estrutura fractal conhecido por atrator estranho.

A presença de um atrator caótico no espaço de fase – que tem tipicamente mergulhado no seu interior um conjunto infinito e denso de órbitas periódicas instáveis – leva a que seja impossível determinar qual a posição do sistema no atrator ao longo do tempo, mesmo conhecendo a sua posição nesse (mesmo) atrator num momento anterior. As órbitas periódicas instáveis mergulhadas no atrator caótico constituem um invariante dinâmico do sistema e, a sua investigação sistemática, permite a caracterização e a estimação de muitos outros invariantes dinâmicos tais como a medida invariante natural, o espectro de expoentes de Lyapunov e as dimensões fractais. A relação entre as trajectórias do atrator caótico e as órbitas periódicas instáveis nele mergulhadas tem sido explorada com detalhe para sistemas dinâmicos hiperbólicos, para os quais a divisão em subespaços invariantes estável e instável é consistente (robusta) sob a evolução da dinâmica [16], e sistemas não-hiperbólicos com tangências homoclínicas. O conjunto infinito de órbitas periódicas instáveis mergulhadas num atrator caótico localizado nalguma variedade invariante simétrica desempenha um papel fundamental no mecanismo de desestabilização desse atrator, pois é responsável pela dinâmica de fenómenos tais como *riddling* da bacia de atracção e *bubbling* do atrator caótico ([48],[38]).

Pode suceder que, para diferentes regiões do espaço paramétrico do sistema, existam diferentes atractores (atractores múltiplos) e, como tal, até o comportamento assintótico qualitativo do sistema depende em muito das condições iniciais estabelecidas. Mesmo em sistemas com simetria, pode ocorrer o fenómeno de multi-estabilidade, onde se verifica a coexistência de mais do que um atrator para um dado conjunto de parâmetros. Neste caso, o comportamento assintótico qualitativo do sistema não pode ser previsto pois para cada condição inicial não sabemos, em princípio, em qual dos atractores a dinâmica do sistema finalmente estabiliza.

O comportamento caótico pode ser observado em sistemas naturais e em experiências e modelos computacionais de muitas áreas científicas, revelando-se um fenómeno robusto.

A capacidade da dinâmica caótica para ampliar pequenas perturbações potencia o seu uso na obtenção de estados específicos desejados num sistema caótico, sem mudar substancialmente as suas principais propriedades dinâmicas e com um dispêndio de energia pequeno. Os desenvolvimentos em teoria de controle e de sincronização de caos são disso consequência. Estes dois processos (fenómenos) têm raízes comuns. Em ambos os processos está subjacente a ideia de intervir num sistema caótico não-linear, por escolha de regiões paramétricas a perturbar ou por condução externa, de modo a restringir o seu movimento a um subespaço acessível do espaço de fase. Em controle de caos procura-se deslocar o sistema para um conjunto invariante acessível onde os movimentos são mais regulares, enquanto em sincronização de caos se procura obter um conjunto invariante no espaço de fase do sistema ligado, o subespaço de sincronização, no qual tem lugar o movimento síncrono. Embora o conceito de sincronização de caos tenha, em geral, evoluído de forma autónoma, há uma tendência recente para unificar o estudo de controle e sincronização de caos sob a mesma rubrica.

A dinâmica de um sistema exhibe comportamento caótico quando nunca se repete a si própria e mesmo que condições iniciais estejam correlacionadas por proximidade, as trajectórias correspondentes rapidamente se tornam não-correlacionadas. Como tal, a possibilidade de obter sincronização de sistemas caóticos através de ligação apropriada pode parecer impossível. Digamos que, intuitivamente, os termos "caos" e "sincronização" são mutuamente exclusivos. Mesmo seguindo a evolução de dois sistemas caóticos idênticos que iniciem de pontos próximos no espaço de fase, mas não exactamente iguais, verificamos que divergem entre si nos seus comportamentos, embora ambos conservem o mesmo padrão de atractor caótico. Observam-se dois processos caóticos sem qualquer correlação mútua (independentes).

Por outro lado, a possibilidade de mudanças qualitativas/topológicas no comportamento dinâmico dos elementos de uma família de sistemas dinâmicos, indicadas pelos possíveis pontos de bifurcação, dificulta a sincronização de sistemas não-idênticos, mesmo que diferindo por pequenos desajustes paramétricos. Um desvio infinitesimal em qualquer um dos parâmetros pode conduzir a dinâmicas qualitativamente distintas.

Ainda, duas trajectórias já sincronizadas podem perder a estabilidade da sincronização por influência de ruído externo. Contudo, devido à propriedade ergódica das trajectórias caóticas, após um tempo transitório finito, estas ficarão de novo próximas e podem voltar a sincronizar. Neste sentido, o método de sincronização é robusto contra ruído externo pequeno.

Os estudos efectuados nas duas últimas décadas têm revelado que é falsa a ideia intuitiva de impossibilidade de sistemas caóticos se comportarem em sincronia. Na verdade, embora seja impossível reproduzir exactamente condições iniciais e parâmetros iguais, existem conjuntos de osciladores caóticos ligados em que o efeito atractivo de uma ligação suficientemente forte pode anular/compensar a tendência das trajectórias para divergirem devido à dinâmica caótica. Como resultado, é possível alcançar sincronização total em sistemas caóticos desde que sejam ligados por uma ligação dissipativa apropriada. Sincronizar sistemas caóticos é então ligá-los de modo a "forçar" que sigam a mesma trajectória no atractor caótico, por aplicação de pequenas perturbações entre os sistemas.

Em sincronização de dois sistemas caóticos é possível considerar duas configurações de ligação: unidireccional (ou direccional) e bidireccional (mútua ou global). Em ligação unidireccional um dos sistemas, designado por transporte ou mestre, interfere no outro, designado por resposta ou escravo, sem que este forneça retorno ao primeiro. A ligação bidireccional implica interacção mútua entre dois sistemas.

Sistemas dinâmicos caóticos ligados são construídos de elementos simples e de baixa-dimensão para formar novas e mais complexas organizações, com a garantia de que as características dominantes das componentes individuais subjacentes sejam mantidas, ou seja, que os dois sistemas sejam capazes de actuar de forma independente na sua maior parte, sem que um domine o outro. Esta construção "cumulativa" pode também ser usada para criar um novo sistema cujo comportamento é mais flexível e/ou rico do que as suas componentes, mas cuja análise e controle se mantenham acessíveis. O conceito de que vários sistemas, quando interagindo não-linearmente, dão origem colectivamente a novas dinâmicas que não são atribuíveis às partes componentes individuais é designado por emergência.

Não é possível prever antecipadamente as consequências de uma ligação. A introdução de ligação em sistemas caóticos pode mudar drasticamente as propriedades qualitativas da dinâmica. Ela pode estabilizar em comportamento periódico, pode produzir ocasionalmente correlações escondidas entre os elementos (embora a dinâmica seja aparentemente turbulenta), ou pode induzir a sincronização de um subconjunto das variáveis dinâmicas. A eficácia de uma ligação entre sistemas de igual dimensão decorre, em primeiro lugar, da análise da diferença entre as coordenadas respectivas das variáveis dos sistemas envolvidos, que pode ser designada por erro de sincronização. Em situação optimal, uma ligação de sistemas caóticos conduz à sua sincronização assintótica, em que o erro de sincronização converge para zero ao longo do tempo. No entanto, foi introduzida recentemente por

Stefañski e Kapitaniak [85] uma forma de sincronização menos exigente, em que apenas é esperada a estabilização do erro de sincronização abaixo de uma constante inferior a um, designada por sincronização prática no sentido de Kapitaniak. Nota-se que a dinâmica caótica introduz novos graus de liberdade em conjuntos de sistemas ligados. Contudo, quando dois ou mais osciladores caóticos são ligados e é alcançada sincronização, em geral o número de graus dinâmicos de liberdade para o sistema ligado efectivamente decresce. No entanto, as especificidades do comportamento caótico tornam impossível aplicar directamente à sincronização de sistemas caóticos os métodos desenvolvidos para sincronização de oscilações periódicas.

A sincronização de caos iniciou-se em meados dos anos 80 com os estudos de Kaneko [28] e de Afraimovich *et al.* [4] sobre a ligação de sistemas idênticos discretos e contínuos, respectivamente, evoluindo de condições iniciais diferentes. De salientar, na mesma década, os trabalhos de Fujisaka e Yamada ([90],[91]) que introduziram o estudo dos expoentes de Lyapunov transversais no sistema ligado, acentuando a ideia de como a dinâmica pode mudar com a ligação, e os de Pikovsky ([62],[63]) e Afraimovich *et al.* [4] que apresentaram muitos dos conceitos fundamentais em sincronização de caos. Só na década de 90, com os trabalhos de Pecora e Carroll ([58],[59],[13]), foi consolidada sincronização de caos como um tópico de pesquisa autónomo, a par com o estabelecimento rigoroso da teoria de controle de caos por Ott, Grebogy e Yorke [51]. Os artigos referidos mereceram, desde logo, muita atenção por parte da comunidade científica e desencadearam o desenvolvimento de vários métodos de sincronização.

Em sistemas de comunicação, especialmente os que envolvem sinais cujo comportamento futuro é difícil (ou impossível) prever durante a transmissão, algum tipo de sincronização entre transmissor e receptor é evidentemente útil. Este facto motivou os trabalhos de Pecora e Carroll ([58],[59],[13]), onde é estabelecido um método de sincronização por ligação de dois sistemas dinâmicos idênticos e caóticos por transmissão de um subsistema condutor que funciona como um sinal caótico comum entre eles. Deste modo, o método de Pecora e Carroll, também designado por substituição completa, sugere como um estado caótico sincrónico pode ser usado como um condutor em comunicação. Assim, dado um sistema caótico, a sincronização por este método exige a decomposição do sistema de modo a obter um subsistema condutor apropriado. Para tal testam-se usualmente várias combinações de um subconjunto de variáveis estado para identificar um subsistema condutor estável. Parece contra-intuitivo que um sistema não-dissipativo possa conduzir a sincronização mas, num sistema dinâmico multidimensional preservando-volume, deve

existir pelo menos uma direcção contractora de modo que volumes no espaço de fase sejam conservados, o que permite escolher um subsistema estável. Dada a possibilidade de sincronizar dois sistemas caóticos, é necessário determinar condições sob as quais tal sincronização é estável. Nesses trabalhos, além de estabelecer o mecanismo de ligação, que é relativamente directo mas ilusoriamente simples, Pecora e Carroll ([58],[59]) apresentam as primeiras respostas a esta questão.

Embora em substituição completa apenas exista um número finito de possíveis decomposições de um sistema caótico, a ideia base de Pecora e Carroll de decompor sistemas caóticos para obter um subsistema condutor, tem conduzido a outros métodos de sincronização mais gerais, sem requerer a decomposição do sistema caótico original em dois subsistemas estáveis. Kocarev e Parlitz ([35],[56]) propuseram o método de decomposição activo-passivo baseado na decomposição do sistema transporte em duas componentes, uma activa e outra passiva, e na transmissão de um sinal escalar do sistema transporte para o sistema resposta que pode ser função de um sinal informação. Diferentes réplicas da componente passiva sincronizam quando conduzidas pela mesma componente activa. Segundo Stefański e Kapitaniak [86] uma trajectória caótica de um sistema pode sincronizar com uma trajectória caótica de um sistema idêntico por adição de um termo amortecedor linear proporcional à diferença entre as variáveis estado correspondentes dos dois sistemas. Este termo funciona como um sinal de controle aplicado apenas ao sistema resposta na forma de *feedback* negativo e, como tal, a ligação diz-se por controle *feedback* negativo. A aplicação deste método a diferentes modelos experimentais, por autores como Lai e Grebogy [37], Kapitaniak [29], John e Amritkar [26], Anishchenko *et al.* [6], Ding e Ott [15], Pyragas [68] e Wu e Chua [93], mostra que é eficaz quando o sistema ligado tem um único atractor.

Segundo Fujisaka e Yamada ([90],[91]), uma maneira natural de introduzir uma ligação bidireccional entre dois sistemas idênticos e caóticos é adicionar termos de ligação lineares simétricos às expressões que os definem. Este mecanismo de ligação, que pode ser total ou parcial, é designado por ligação difusiva linear. Um estudo de Stefański [84] mostra que as propriedades de divergência e convergência exponencial em ligação total permitem estimar o maior expoente de Lyapunov de qualquer sistema dinâmico caótico, uma possibilidade que é especialmente útil em sistemas não-suaves, onde a estimação de expoentes de Lyapunov não é directa.

Conforme o exposto, existem várias configurações de ligação entre sistemas idênticos e caóticos de modo que eles se tornem sincronizados. Neste regime, designado por sincronização idêntica, as trajectórias caóticas dos sistemas idênticos e caóticos ligados

coincidem exactamente no tempo devido à forte interacção entre eles. Cada um dos sistemas mantém o seu comportamento caótico mas, quando é atingido o estado sincrónico simétrico, ou seja, quando a evolução dos seus vectores estado é coincidente, a dinâmica do sistema ligado fica restringida a um hiperplano de sincronização no espaço de fase.

Em ligação de sistemas caóticos discretos são considerados parâmetros que controlam a força de ligação entre os sistemas, tal como em ligação difusiva linear e em ligação por controle *feedback* negativo de sistemas contínuos. Conforme a estrutura dos termos de ligação envolvendo esses parâmetros, distinguem-se vários esquemas de ligação em tempo discreto: ligação dissipativa externa ou interna, ligação difusiva linear, ligação por termos quadráticos ou ligação bilinear. Os resultados de estabilidade do estado caótico sincrónico dependem dos parâmetros de ligação considerados.

Embora o fenómeno de sincronização de caos tenha sido detectado a partir de exemplos com sistemas caóticos idênticos, o comportamento destes sistemas em sincronia constitui apenas uma amostra da abundância de diferentes tipos de comportamento interdependente que podem ser detectados em sistemas caóticos ligados. Embora o regime de sincronização idêntica seja o mais corrente e com maior número de resultados teóricos, muitos trabalhos têm revelado que também é possível a sincronização de sistemas não-idênticos, definidos por leis de evolução que apenas diferem por pequenos desajustes paramétricos ou que são mesmo distintas (podendo até diferir em dimensão), caso em que se diz sincronização generalizada, em configuração bidireccional ou até unidireccional. Muitos dos esquemas de ligação entre sistemas caóticos não-idênticos são uma extensão dos conhecidos entre sistemas idênticos.

A primeira definição matemática do caos sincronizado num sentido generalizado deve-se a Afraimovich *et al.* [4], em 1986, e é baseada na existência de um homeomorfismo entre sistemas com desajustes paramétricos que relacione as projecções das trajectórias caóticas sincronizadas sobre subespaços dos espaços de fase dos sistemas transporte e resposta. No entanto, o termo "sincronização generalizada" só foi introduzido por Rulkov *et al.* [77] em 1995. Reportando à sincronização de sistemas periódicos unidireccionalmente ligados, a ideia central neste artigo, assim como no de Kocarev e Parlitz [36] de 1996, é a de tomar a capacidade de prever o estado actual do sistema resposta a partir da informação caótica medida no sistema transporte como uma definição de sincronização generalizada. A previsibilidade aponta para a existência e estabilidade de um atractor caótico do sistema ligado.

Assim, a maioria dos métodos de detecção de sincronização generalizada considera que

esta se traduz pela existência de uma relação funcional entre os sistemas, tanto melhor quanto mais regular, cujo gráfico contenha uma variedade invariante e estável, designada por variedade de sincronização, na qual esteja mergulhado o atractor caótico relativo à sincronização. Este regime de sincronização é mais fraco que o de sincronização idêntica, dado que a dependência persistente (robusta) e estável entre os vectores estado de cada um dos sistemas não é necessariamente a identidade de estados. Por outro lado, a ausência, em geral, de simetria intrínseca no sistema ligado dificulta a obtenção de um estado sincrónico estável. Nota-se que a relação funcional não tem de ser necessitadamente válida em todo o espaço de fase dos sistemas ligados, mas apenas na variedade invariante.

Nota-se que a definição original de Afraimovich *et al.* [4], embora permita um conjunto de resultados analíticos sobre estabilidade dos estados sincrónico, não é particularmente satisfatória por não fazer referência à natureza atractora do conjunto de sincronização e por exigir a verificação de condições cuja validade em experiências reais nem sempre pode ser exibida. Por outro lado, a definição apresentada por Rulkov *et al.* [77], abrange situações da física, da biologia e da economia, nas quais foi detectada sincronização de caos, em que a exigência de um homeomorfismo entre as projecções não era satisfeita. Contudo, para sistemas com dinâmica invertível, a definição de Rulkov *et al.* [77] é equivalente à existência de uma função contínua entre os estados dos sistemas quando eles estão no atractor caótico sincrónico.

Os estudos efectuados mostram que o sistema resposta é assintoticamente estável sempre que exista uma função que transforme cada trajectória no atractor do sistema transporte numa trajectória no atractor do sistema resposta, designada por função de sincronização. Neste caso, as trajectórias caóticas sincronizadas estão localizadas numa variedade de sincronização estável. Com base na equivalência entre sincronização generalizada no sistema ligado e estabilidade assintótica do sistema resposta, Abarbanel *et al.* [2] estabeleceram um critério para detecção de sincronização generalizada, designado por abordagem sistema auxiliar.

A sincronização generalizada inclui a idêntica como caso particular, em que a relação funcional é a função identidade e a variedade de sincronização é um hiperplano. No entanto, enquanto esta é facilmente visualizada na representação da diferença entre as coordenadas dos dois sistemas ligados, a detecção de sincronização generalizada não obedece a um método simples, especialmente quando se analisa informação obtida experimentalmente. Excepto em casos especiais de ligação entre sistemas com pequenos desajustes paramétricos, raramente é possível exibir fórmulas explícitas da função de sincronização

ou ter uma variedade de sincronização trivial no espaço de fase. Em geral, as oscilações caóticas sincronizadas são diferentes das geradas pelos sistemas caóticos desligados. Portanto, a analogia entre o atrator caótico síncronico e os atractores caóticos dos sistemas desligados não pode ser considerada como uma exigência para definir sincronização generalizada.

A estabilidade assintótica do sistema resposta não garante que a função de sincronização é contínua, nem sequer a existência de uma função de sincronização entre os sistemas. Têm sido observadas situações experimentais em que o sistema resposta é assintoticamente estável mas o atrator caótico para o sistema ligado tem uma estrutura complexa e a função de sincronização não é diferenciável. A dinâmica na variedade de sincronização é, em geral, bastante complexa, em consequência da falta de simetria no sistema ligado ou da não-invertibilidade do sistema transporte. Contrariamente ao verificado em sincronização idêntica, em que as trajectórias são atraídas ao plano de simetria e a variedade de sincronização é trivial, muitos sistemas reais exibem subespaços de sincronização com estruturas geométricas não-triviais inerentes ao sistema ligado: rugosidades, *cusps* ou bandas, que podem coexistir num mesmo sistema e ter um efeito prejudicial na detecção de sincronização. Diversos métodos existentes para detecção de sincronização generalizada, apresentados em [77], [60] e [80], são dificultados pela presença de tais estruturas. A ocorrência de rugosidades é provocada, em geral, pela existência de conjuntos invariantes mergulhados no subespaço de sincronização nos quais a função de sincronização ter diferentes graus de regularidade Hölder. Os diferentes expoentes Hölder, dados pelo módulo do quociente entre o expoente de Lyapunov relativo à direcção contractora transversal e o menor expoente de Lyapunov negativo do transporte, dependem da intensidade da taxa de contracção na direcção transversal ao subespaço de sincronização [23]. A presença de *cusps* decorre tipicamente da existência de pontos críticos no atrator do sistema transporte definido por uma transformação não-invertível suave. Numa vizinhança de um ponto crítico, onde a matriz Jacobiana é singular, podem existir órbitas do sistema transporte ao longo das quais a contracção é arbitrariamente grande e o subespaço de sincronização ser tipicamente não-diferenciável próximo dele. Se o sistema transporte não é invertível, a função de sincronização pode não ser contínua ou nem sequer existir como função, pois existem estados típicos do transporte que têm mais do que uma pré-imagem. No subespaço de sincronização podem então ocorrer diversas bandas, caso em que a função de sincronização é, em geral, substituída por uma relação multívoca entre os sistemas ligados, embora a resposta seja ainda assintoticamente estável. Neste caso não é possível prever

um estado da resposta pelo do transporte.

A detecção de características de sincronização generalizada com base em informação experimental, conta fortemente com a continuidade da função de sincronização e, em geral, também requer um certo grau de suavidade. Neste caso as funções no sistema ligado são desconhecidas e, quando a sincronização generalizada é estável, pode tentar-se em casos relativamente simples a construção aproximada da função de sincronização por meio de métodos numéricos. No entanto, se ocorrem desvios à dependência funcional entre os sistemas, nunca será claro se são consequência da perda de sincronização no sistema ligado ou da inexactidão da função considerada. Assim, têm surgido definições alternativas que diferem quanto às propriedades de regularidade impostas à função de sincronização e têm revelado diferentes resultados na detecção de sincronização generalizada em informação experimental. Recentemente têm sido requeridas propriedades difeomórficas por autores como Abarbanel *et al.* [2], Pyragas [70] e Hunt *et al.* [23]. Pyragas [70] distingue ainda entre dois tipos de sincronização generalizada: sincronização forte no caso de uma transformação de sincronização suave e sincronização fraca no caso contrário.

Para que a sincronização generalizada tenha interesse prático (aplicativo), ela deverá persistir sob perturbações arbitrariamente pequenas quer da ligação quer da dinâmica dos sistemas componentes. Tal como no caso de sincronização idêntica, a estabilidade da variedade de sincronização pode ser local, garantida pela negatividade dos expoentes de Lyapunov que caracterizam as perturbações transversais à variedade de sincronização (expoentes de Lyapunov transversais ou condicionados) [70] e/ou pelo estudo dos valores próprios da linearização do sistema ligado, ou global, garantida pela existência de uma função de Lyapunov (método directo de Lyapunov) [36]. Os resultados de estabilidade local da sincronização não garantem que esta se verifica quando o sistema ligado é iniciado a partir de outra condição inicial. Para averiguar a possibilidade de sincronização estável no sistema ligado, não é indiferente a escolha da condição inicial quando este possui mais do que um atractor no espaço de fase. Em contraste com o método directo de Lyapunov, o estudo dos expoentes de Lyapunov transversais é bastante directo e pode ser facilmente aplicado, mesmo em sistemas muito complicados. Contudo, tem sido apontado por Stefański e Kapitaniak [85] que, na prática, a negatividade de expoentes de Lyapunov nem sempre garante que não existam conjuntos invariantes instáveis na variedade de sincronização que possam causar perda de sincronização quando existe ruído ou pequenos desajustes paramétricos. Nota-se que, ao contrário do que se verifica em ligação unidireccional, em bidireccional os expoentes de Lyapunov de um dos sistemas

não são os mesmos que os expoentes que caracterizam as perturbações transversais. Em ligação unidireccional, o comportamento do sistema ligado na variedade de sincronização é controlado apenas pela dinâmica do sistema transporte. Quando ocorre perda de sincronização, o sistema transporte deixa de ter controle completo sobre o comportamento do sistema resposta e pequenas perturbações no sistema resposta crescerão. Embora o processo de perda de sincronização seja análogo ao verificado em sincronização idêntica, a identificação de bifurcações tipo-*bubbling* ou tipo-*blowout* pode ser dificultada pela complexidade do subespaço de sincronização. Por diferenciação contínua entre o transporte e a resposta quando a força de ligação decresce, Barreto *et al.* [10] propõem um método que permite tratar o problema usando uma decomposição baseada na identificação de órbitas periódicas instáveis do sistema transporte. É descrita a criação e evolução de um conjunto complicado de órbitas que se desenvolvem fora da variedade de sincronização, designado por conjunto emergente. É também identificado um ponto de transição crítico deste processo.

Ao longo desta tese abordamos o fenómeno de sincronização de sistemas dinâmicos caóticos em tempo contínuo e em tempo discreto.

São várias as razões que motivaram a escolha deste tema de trabalho. O fenómeno de sincronização de caos é, desde logo, interessante pelo seu elevado potencial aplicativo. Esse potencial é transversal a áreas do conhecimento tão distintas como a física, a biologia ou a economia. Consideramos sobretudo estimulante o estudo de um fenómeno que exige o ajustamento de comportamentos dinâmicos, de modo a obter um movimento caótico coincidente, e tal ser possível precisamente em sistemas dinâmicos caóticos em que a dependência sensível às condições iniciais é uma das características. A existência de algumas analogias entre sincronização e controle de caos e a possibilidade de aplicar técnicas de controle de caos como forma de otimizar os resultados de sincronização constitui mais um elemento motivador da escolha do tema. Além de tudo isto, não descuramos o facto de o fenómeno de sincronização de caos ser bastante recente na teoria não-linear de sistemas dinâmicos e ainda continuar a suscitar um elevado interesse na comunidade científica. Contudo, apesar do esforço desenvolvido na investigação deste fenómeno, muitas questões permanecem em aberto.

Apresentamos uma breve revisão de noções preliminares em dinâmica não-linear e, em particular, em sincronização de sistemas dinâmicos caóticos. Por permitir abordar as questões que consideramos essenciais no fenómeno de sincronização, todas as ligações estudadas envolvem apenas dois sistemas caóticos. Nos regimes de sincronização idêntica

e generalizada aplicamos aos sistemas de Lorenz e de Rössler, para valores paramétricos que conduzem a comportamento caótico, diversos esquemas de ligação. Averiguamos a obtenção de sincronização estável quando se procede à combinação de alguns deles com substituição parcial, em especial nos termos não-lineares do segundo sistema, ou total. Tanto quanto sabemos esta possibilidade tem sido pouco explorada. Embora em alguns esquemas apenas se conclua acerca da estabilidade local do estado síncronico, apresentamos esquemas de ligação onde a estabilidade global é garantida. As condições de estabilidade global resultam do método directo de Lyapunov, numa abordagem diferente da usual. Em tempo discreto estudamos um esquema de ligação não-linear que surge de forma natural a partir da família de transformações quadráticas complexas analíticas. Tanto quanto sabemos esta ligação não foi até agora objecto de estudo. Trata-se de uma ligação assimétrica entre transformações quadráticas reais, o que constitui um desafio acrescido. Quando não é alcançada sincronização prática mas a diferença entre as variáveis dos dois sistemas é limitada, aplicamos uma técnica de controle de caos. Obtemos sincronização idêntica e generalizada estável ao considerarmos algumas variantes da ligação original, privilegiando a ausência de simetria. Duas delas constituem uma generalização ao uso de parâmetros de ligação distintos.

Terminamos esta introdução com a apresentação da estrutura, por capítulos e secções, desta tese.

O Capítulo 1 tem o propósito de introduzir os conceitos e resultados fundamentais ao estudo da sincronização de caos e de fixar a terminologia, necessários ao trabalho de pesquisa efectuado. A Secção 1.1 consta de uma breve revisão de elementos gerais em dinâmica não-linear, tanto em tempo contínuo como em tempo discreto. Na Secção 1.2 apresentamos uma breve introdução à teoria clássica de sincronização, expondo os principais regimes de sincronização entre sistemas dinâmicos caóticos idênticos ou não. Para os regime de sincronização idêntica e generalizada, optamos por abordar a estabilidade do estado síncronico, com a determinação dos limiares de sincronização, e a transição/perda de sincronização do ponto de vista topológico apenas em ligação dissipativa externa e ligação dissipativa externa generalizada, respectivamente. Esta escolha deve-se ao facto de estes esquemas de ligação serem os mais realistas do ponto de vista aplicativo, nomeadamente na modelação de populações interligadas. Embora não sendo um dos regimes escolhido para o nosso estudo, apresentamos brevemente a sincronização de fase. Optamos por expor nesta secção apenas os elementos relativos à sincronização de sistemas caóticos discretos (a que melhor modela as ligações naturais entre populações), visto que os métodos de

sincronização em sistemas contínuos são apresentados e aplicados no Capítulo 2.

A pesquisa relatada nos Capítulos 2 centra-se na possibilidade de sincronizar assintoticamente pares arbitrários de sistemas contínuos caóticos, quer por ligação unidireccional quer por ligação bidireccional. Na Secção 2.1 descrevemos os esquemas de ligação mais usados para sincronizar dois sistemas dinâmicos contínuos idênticos e caóticos. Em ligação unidireccional apresentamos as ligações por substituição completa ou parcial, por decomposição activo-passivo, por controle *feedback* negativo e por decomposição valor singular, indicando os critérios de estabilidade respectivos. No final desta secção abordamos também a ligação difusiva linear bidireccional e descrevemos, em termos do parâmetro de ligação, as várias transições de estabilidade do atractor caótico mergulhado na variedade de sincronização considerando as bifurcações caracterizadas pelas equações do sistema ligado. A Secção 2.2 é relativa à sincronização generalizada de sistemas dinâmicos contínuos não-idênticos. Na Secção 2.3 apresentamos a aplicação dos métodos descritos aos sistemas de Lorenz (Subsecção 2.3.1) e de Rössler (Subsecção 2.3.2), tomando em cada um deles valores paramétricos que conduzem a comportamento caótico. Uma das ligações estudadas usa também o sistema hipercaótico de Rössler de dimensão quatro. Muitos dos sistemas ligados são obtidos pela combinação dos diferentes esquemas de ligação com substituição parcial, em especial nos termos não-lineares do segundo sistema, ou total. São obtidos alguns resultados de estabilidade da sincronização assintótica. Para averiguar acerca da estabilidade assintótica local, calculamos os valores próprios da equação linearizada do sistema ligado ou estudamos os expoentes de Lyapunov transversais. Construindo uma função de Lyapunov apropriada cuja derivada pode ser majorada, conseguimos exibir condições dependentes do(s) parâmetro(s) de ligação que garantem estabilidade assintótica global. Estas condições resultam da possibilidade de majorar a derivada da função de Lyapunov através de constantes que limitam as variáveis dinâmicas dos sistemas. Consta ainda desta secção uma descrição breve dos atractores caóticos dos sistemas de Lorenz e de Rössler.

No Capítulo 3 é estudada a dinâmica de sistemas caóticos discretos bidimensionais obtidos por ligação assimétrica. Na Secção 3.1 apresentamos o estudo de uma ligação que surge de forma natural a partir da família de transformações quadráticas complexas analíticas. A decomposição em partes real e imaginária de cada transformação resulta num sistema bidireccionalmente ligado de duas transformações quadráticas reais unidimensionais com parâmetros de controle distintos. O termo de ligação obtido é proporcional ao quadrado da diferença entre as variáveis dinâmicas dos sistemas componentes. No estudo

efectuado tomamos valores do parâmetro de controle que conduzem a comportamento caótico nas transformações componentes. Tanto quanto sabemos, esta ligação não foi até agora objecto de estudo. Com o objectivo de otimizar os resultados obtidos, também aplicamos ao sistema ligado uma técnica de controle, que estende o conhecido método de controle de caos de Ott-Grebog-Yorke (OGY) [51], através de uma pequena perturbação do parâmetro de ligação. Nas restantes secções deste capítulo é apresentado o estudo de algumas variantes desta ligação. Exceptuando a apresentada na Secção 3.2, todas essas variantes foram construídas com o propósito de manter a ausência de simetria. Na Secção 3.2 é considerado o caso particular da ligação entre transformações idênticas. Continuamos a considerar um único parâmetro de ligação pois pretendemos averiguar acerca das vantagens da presença de simetria no sistema ligado. Trata-se ainda de uma ligação bidireccional entre sistemas idênticos que, ao que sabemos, também não foi ainda estudada. Na Secção 3.3 apresentamos o estudo efectuado numa generalização da ligação ao caso de parâmetros de ligação distintos em cada um dos sistemas componentes. Consideramos o caso de transformações idênticas (Subsecção 3.3.1) e não-idênticas (Subsecção 3.3.2). A Secção 3.4 consta do estudo da mesma ligação mas na configuração unidireccional respectiva. Trata-se de uma ligação assimétrica embora consideremos transformações idênticas. Para todas as ligações analisamos a dinâmica do sistema ligado e, de seguida, averiguamos acerca da estabilidade assintótica local da sincronização, com base nos valores próprios da equação linearizada do sistema transversal e na estimação dos correspondentes expoentes de Lyapunov. Por análise da diferença entre as variáveis dinâmicas dos sistemas, estabelecemos alguns resultados que garantem a sua sincronização estável. As abordagens computacionais apresentadas, além de confirmarem esses resultados, elucidam acerca do estudo necessário em cada esquema de ligação para determinar os valores paramétricos que conduzem a sincronização estável.

Capítulo 1

Noções preliminares em dinâmica não-linear e sincronização de caos

Este capítulo tem por objectivo introduzir os conceitos e resultados fundamentais ao estudo da sincronização de sistemas dinâmicos caóticos, necessários nos capítulos seguintes, e fixar notação. Iniciamos com uma revisão de elementos gerais em dinâmica não-linear, tanto para sistemas dinâmicos discretos como contínuos. Prosseguimos a primeira secção com uma abordagem sobre conjuntos invariantes e questões relativas à sua estabilidade. Apresentamos algumas definições de conjunto atractor e o fenómeno de bacias de atracção *riddled*. Para uma melhor compreensão do comportamento caótico, definimos os expoentes de Lyapunov e a entropia topológica. Finalizamos com a descrição de algumas bifurcações frequentes na perda de sincronização, entre as quais a bifurcação *blowout* e a *bubbling*. Quando conveniente os conceitos e resultados são dados em separado para tempo discreto e para tempo contínuo. Na segunda secção expomos alguns dos regimes de comportamento caótico sincronizado: sincronização idêntica, generalizada e de fase. São também abordadas a estabilidade do estado síncronico, com a determinação dos limiares de sincronização, e a transição de sincronização do ponto de vista topológico. Nesta secção os conceitos e resultados são apresentados para sistemas dinâmicos discretos, visto que os correspondentes para sistemas autónomos contínuos são análogos, com as devidas adaptações.

1.1 Generalidades em sistemas dinâmicos

No que segue apresentam-se algumas generalidades sobre sistemas dinâmicos. A teoria clássica de sistemas dinâmicos consiste na análise das propriedades qualitativas e

do comportamento assintótico dos sistemas. Para sistemas dinâmicos não-lineares, onde o princípio da sobreposição não é válido, os conceitos baseados em tempo finito perdem alguma da sua importância e dão lugar ao estudo dos estados assintóticos, definidos em termos de conjuntos limite.

1.1.1 Sistemas dinâmicos

Definição 1.1.1 *Um sistema dinâmico S é um triplo (X, T, ϕ^t) , onde T é um conjunto tempo com estrutura de grupo, o conjunto X é um espaço de estados e $\phi^t : X \rightarrow X$ é uma lei de evolução parametrizada em $t \in T$ que satisfaz as propriedades:*

$$(S1) \quad \phi^0 = id_X,$$

$$(S2) \quad \phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s, \forall t, s \in T, \text{ sempre que ambos os membros da igualdade estão definidos.}$$

Seguindo a tradição da mecânica clássica, é usual designar X por espaço de fase. Para que exista uma estrutura natural que permita a comparação entre os estados, X é tomado como um espaço métrico completo. Conforme a dimensão de X o sistema dinâmico S diz-se de dimensão finita ou infinita.

Quando $T \subseteq \mathbb{Z}$ o sistema dinâmico S diz-se discreto e quando $T \subseteq \mathbb{R}$ diz-se contínuo. Para cada $t \in T$, a lei de evolução ϕ^t está definida no espaço de fase X e transforma um estado inicial $\mathbf{x}_0 \in X$ no estado $\mathbf{x}_t \in X$, ou seja, $\mathbf{x}_t \equiv \phi^t(\mathbf{x}_0)$. Os sistemas dinâmicos com ϕ^t definida para $t \geq 0$ e para $t < 0$ dizem-se invertíveis. Se S é invertível então o estado inicial $\mathbf{x}_0$ não define apenas os estados futuros mas também os passados.

Uma órbita do sistema $S = (X, T, \phi^t)$ com ponto inicial $\mathbf{x}_0$ é o subconjunto ordenado do espaço de fase X , denotado por $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$, definido como

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} = \phi^t(\mathbf{x}_0), t \in T\}$$

para os valores de t em que $\phi^t(\mathbf{x}_0)$ está definida. Cada órbita $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ de S é o subconjunto do espaço de fase dos pontos relacionados com $\mathbf{x}_0$ pela lei de evolução ϕ^t . Se $\mathbf{y}_0 = \phi^t(\mathbf{x}_0)$ para algum $t \in T$, as órbitas $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ e $\mathcal{O}(\mathbf{y}_0)$ coincidem. Assim, o conjunto de todas as órbitas de S constitui uma partição de X visto que órbitas diferentes não se intersectam em X .

Quando $T = \mathbb{N}_0$ o sistema dinâmico S fica univocamente determinado por uma única transformação $\mathbf{f} \equiv \phi^1$. Dado $\mathbf{x} \in X$, a lei de evolução do sistema S pode ser escrita como uma equação às diferenças,

$$(1.1) \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \equiv \mathbf{f}^n(\mathbf{x})$, indicando que $\mathbf{f}$ transforma cada estado $\mathbf{x}_n$ no estado seguinte $\mathbf{x}_{n+1}$. O sistema (1.1) é linear se a transformação $\mathbf{f}$ o for. Dada uma condição inicial $\mathbf{x}_0 \in X$, a órbita (trajectória) de $\mathbf{x}_0$ é definida por

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}_0), \dots\} = \{\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)\}_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Se S é invertível então a órbita de $\mathbf{x}_0 \in X$ é a sequência bilateral infinita

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{\dots, \mathbf{f}^{-2}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}_0), \dots\} = \{\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Quando $T = \mathbb{R}$ o sistema dinâmico é muitas vezes definido por um sistema de equações diferenciais. Suponha o espaço de fase $X \subseteq \mathbb{R}^m$ com vectores estado $\mathbf{x}$ de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Dado um campo vectorial $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : X \rightarrow X$ com um certo grau de regularidade, a equação diferencial

$$(1.2) \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

define um sistema dinâmico contínuo. Se $\mathbf{f}$ não depende de t , então o sistema (1.2) diz-se autónomo e o tempo inicial pode ser tomado como $t_0 = 0$. O sistema contínuo (1.2) é linear se o campo vectorial $\mathbf{f}$ o for.

Suponha que o campo vectorial $\mathbf{f}$ em (1.2) está definido numa região aberta U de $\mathbb{R}^m$ e é suave. Para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, existe uma única função

$$\phi \equiv \phi_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

suave em $(\mathbf{x}, t)$ tal que $\phi(\mathbf{x}_0, 0) = \mathbf{x}_0$ e, para certo intervalo $I = (-\delta_1, \delta_2) \subseteq \mathbb{R}$, com $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(\mathbf{x}_0) > 0$, tem-se

$$\phi(\mathbf{x}_0, t) \in U \quad \text{e} \quad \dot{\phi}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(\phi(\mathbf{x}_0, t))$$

onde $t \in I$ e $\dot{\phi}(\mathbf{x}_0, t)$ denota a derivada de ϕ relativamente a $\mathbf{x}$ calculada em $\mathbf{x}_0$. O grau de regularidade de $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ relativamente a $\mathbf{x}_0$ é o mesmo que o de $\mathbf{f}$ como função de $\mathbf{x}$. A função $\phi(\mathbf{x}_0, t)$, considerada como uma função de t , diz-se a solução de (1.2) para a condição inicial $\mathbf{x}_0$. Assim, para cada $\mathbf{x}_0 \in U$, está definida univocamente a curva solução em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$

$$C(\mathbf{x}_0) \equiv \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid \mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_0, t), t \in I\},$$

e a órbita de $\mathbf{x}_0$ (ou trajectória através de $\mathbf{x}_0$) como a sua projecção sobre o espaço de fase,

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x} = \phi(\mathbf{x}_0, t), t \in I\}.$$

Ambas as curvas são parametrizadas em t e orientadas no sentido de t crescente. O vector $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ é tangente à curva solução $C(\mathbf{x}_0)$ em $\mathbf{x}_0$. A órbita $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$ evolui para fora da região U em $t = -\delta_1$ (e/ou em $t = \delta_2$), ou permanece em U para sempre; neste último caso pode tomar-se $I = \mathbb{R}$. É então possível considerar a transformação $\phi^t : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\phi^t(\mathbf{x}_0) \equiv \phi(\mathbf{x}_0, t)$, que atribui a $\mathbf{x}_0$ o ponto, na órbita de $\mathbf{x}_0$, obtido ao fim de t unidades de tempo. Verificam-se as propriedades **(S1)** e **(S2)** e, portanto, $S = (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}, \phi^t)$ é um sistema dinâmico contínuo invertível. Cada transformação ϕ^t está definida para $\mathbf{x} \in U$ e $t \in I$, onde I depende de $\mathbf{x}_0$ e é suave em $\mathbf{x}$. A família 1-parâmetro de aplicações $\phi^t : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se o fluxo local gerado pelo campo vectorial $\mathbf{f}$.

Do ponto de vista computacional, as equações às diferenças são frequentemente mais acessíveis do que os fluxos, visto que um computador pode calcular com grande precisão os pontos da órbita para qualquer condição inicial. Em geral, na obtenção das soluções num fluxo, está subjacente um integrador numérico que transforma efectivamente o fluxo numa transformação e resolve uma versão discreta do sistema contínuo.

O tipo de comportamento assintótico mais simples é representado pela convergência dos estados de uma órbita para um estado particular.

Definição 1.1.2 *Seja $S = (X, T, \phi^t)$ um sistema dinâmico definido num compacto X de dimensão finita por $\phi^t : X \rightarrow X$ contínua. Dado $\mathbf{x} \in X$, um ponto $\mathbf{x}_\infty$ diz-se ω -limite de $\mathbf{x}$ se existe uma sucessão $\{t_k\}_k \subset T$ tal que $t_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ e*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{t_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_\infty.$$

O conjunto de todos os pontos ω -limite de $\mathbf{x}$ para o sistema S diz-se o conjunto ω -limite de $\mathbf{x}$ e é denotado por $\omega(\mathbf{x}, \phi^t)$.

O conjunto ω -limite $\omega(\mathbf{x}, \phi^t)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita de $\mathbf{x}$ e pode ser escrito como

$$\omega(\mathbf{x}, \phi^t) = \bigcap_{t \geq 0} \text{cl} \bigcup_{s \geq t} \{\phi^s(\mathbf{x})\}$$

(onde $\text{cl}(A)$ denota o fecho do conjunto A). O conjunto dos pontos recorrentes de ϕ^t , denotado por $\text{Rec}(\phi^t)$, é dado como

$$\text{Rec}(\phi^t) = \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{x} \in \omega(\mathbf{x}, \phi^t)\}.$$

São válidas as seguintes propriedades:

(L1) Para $T = \mathbb{N}_0$, se $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ é limitada então $\omega(\mathbf{x}, \phi^t)$ é conexo;

(L2) Se $y = \phi^t(\mathbf{x})$ para um certo $t \in T$ então $\omega(\mathbf{x}, \phi^t) = \omega(\mathbf{y}, \phi^t)$;

(L3) Se $y \in \omega(\mathbf{x}, \phi^t)$ então $\omega(\mathbf{y}, \phi^t) \subset \omega(\mathbf{x}, \phi^t)$.

O conjunto ω -limite do sistema dinâmico S define-se como o fecho do conjunto de todos os conjuntos ω -limite,

$$\omega(\phi^t) = \text{cl} \left(\bigcup_{\mathbf{x} \in X} \omega(\mathbf{x}, \phi^t) \right).$$

Se ϕ^t é um homeomorfismo podem ainda ser definidos pontos limite e conjuntos limite tempo-inverso designados por pontos e conjuntos α -limite. As definições são análogas às apresentadas substituindo $t_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$ por $t_k \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. É válida a igualdade

$$\alpha(\mathbf{x}, \phi^t) = \omega(\mathbf{x}, (\phi^t)^{-1}).$$

Um ponto $\mathbf{x} \in X$ diz-se errante (ou não-recorrente) se, existe uma vizinhança aberta U de $\mathbf{x}$ e um tempo t' tal que, para $t > t'$, se verifica

$$\phi^{t'}(U) \cap U = \emptyset.$$

Um conjunto errante é uma colecção de pontos errantes. Quando um sistema dinâmico tem um conjunto errante de medida positiva, então a lei de evolução ϕ^t do sistema diz-se dissipativa (e o sistema S diz-se dissipativo). Caso contrário, a lei ϕ^t diz-se conservativa (e o sistema S diz-se conservativo). O conceito de conjunto errante formaliza uma certa ideia de "mistura" no sistema dinâmico.

Definição 1.1.3 *Os sistemas dinâmicos $S = (X, T, \phi^t)$ e $S' = (Y, T, \psi^t)$ dizem-se topologicamente (ou qualitativamente) equivalentes se existe um homeomorfismo $\mathbf{h} : X \rightarrow Y$ que aplica órbitas de S em órbitas de S' e uma função reparametrização $\gamma : T \times X \rightarrow T$ tal que*

$$(\mathbf{h} \circ \phi^{\gamma(t, \mathbf{x})})(x) = (\psi^t \circ \mathbf{h})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad \forall t \in T$$

onde, para cada $\mathbf{x}$ fixado, é assumido que $\gamma(t, \mathbf{x})$ é monótona crescente em t e sobrejectiva em T .

Os retratos de fase de sistemas topologicamente equivalentes também se dizem topologicamente equivalentes. Quando não é exigida a existência da função γ mas apenas de um homeomorfismo que aplique órbitas de S em órbitas de S' ,

$$\phi^t(\mathbf{x}) = (\mathbf{h}^{-1} \circ \psi^t \circ \mathbf{h})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X, \quad \forall t \in T,$$

não são preservadas muitas das propriedades geométricas do retrato de fase (em particular a orientação no tempo) e os sistemas dizem-se topologicamente conjugados, sendo $\mathbf{h}$ uma conjugação topológica entre eles. Se $\mathbf{h}$ não é um homeomorfismo mas apenas uma função sobrejectiva contínua tal que $\mathbf{h} \circ \phi^t = \psi^t \circ \mathbf{h}$, então os sistemas S e S' dizem-se topologicamente semi-conjugados.

Se $S = (X, \mathbb{Z}, \phi^1 \equiv \mathbf{f})$ e $S' = (Y, \mathbb{Z}, \psi^1 \equiv \mathbf{g})$ são sistemas topologicamente equivalentes através de um homeomorfismo $\mathbf{h} : X \rightarrow Y$, então é válida a igualdade de funções

$$(1.3) \quad \mathbf{f} = \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g} \circ \mathbf{h}.$$

As transformações $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ dizem-se topologicamente conjugadas. A conjugação topológica define uma relação de equivalência muito útil em teoria de sistemas dinâmicos, pois cada classe contém todas as transformações que partilham a mesma dinâmica do ponto de vista topológico. Se os homeomorfismos $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}^{-1}$ são de classe C^k , $0 \leq k \leq r$, as transformações $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ dizem-se C^k -conjugadas. Para $k \geq 1$ as transformações C^k -conjugadas (e os correspondentes retratos de fase) dizem-se suavemente conjugadas ou difeomorfas. Dois sistemas discretos difeomorfos podem ser considerados como o mesmo sistema mas escrito em diferentes sistemas de coordenadas e $\mathbf{h}$ pode ser entendido como a mudança de coordenadas suave entre eles.

Definição 1.1.4 *Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido numa variedade suave compacta X por uma transformação $\mathbf{f}$ de classe C^r , $r \geq 1$. Diz-se que $\mathbf{f}$ é C^k -estruturalmente estável se existe uma vizinhança U de $\mathbf{f}$ no espaço dos homeomorfismos de X , $\text{Homeo}(X)$, munido da topologia C^r , tal que cada elemento de U é topologicamente conjugado a $\mathbf{f}$ através de um homeomorfismo $\mathbf{h}$ de classe C^k , $1 \leq k \leq r$.*

Enquanto em tempo discreto a conjugação topológica $\mathbf{h}$ pode ser vista como uma relação de equivalência, em tempo contínuo é exigida a noção de equivalência topológica. Para sistemas dinâmicos contínuos $S = (X, \mathbb{R}, \phi^t)$ e $S' = (Y, \mathbb{R}, \psi^t)$ não basta exigir que as órbitas de ϕ^t sejam aplicadas homeomorficamente em órbitas de ψ^t . É necessário que as aplicações ϕ^t e ψ^t sejam topologicamente conjugadas para cada t , ou seja,

$$h(\mathcal{O}(\mathbf{x}; \phi)) = \{h(\phi^t(\mathbf{x})) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\psi^t(h(\mathbf{x})) \mid t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{O}(h(\mathbf{x}); \psi),$$

para cada órbita $\mathcal{O}(\mathbf{x}; \phi)$ de $\mathbf{x} \in X$ por ϕ^t , e que seja preservada a orientação das órbitas. Assim é a equivalência topológica que fornece uma partição do conjunto de todos os fluxos

em X em classes de equivalência de fluxos que partilham a mesma dinâmica, ainda do ponto de vista topológico.

Para sistemas dinâmicos contínuos S e S' topologicamente equivalentes definidos em $X \subseteq \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, respectivamente, não existe uma relação explícita entre $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ análoga à fórmula (1.3) obtida no caso discreto. Contudo existem pelo menos dois casos particulares de equivalência topológica que podem ser expressos analiticamente [34].

Tal como em tempo discreto, pode ser considerada a seguinte relação, com vista à análise da robustez de um sistema dinâmico contínuo a pequenas perturbações.

Definição 1.1.5 *Seja $S = (X, \mathbb{R}, \phi^t)$ um sistema dinâmico definido numa variedade suave X por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ onde $\mathbf{f}$ é de classe C^r , $r \geq 1$. O campo vectorial $\mathbf{f}$ diz-se C^k -estruturalmente estável se existe uma vizinhança U de $\mathbf{f}$ no espaço $\mathbf{f}^r(X)$ dos campos vectoriais de classe C^r , munido da topologia C^r , tal que cada campo vectorial em U gera um fluxo em X topologicamente equivalente ao fluxo gerado por $\mathbf{f}$ através de um homeomorfismo $\mathbf{h}$ de classe C^k , $1 \leq k \leq r$.*

1.1.2 Conjuntos invariantes e sua estabilidade

Seja $S = (X, T, \phi^t)$ um sistema dinâmico. Um ponto $\mathbf{x}^* \in X$ diz-se um ponto de equilíbrio ou um ponto fixo se, para todo o $t \in T$,

$$\phi^t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*.$$

A órbita de $\mathbf{x}^*$ consiste num único ponto e diz-se constante. Em geral, o termo "ponto de equilíbrio" é usado para sistemas contínuos e o termo "ponto fixo" para discretos.

Um ponto $\mathbf{x}^* \in X$ diz-se periódico se, para algum $t' > 0$ e para todo o $t \in T$, é válida a igualdade

$$\phi^{t+t'}(\mathbf{x}^*) = \phi^{t'}(\mathbf{x}^*).$$

O menor número t' que satisfaz esta condição diz-se o período do ponto periódico $\mathbf{x}^*$. A órbita de $\mathbf{x}^*$ diz-se periódica (ou ciclo). Se o sistema S inicia num ponto $\mathbf{x}$ de um ciclo, ele retorna a esse ponto após cada t' unidades de tempo.

Quando $T = \mathbb{N}_0$, uma órbita periódica da equação às diferenças (1.1) de período N é um conjunto finito de pontos

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}_n = \mathbf{f}^n(\mathbf{x}^*) \mid n = 0, 1, \dots, N-1\},$$

com $\mathbf{f}^N(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ e $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}^*) \neq \mathbf{x}^*$ para todo o $0 < n < N$. Se $N = 1$, $\mathbf{x}^*$ é um ponto fixo. O conjunto dos pontos periódicos de $\mathbf{f}$ é denotado por $Per(\mathbf{f})$ e o número de pontos periódicos de $\mathbf{f}$ de período N (não necessariamente mínimo) por $P_N(\mathbf{f})$. Identificar os pontos periódicos de período N de um sistema dinâmico discreto, ou seja, resolver a equação $\mathbf{f}^N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, pode ser uma tarefa difícil; por exemplo, para uma função quadrática, corresponde a resolver uma equação polinomial de grau 2^N . Quando não é possível a determinação explícita dos pontos periódicos, podem ser aplicadas técnicas analíticas que averiguem acerca da sua existência. Um ponto $\mathbf{x}^* \in X$ diz-se eventualmente periódico de período N se não é periódico mas existe $k > 0$ tal que

$$\mathbf{f}^{N+i}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{f}^i(\mathbf{x}^*)$$

para todo o $i \geq k$, ou seja, $\mathbf{f}^i(\mathbf{x}^*)$ é periódico para $i \geq k$. Um ponto $\mathbf{x} \in X$ diz-se aperiódico se $\mathbf{f}^{n_1}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{f}^{n_2}(\mathbf{x})$ sempre que $n_1 \neq n_2$. Seja d a métrica tomada em X . Dado um ponto aperiódico $\mathbf{x}^*$, um ponto $\mathbf{x} \in X$ diz-se assintótico para $\mathbf{x}^*$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\mathbf{f}^n(\mathbf{x}), \mathbf{f}^n(\mathbf{x}^*)) = 0.$$

Considere agora $T = \mathbb{R}_+^0$. Se $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ é um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico suave definido por (1.2) então $\mathbf{x}^*$ é um zero do campo vectorial $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{x}^*$ é um ponto periódico, a órbita de $\mathbf{x}^*$ é uma curva fechada. Neste caso o ponto $\mathbf{x}^*$ não é o único ponto periódico de $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$: se $\mathbf{x}^*$ é periódico de período t' e $\mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$, então $\mathbf{x}$ também é um ponto periódico com o mesmo período. Se numa vizinhança de uma órbita periódica $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ não existem outras órbitas periódicas, ou seja, se existe um ponto $\mathbf{x} \notin \mathcal{O}$ tal que $\omega(\mathbf{x}, \phi^t) = \mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$, então $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ diz-se isolada ou um ciclo limite. Em particular, o conjunto ω -limite de um ponto $\mathbf{x}$ pertencente a um ciclo limite no plano é a curva fechada dos pontos da trajectória $\phi^t(\mathbf{x})$ difeomorfa à circunferência unitária $\mathcal{S} \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ do plano complexo.

Definição 1.1.6 *Seja d a métrica tomada em X e $\mathbf{x}^*$ um ponto periódico do sistema S . O conjunto dos pontos assintóticos para $\mathbf{x}^*$ definido como*

$$W^s(\mathbf{x}^*) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid d(\phi^t(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{x}^*)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

diz-se o conjunto estável de $\mathbf{x}^$. Se o sistema S é invertível, define-se analogamente o conjunto dos pontos assintóticos para $\mathbf{x}^*$ como*

$$W^u(\mathbf{x}^*) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid d(\phi^{-t}(\mathbf{x}), \phi^{-t}(\mathbf{x}^*)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\},$$

designado por conjunto instável de $\mathbf{x}^$.*

Os conjuntos estável e instável de um ponto periódico $\mathbf{x}^*$ verificam $\phi^t(W^{s,u}(\mathbf{x}^*)) \subseteq W^{s,u}(\mathbf{x}^*)$, para todo o $t \in T$.

Definição 1.1.7 *Um subconjunto $\mathcal{A}$ do espaço de fase de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se ϕ^t -absorvente se $\phi^t(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$, e diz-se ϕ^t -invariante se $\phi^t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.*

Qualquer órbita de S é um conjunto invariante. Por outro lado um subconjunto invariante consiste em órbitas do sistema. Para a métrica tomada em X podem considerar-se conjuntos invariantes fechados em X . Os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas são os exemplos mais simples de conjuntos invariantes fechados. Os sistemas dinâmicos diferenciáveis invertíveis muito simples podem exibir conjuntos invariantes fechados extremamente complexos, contendo um número infinito de órbitas periódicas e não-periódicas. Se X é compacto, os conjuntos α - e ω -limite são exemplos de conjuntos invariantes compactos não-vazios.

Define-se o conjunto estável e instável de um conjunto invariante $\mathcal{A} \subset X$ como

$$W^s(\mathcal{A}) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid d(\phi^t(\mathbf{x}), \phi^t(\mathcal{A})) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(\mathcal{A}) \equiv \{x \in X \mid d(\phi^{-t}(\mathbf{x}), \phi^{-t}(\mathcal{A})) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

de que são casos particulares os conjuntos invariantes $W^{s,u}(\mathbf{x}^*)$ de um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$.

Se uma órbita é ligeiramente perturbada, a evolução daí decorrente pode não diferir demasiado da relativa à órbita original não perturbada. No entanto o efeito da perturbação também pode ser progressivamente eliminado com o decorrer do tempo. Em causa estão diferentes noções de estabilidade em sistemas dinâmicos. Seguem-se as definições para o caso mais geral de conjuntos invariantes.

Definição 1.1.8 *Seja d a métrica definida em X para um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$. A órbita de um ponto $\mathbf{x} \in X$ diz-se:*

(E1) *Lyapunov estável ou estável se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$d(\phi^t(\tilde{\mathbf{x}}), \phi^t(\mathbf{x})) < \epsilon$$

sempre que $d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) < \delta(\epsilon)$; caso contrário, a órbita de $\mathbf{x}$ diz-se instável.

(E2) *assimptoticamente estável ou atractora se é Lyapunov estável e existe um $\xi > 0$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^t(\tilde{\mathbf{x}}), \phi^t(\mathbf{x})) = 0$$

sempre que $d(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) < \xi$.

Define-se a bacia de atracção de uma órbita atractora $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ como

$$\mathcal{B}(\mathcal{O}(\mathbf{x})) = \{\tilde{\mathbf{x}} \in X \mid \omega(\tilde{\mathbf{x}}, \phi^t) = \mathcal{O}(\mathbf{x})\}.$$

A Definição 1.1.8 é generalizável a qualquer conjunto invariante $\mathcal{A} \subset X$. As órbitas periódicas assimptoticamente estáveis são exemplos de ciclos limite. Um sistema dinâmico S que possui uma órbita periódica assimptoticamente estável diz-se um oscilador.

Se um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é assimptoticamente estável ou atractor então é Lyapunov estável e existe um $\delta > 0$ tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) < \delta$ implica

$$\omega(\mathbf{x}, \phi^t) = \{\mathbf{x}^*\}.$$

Conforme se expõe de seguida, em separado para tempo discreto e tempo contínuo, o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio num sistema não-linear baseia-se no sinal dos valores próprios da linearização do sistema em torno desse ponto – o método de linearização – ou na análise de uma função de Lyapunov apropriada – o método directo de Lyapunov. Em alguns casos, pode ser feito o estudo quantitativo determinando os vectores próprios associados a cada valor próprio. Quando é possível obter uma função de Lyapunov, esta fornece uma caracterização global da estabilidade.

Tempo discreto. Considere a equação às diferenças (1.1) definida num subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo não-linear $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ de classe C^r com $r \geq 1$. Dado um ponto periódico do sistema, existem condições suficientes para a sua estabilidade assimptótica em termos da transformação linear associada à sua órbita.

Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto periódico de $\mathbf{f}$ de período N . Os pontos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ da órbita de $\mathbf{x}^*$ são pontos fixos da transformação $\mathbf{f}^N$. Pode associar-se à N -ésima iterada $\mathbf{f}^N$ a transformação linear em $\mathbb{R}^m$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{Df}^N(\mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{y}_n$$

para $j = 1, \dots, N$, onde $\mathbf{Df}^N(\mathbf{x}_j)$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}^N$ calculada em $\mathbf{x}_j$. Os valores próprios da matriz $\mathbf{Df}^N(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \dots, N$, são os mesmos em cada ponto $\mathbf{x}_j$ da órbita de $\mathbf{x}^*$.

Considere a circunferência unitária $\mathcal{S}$ do plano complexo. No que segue denota-se por n_0 o número de valores próprios situados em $\mathcal{S}$ e por n_- (n_+) o número de valores próprios no interior (exterior) de $\mathcal{S}$.

Teorema 1.1.1 *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto periódico de período N do sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ onde $\mathbf{f}$ é um difeomorfismo de classe C^r com $r \geq 1$. Se a matriz Jacobiana $\mathbf{A} \equiv \mathbf{Df}^N(\mathbf{x}^*)$ corresponde $n_0 = 0$, então a estabilidade assintótica do ponto fixo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ da transformação linear $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}_n$ corresponde à estabilidade assintótica de $\mathbf{x}^*$.*

Se $n_0 \neq 0$ a estabilidade não pode ser facilmente determinada com base na matriz $\mathbf{Df}^N(\mathbf{x}^*)$. A proposição seguinte estabelece a estabilidade assintótica de um ponto fixo único quando $n_0 = n_+ = 0$.

Proposição 1.1.1 *Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por uma difeomorfismo $\mathbf{f}$ de classe C^r com $r \geq 1$. Se $\mathbf{x}^*$ é o único ponto fixo de S , então $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável se os valores próprios de $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ verificam $n_0 = n_+ = 0$.*

Em sistemas dinâmicos não-lineares que não são definidos por uma contracção, podem existir mais do que um ponto fixo. Neste caso, nenhum dos pontos fixos tem estabilidade assintótica global. Quando existem vários pontos fixos assintoticamente estáveis, diz-se que o sistema exibe multiestabilidade.

Os pontos fixos de um difeomorfismo $\mathbf{f}$ definido em $X \subset \mathbb{R}^m$ correspondem à intersecção do gráfico de $\mathbf{f}$, $\text{Graf}(\mathbf{f}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in X \times X \mid \mathbf{x} \in X\}$, com a diagonal principal $D = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\}$.

Duas subvariedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ de $\mathbb{R}^m$ dizem-se transversais em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, e denota-se por $\mathcal{M} \pitchfork_{\mathbf{x}} \mathcal{N}$, se $\mathbf{x} \notin \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ ou $\mathcal{T}_x \mathcal{M} + \mathcal{T}_x \mathcal{N} = \mathcal{T}_x \mathbb{R}^m$, onde $\mathcal{T}_x \mathcal{M}$ é o plano tangente de $\mathcal{M}$ no ponto $\mathbf{x}$. As subvariedades $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ dizem-se transversais entre si, $\mathcal{M} \pitchfork \mathcal{N}$, se $\mathcal{M} \pitchfork_{\mathbf{x}} \mathcal{N}$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

Definição 1.1.9 *Seja $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ uma transformação diferenciável. Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ de $\mathbf{f}$ diz-se transversal se $\text{Graf}(\mathbf{f}) \pitchfork_{\mathbf{x}^*} D$ em $X \times X$.*

A persistência de tais pontos fixos está relacionada com a Proposição 1.1.1 e é exposta na proposição seguinte.

Proposição 1.1.2 *Seja $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ uma transformação diferenciável. Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ é transversal se e só se $\Lambda = 1$ não é um valor próprio da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$.*

Um outro método para determinar a estabilidade de um ponto fixo baseia-se no conceito de função de Lyapunov. Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido em $X \subset \mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo $\mathbf{f}$. A função $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 diz-se uma função de Lyapunov (fraca) para S numa vizinhança aberta U de $\mathbf{x}^*$ contida em X se $\mathbf{L}(\mathbf{x}^*) = 0$,

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{e} \quad (\mathbf{L} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) \leq \mathbf{L}(\mathbf{x})$$

para todo o $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, e $(\mathbf{L} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}^*) = \mathbf{L}(\mathbf{x}^*)$. Segue da definição que $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$, ou seja, que $\mathbf{x}^*$ é um ponto fixo de $\mathbf{f}$. Se é ainda válido $(\mathbf{L} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) < \mathbf{L}(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, então $\mathbf{L}$ diz-se uma função de Lyapunov estrita (forte ou completa).

Teorema 1.1.2 (Método directo de Lyapunov) *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo do sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ definido em $X \subset \mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo $\mathbf{f}$. Se existe uma vizinhança U de $\mathbf{x}^*$ e uma função de Lyapunov $\mathbf{L} : U \rightarrow \mathbb{R}$ para o sistema S , então $\mathbf{x}^*$ é Lyapunov estável. Se existe uma função de Lyapunov estrita então $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável.*

A estabilidade garantida pelo método directo de Lyapunov não é local visto que a bacia de atracção de $\mathbf{x}^*$ contém todo o conjunto aberto U . Além disso, se é possível considerar $U = X$, então $\mathbf{x}^*$ diz-se globalmente assintoticamente estável.

Segue-se a definição de ponto fixo hiperbólico. Como um ponto periódico de período N é um ponto fixo para $\mathbf{f}^N$, para o propósito de análise local é suficiente considerar apenas pontos fixos hiperbólicos.

Definição 1.1.10 *Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ onde $\mathbf{f}$ é um difeomorfismo de classe C^1 . Um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ diz-se hiperbólico se a matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ corresponde $n_0 = 0$.*

Dada a invertibilidade de $\mathbf{f}$, a matriz $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ não tem valores próprios nulos. Visto que uma matriz genérica não tem valores próprios com módulo 1, a hiperbolicidade é uma propriedade frequente em sistemas dinâmicos discretos. Um ponto fixo hiperbólico é transversal, mas o inverso não é necessariamente verdade.

Se $\mathbf{x}^*$ é um ponto periódico de período N , então $\mathbf{x}^*$ é hiperbólico se a matriz Jacobiana $\mathbf{Df}^N(\mathbf{x}^*)$ verifica $n_0 = 0$. Um ponto periódico hiperbólico diz-se uma sela se $n_+ \neq 0$ e $n_- \neq 0$, e diz-se um nodo ou ponto periódico atractor (foco ou ponto periódico repulsor) se $n_- = m$ ($n_+ = m$), onde m é a dimensão do espaço de fase.

Teorema 1.1.3 (de Hartman-Grobman) *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo hiperbólico do sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo $\mathbf{f}$ de classe C^r com $r \geq 1$. Então, existem vizinhanças U de $\mathbf{x}^*$ e V de $\mathbf{0}$ e um homeomorfismo $\mathbf{h} : V \rightarrow U$ tais que*

$$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})(\mathbf{x}) = (\mathbf{h} \circ \mathbf{Df})(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Corolário 1.1.1 *Nas condições do teorema anterior, se $\mathbf{x}^*$ é uma sela ou um foco então $\mathbf{x}^*$ não é Lyapunov estável (é instável). Se $\mathbf{x}^*$ é um nodo então $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável.*

Nas condições do Teorema de Hartman-Grobman, o espaço tangente de X em $\mathbf{x}^*$ pode ser decomposto na soma directa (de Whitney)

$$(1.4) \quad \mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} X = E_{\mathbf{x}^*}^u \oplus E_{\mathbf{x}^*}^s$$

de dois subespaços $E_{\mathbf{x}^*}^u$ e $E_{\mathbf{x}^*}^s$ invariantes para $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$, tais que os vectores de $E_{\mathbf{x}^*}^s$ ($E_{\mathbf{x}^*}^u$) verificam propriedades de contracção (expansão), para certas constantes reais $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$. O subespaço $E_{\mathbf{x}^*}^s$ ($E_{\mathbf{x}^*}^u$) é o subespaço próprio generalizado gerado pelos valores próprios Λ_i , $i = 1, \dots, m$, da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ com $|\Lambda_i| < 1$ ($|\Lambda_i| > 1$) e, como tal, diz-se o espaço próprio estável (instável). Se existe uma decomposição (1.4) para cada $\mathbf{x} \in X$, o difeomorfismo $\mathbf{f}$ diz-se uniformemente hiperbólico ou de Anosov.

Teorema 1.1.4 (Variedades estável e instável locais) *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto fixo hiperbólico do sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ definido num aberto X de $\mathbb{R}^m$ por um difeomorfismo $\mathbf{f}$ de classe C^r com $r \geq 1$. Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, os conjuntos*

$$W_{loc}^s(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in X \mid d(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) \leq \epsilon, i \geq 0\}$$

e

$$W_{loc}^u(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x} \in X \mid d(\mathbf{f}^{-i}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) \leq \epsilon, i \geq 0\},$$

contidos em intersecções de $W^s(\mathbf{x}^*)$ e $W^u(\mathbf{x}^*)$ com uma vizinhança suficientemente pequena de $\mathbf{x}^*$, são subvariedades suaves de dimensão n_- e n_+ , respectivamente. Além disso, $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ ($W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$) é tangente ao subespaço linear $E_{\mathbf{x}^*}^s$ ($E_{\mathbf{x}^*}^u$) em $\mathbf{x}^*$,

$$\mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} W_{loc}^s(\mathbf{x}^*) = E_{\mathbf{x}^*}^s \quad e \quad \mathcal{T}_{\mathbf{x}^*} W_{loc}^u(\mathbf{x}^*) = E_{\mathbf{x}^*}^u,$$

e existem constantes $C > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$ tais que

$$d(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) \leq C \cdot \alpha^i \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x} \in W_{loc}^s(\mathbf{x}^*), i \geq 0$$

e

$$d(\mathbf{f}^{-i}(\mathbf{x}), \mathbf{x}^*) \leq C \cdot \alpha^i \cdot d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x} \in W_{loc}^u(\mathbf{x}^*), \quad i \geq 0.$$

A variedade $W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)$ ($W_{loc}^u(\mathbf{x}^*)$) é continuamente dependente de $\mathbf{x}^*$ e diz-se a variedade invariante estável (instável) local de $\mathbf{x}^*$. Estas variedades têm as mesmas propriedades de regularidade que a transformação $\mathbf{f}$. Os conjuntos

$$W^s(\mathbf{x}^*) = \bigcup_{i \geq 0} \mathbf{f}^{-i}(W_{loc}^s(\mathbf{x}^*)) \quad \text{e} \quad W^u(\mathbf{x}^*) = \bigcup_{i \geq 0} \mathbf{f}^i(W_{loc}^u(\mathbf{x}^*))$$

dizem-se as variedades estável e instável globais de $\mathbf{x}^*$, respectivamente. Ao contrário das variedades estável e instável locais, as globais estão usualmente imersas no espaço de fase com uma estrutura muito complicada.

Tempo contínuo. Em sistemas dinâmicos contínuos lineares, a estabilidade assintótica é determinada pelas partes reais dos valores próprios da matriz que define o sistema. Num sistema dinâmico não-linear $S = (X, \mathbb{R}, \mathbf{f})$, definido num subconjunto aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por (1.2) onde o campo vectorial $\mathbf{f}$ é suave, o estudo da estabilidade assintótica de uma órbita baseia-se na análise local dos valores próprios de uma certa matriz Jacobiana.

Seja $\phi^t(\mathbf{x}_0)$ a solução de (1.2) para uma condição inicial $\mathbf{x}_0$. Considere $\mathbf{x}(t) = \phi^t(\mathbf{x}_0) + \mathbf{y}(t)$ onde $\mathbf{y}(t)$ é uma pequena perturbação, ou seja, $\|\mathbf{y}(t)\| \ll 1$. Para $\|\mathbf{y}(t)\|$ suficientemente pequeno, podem negligenciar-se os termos não-lineares e, atendendo a que $\dot{\phi}^t(\mathbf{x}_0)$ e $\mathbf{f}(\phi^t(\mathbf{x}_0))$ se anulam, obtém-se a equação linearizada

$$(1.5) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{y},$$

onde $\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))$ é matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ calculada em $\phi^t(\mathbf{x}_0)$.

Considere $\mathcal{I} \equiv \{iy \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R}\}$, o eixo imaginário do plano complexo. No que segue, denota-se por n^0 o número de valores próprios de uma matriz Jacobiana situados em $\mathcal{I}$, e por n^+ (n^-) o número de valores próprios à direita (esquerda) de $\mathcal{I}$.

Teorema 1.1.5 (de Hartman-Grobman para fluxos) *Seja $S = (X, \mathbb{R}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ em que o campo vectorial $\mathbf{f}$ é suave. Se $\mathbf{A} \equiv \mathbf{Df}(\tilde{\mathbf{x}}_0)$ é uma matriz constante tal que $n^0 = 0$, então existe uma vizinhança U de $\tilde{\mathbf{x}}_0$ para a qual o fluxo não-linear ϕ^t gerado pelo campo vectorial $\mathbf{f}$ é topologicamente conjugado ao fluxo linear*

$$\mathbf{y}(t; \mathbf{y}_0) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{y}_0.$$

Ou seja, existe um homeomorfismo $\mathbf{h} : U \rightarrow U$ tal que

$$(\mathbf{h} \circ \phi^t)(\mathbf{x}) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{y}(t),$$

sempre que $\phi^t(\mathbf{x}) \in U$.

O homeomorfismo $\mathbf{h}$ preserva a orientação das órbitas e pode ser escolhido de modo a preservar a parametrização por tempo.

A proposição seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que a equação linearizada (1.5) seja assintoticamente estável numa vizinhança de um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$, caso em que $\phi^t(\mathbf{x}^*)$ é constante igual a $\mathbf{x}^*$. A solução geral $\mathbf{y}(t)$ da equação linearizada $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{y}$ é determinada pelos valores e vectores próprios da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$.

Proposição 1.1.3 *Seja S um sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ em que o campo vectorial $\mathbf{f}$ é suave. Seja ainda $\mathbf{x}^*$ um ponto de equilíbrio de S e $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ calculada em $\mathbf{x}^*$. Então o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável se os valores próprios $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m$ da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ verificam $n^0 = n^+ = 0$. Se $n^+ \neq 0$ o ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é instável.*

Definição 1.1.11 *Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ de um fluxo $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ diz-se transversal se, para $t \neq 0$, a derivada de qualquer aplicação ϕ^t em ordem a t calculada em $\mathbf{x}^*$ não tem $\Lambda = 1$ como valor próprio. Ou seja, se a parte linear do campo vectorial em $\mathbf{x}^*$ não tem $\Lambda = 0$ como valor próprio. Um ponto periódico $\mathbf{x}^*$ de período $t' > 0$ de um fluxo $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ diz-se transversal se $\Lambda = 1$ é um valor próprio simples da derivada de qualquer aplicação ϕ^t em ordem a t calculada em $\mathbf{x}^*$.*

A persistência de pontos de equilíbrios transversais é exposta na proposição seguinte.

Proposição 1.1.4 *Seja $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ um campo vectorial diferenciável. Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é transversal se e só se $\Lambda = 1$ não é um valor próprio da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$.*

Uma função $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 diz-se uma função de Lyapunov (fraca) para o fluxo ϕ^t gerado por $\mathbf{f}$ numa vizinhança aberta U de $\mathbf{x}^*$ contida em X se

$$(1.6) \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}) > \mathbf{x}^* \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{d\mathbf{L}}{dt}(\phi^t(\mathbf{x}))|_{t=0} \leq 0$$

para todo o $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^*\}$. Se $\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) < 0$ para todo o $\mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{x}^*\}$, então $\mathbf{L}$ diz-se uma função de Lyapunov estrita (forte ou completa). As condições em (1.6) implicam que

$$(\mathbf{L} \circ \phi^t)(\mathbf{x}) \leq \mathbf{L}(\mathbf{x})$$

para todo o $\mathbf{x} \in U$ e para todo o $t \geq 0$ tais que $\phi^s(\mathbf{x}) \in U$ para $0 \leq s \leq t$. As funções de Lyapunov não são únicas. Embora esteja provado que existe alguma função de Lyapunov para cada sistema estável, não existem métodos gerais para encontrar uma tal função. No entanto, é possível calcular a sua derivada sem conhecer explicitamente as soluções do campo vectorial $\mathbf{f}$, o que constitui uma vantagem. De facto, a derivada de $\mathbf{L}$ pode ser tomada ao longo das curvas solução $x_i = \phi_i^t(\mathbf{x})$ como

$$\dot{\mathbf{L}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}),$$

onde f_i é a i -ésima componente de $\mathbf{f}$. É então válida uma versão contínua do Teorema 2 para o estudo da estabilidade numa vizinhança de um ponto de equilíbrio.

Segue-se a definição de ponto de equilíbrio hiperbólico para fluxos definidos num conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

Definição 1.1.12 *Seja $S = (X, \mathbb{R}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ em que o campo vectorial $\mathbf{f}$ é suave. Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ diz-se hiperbólico (ou não-degenerado) se à matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ corresponde $n^0 = 0$. Caso contrário $\mathbf{x}^*$ diz-se um centro.*

Um ponto hiperbólico diz-se um nodo ou ponto de equilíbrio atractor (foco ou ponto de equilíbrio repulsor) se $n^- = m$ ($n^+ = m$), e diz-se uma sela se $n^+ \neq 0$ e $n^- \neq 0$.

O teorema de Hartman-Grobman estabelece que o fluxo do sistema contínuo não-linear definido por (1.2) é topologicamente conjugado, numa vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico $\mathbf{x}^*$, ao fluxo linear induzido pela matriz Jacobiana calculada em $\mathbf{x}^*$. Considere o seguinte corolário deste teorema.

Corolário 1.1.2 *Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{R}, \mathbf{f})$ definido num aberto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ em que o campo vectorial $\mathbf{f}$ é suave. Se $\mathbf{x}^*$ é uma sela ou um foco então $\mathbf{x}^*$ não é Lyapunov estável (é instável). Se $\mathbf{x}^*$ é um nodo então $\mathbf{x}^*$ é assintoticamente estável.*

Tal como no caso discreto, existe um subespaço próprio $E_{\mathbf{x}^*}^s$ ($E_{\mathbf{x}^*}^u$) que depende continuamente de $\mathbf{x}^*$, gerado pelos valores próprios Λ_i , $i = 1, \dots, m$, da matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$ com $\text{Re } \Lambda_i < 0$ ($\text{Re } \Lambda_i > 0$), designado por espaço próprio estável (instável) de $\mathbf{x}^*$. Existe então uma versão contínua do Teorema 4 para pontos de equilíbrio hiperbólicos.

1.1.3 Conjuntos atractores e bacias de atracção

Conforme a Definição 1.1.2, os conjuntos ω -limite de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ são relativos ao comportamento assintótico de órbitas correspondentes a uma condição inicial particular. Se, para um número suficientemente grande de condições iniciais num conjunto $\mathcal{B}$, o comportamento assintótico do sistema evolui para um mesmo subconjunto $\mathcal{A}$ de X , então $\mathcal{A}$ é um conjunto atractor do sistema com bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \equiv \mathcal{B}$.

Existem várias definições de conjunto atractor que, no essencial, diferem quanto às condições iniciais que numa vizinhança devem evoluir para o conjunto. A noção de conjunto atractor depende da topologia tomada em X ; usualmente é assumida a topologia induzida pela métrica tomada em X .

Considere que o espaço de fase X é de dimensão finita. São aqui apresentados os vários conceitos de conjunto atractor necessários ao estudo de sincronização, sendo o primeiro baseado em domínios absorventes.

Dado $U \subset X$, o conjunto

$$\mathcal{U} = \{x \in U \mid \phi^t(x) \in U, t \geq 0\}$$

para o qual exista $t' > 0$ tal que $\phi^{t'}(\text{cl}(\mathcal{U})) \subset \text{int}(\mathcal{U})$ diz-se um domínio absorvente ou fundamental. Trata-se do conjunto invariante dos pontos de U que não evoluem para fora de U no decurso do tempo. Se $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante contido em U , então $\mathcal{U}$ é um conjunto não-vazio que contém $\mathcal{A}$. Na prática, encontrar um domínio absorvente é muitas vezes o primeiro passo para localizar conjuntos atractores.

Definição 1.1.13 *Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ diz-se um atractor maximal do sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ se existe um domínio absorvente $\mathcal{U}$ tal que*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t(\mathcal{U}).$$

Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ diz-se um atractor se existe um domínio absorvente para o qual $\mathcal{A}$ é o atractor maximal. Um conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ contido em X diz-se a bacia de atracção

do atrator $\mathcal{A}$ se contém todas as condições iniciais cujas órbitas convergem para $\mathcal{A}$ no decurso do tempo. Um conjunto $\mathcal{A}'$ diz-se um repulsor se existe um domínio absorvente $\mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{A}' = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t (X \setminus \mathcal{U}).$$

Note que um conjunto invariante $\mathcal{A}$ representa um estado assintótico observável se $\mathcal{A}$ atrair órbitas próximas. Também se define o atrator global relativo como um atrator relativamente a um conjunto limitado $B \subset X$, isto é,

$$\mathcal{A}_B = \bigcap_{t \geq 0} \phi^t (B).$$

Uma definição em termos das propriedades do conjunto invariante $\mathcal{A}$, sem recorrer à noção de domínio absorvente, esclarece a noção de atrator.

Definição 1.1.14 *Um conjunto $\mathcal{A} \subset X$ diz-se um atrator do sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ se verifica:*

- (A1) $\mathcal{A}$ é compacto e invariante para o sistema S ;
- (A2) *existe uma vizinhança V de $\mathcal{A}$ correspondente ao conjunto dos pontos $\mathbf{x}$ tais que, para todas as vizinhanças U de $\mathcal{A}$, existe um $t' \in T$ tal que $\phi^t(\mathbf{x}) \in U$ sempre que $t > t'$.*

A bacia de atracção do atrator $\mathcal{A}$ define-se como o conjunto

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) \equiv \{\mathbf{x} \in U \mid \omega(\mathbf{x}, \phi^t) \subseteq \mathcal{A}\}$$

de condições iniciais $\mathbf{x}$ em U cujos conjuntos ω -limite estão contidos em $\mathcal{A}$.

A estrutura topológica de uma bacia de atracção, vista como uma região no espaço de fase, pode diferir bastante de sistema para sistema. Num sistema não-linear podem existir vários conjuntos ω -limite. Em particular, podem existir vários conjuntos ω -limite atractores, cada um dos quais com uma bacia de atracção diferente. A condição inicial determina qual o conjunto ω -limite atrator que é eventualmente atingido pela evolução do sistema. Como tal, tem especial interesse conhecer o fecho do conjunto de condições iniciais que evoluem assintoticamente para cada um dos atractores, definindo as respectivas bacias de atracção.

O conhecimento detalhado da estrutura e extensão das bacias de atracção no espaço de fase X é fundamental em todos os procedimentos de estabilização de sistemas não-lineares. Se existem dois ou mais atractores, a transição de uma bacia de atracção para outra diz-se uma fronteira de bacia. Embora a existência de bacias de atracção seja fácil de entender, a sua delimitação é um problema para o qual ainda não existem métodos analíticos. Tanto quanto sabemos, apenas se consegue uma determinação numérica explícita.

A bacia de atracção poderá ser infinitamente grande, assim como pode não conter qualquer ponto. Além disso as bacias de atracção podem ser formadas por uma região conexa no espaço de fase ou por uma união de regiões desconexas entre si. Tanto quanto sabemos, também não se conhece qualquer método que permita antecipar sob que condições estas são ou não formadas por uma única região ou por um conjunto desconexo de regiões.

Embora o conceito de atractor dado pela definição topológica seja eficaz para os atractores mais simples – pontos de equilíbrio e ciclos limite assintoticamente estáveis – existem atractores que contêm muito mais do que pontos assintóticos de condições iniciais típicas. A resposta a esta limitação foi dada parcialmente por Milnor [47] quando introduziu o conceito de atractor medida, agora designado por atractor (fraco) de Milnor, como o conjunto limite de trajectórias originadas a partir de um conjunto de condições iniciais de medida de Lebesgue positiva. Embora pareça intuitivo pensar que, se uma condição inicial evolue para um determinado atractor, então trajectórias de condições iniciais próximas também evoluem para o mesmo conjunto, a definição de atractor medida contraria esta ideia. Até ao fim desta subsecção consideram-se o espaço de fase $X \subseteq \mathbb{R}^m$, onde está definida a medida de Lebesgue ℓ , e os subconjuntos como conjuntos de Borel em X . Convenciona-se que $\ell(\cdot) > 0$ inclui o caso $\ell(\cdot) = \infty$ e denota-se por $A =_0 B$ a igualdade dos conjuntos A e B , a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Seja X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ e $\mathcal{B}$ a σ -álgebra de Borel em X . Uma transformação $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ diz-se mensurável se

$$\mathbf{f}^{-1}(A) \equiv \{\mathbf{x} \in X \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in A\} \in \mathcal{B}$$

para qualquer aberto $A \in \mathcal{B}$. Se $\mathbf{f}$ é uma transformação contínua e injectiva de $A \in \mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^m$ então $\mathbf{f}(A) \in \mathcal{B}$.

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das medidas de probabilidade em $\mathcal{B}$. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ diz-se $\mathbf{f}$ -invariante se $\mu(\mathbf{f}^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo o $A \in \mathcal{B}$. Com o mesmo significado que μ ser $\mathbf{f}$ -invariante, pode dizer-se que a transformação $\mathbf{f}$ preserva a medida μ . Em geral, um sistema dinâmico pode exibir várias medidas invariantes muitas das quais possuem

algum comportamento complexo. É em geral de interesse conseguir seleccionar algumas destas medidas como sendo as mais relevantes para a compreensão da dinâmica do sistema. Nomeadamente, uma medida que caracterize o comportamento assintótico das suas órbitas.

Uma medida de probabilidade invariante μ diz-se ergódica (ou metricamente transitiva) para $\mathbf{f}$ se $\mu(A) \in \{0, 1\}$, para todo o $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mathbf{f}(A) = A$.

Para $k \geq 0$, seja $\mathbf{f}^k = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \dots \circ \mathbf{f}$ a transformação obtida pela composição, k vezes, da transformação $\mathbf{f}$. Denotando por ℓ a medida de Lebesgue, uma medida ergódica μ diz-se de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) para $\mathbf{f}$ se existe um subconjunto $U \subset X \subset \mathbb{R}^m$ com $\ell(U) > 0$ tal que, para cada função contínua $\mathbf{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$, é válido

$$(1.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{g}(\mathbf{f}^k(\mathbf{x})) = \int \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\mu(\mathbf{y}),$$

para cada $\mathbf{x} \in U$. Note que, para medidas ergódicas em geral, o teorema ergódico multiplicativo de Birkhoff [34] apenas garante a igualdade (1.7) quase em toda a parte relativamente à medida μ (μ -q.t.p.). O limite do lado esquerdo de (1.7) diz-se a média temporal da função $\mathbf{g}$ sob iteração de $\mathbf{f}$ a partir de um ponto inicial $\mathbf{x}$ e o integral do lado direito de (1.7) diz-se a média espacial (ou média de fase) da função $\mathbf{g}$ relativamente à medida μ .

Definição 1.1.15 (de Milnor) *Um conjunto invariante compacto $\mathcal{A} \subset X$ de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se um*

(M1) *atractor fraco de S se a bacia de atracção*

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in X \mid \omega(\mathbf{x}, \phi^t) \subseteq \mathcal{A}\}$$

tem medida de Lebesgue estritamente positiva, ou seja, $\ell(\mathcal{B}(\mathcal{A})) > 0$.

(M2) *atractor de Milnor de S se é um atractor fraco e não existe um subconjunto compacto invariante próprio (estritamente menor) $\mathcal{A}'$ contido em $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{B}(\mathcal{A}') =_0 \mathcal{B}(\mathcal{A})$.*

(M3) *atractor de Milnor minimal de S se é um atractor de Milnor e qualquer subconjunto compacto invariante próprio $\mathcal{A}'$ contido em $\mathcal{A}$ satisfaz $\ell(\mathcal{B}(\mathcal{A}')) = 0$.*

Estas definições diferem substancialmente da definição topológica dado que a bacia de atracção não precisa incluir sequer uma vizinhança do atractor $\mathcal{A}$: é permitido que

alguns pontos evoluam para fora de $\mathcal{A}$. Os pontos de equilíbrio e as órbitas periódicas são exemplos de atractores de Milnor minimais pois não contêm qualquer subconjunto próprio invariante compacto. Se $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante compacto que tem medida de Lebesgue positiva então é um atrator fraco. No entanto, em sistemas dissipativos, até os atractores fracos têm tipicamente medida de Lebesgue nula.

Atractores de Milnor com bacias de atracção *riddled*. Segundo artigos de Ott *et al.* ([53],[82]) e Alexander *et al.* [5] existem sistemas não-lineares $S = (X, T, \phi^t)$ que, pela existência de certas restrições, contêm uma subvariedade invariante suave no espaço de fase X . Esta situação ocorre naturalmente em sistemas com simetria, onde os estados simétricos formam uma subvariedade invariante $\mathcal{M}$ mergulhada em X . É o caso de sistemas de osciladores caóticos ligados onde o estado caótico sincrónico corresponde a uma subvariedade invariante $\mathcal{M}$ de dimensão inferior à do espaço de fase X .

Em alguns destes sistemas pode acontecer que, arbitrariamente próximo de qualquer condição inicial na bacia de um atrator $\mathcal{A}$, existam condições iniciais nas bacias de outros atractores. Nos artigos [5] e [81] é estabelecido que existem atractores de Milnor $\mathcal{A}$ em sistemas invertíveis suaves tais que qualquer conjunto aberto que intersecte $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ tem uma medida positiva na bacia de um outro atrator. Mais especificamente, sendo $\mathcal{A}$ um atrator de Milnor do sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$, para cada ponto $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, pode acontecer que qualquer bola $B_\epsilon(\mathbf{x})$ de raio ϵ centrada em $\mathbf{x}$ contenha um conjunto de pontos de medida de Lebesgue positiva nas bacias de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A}')$ de outros atractores $\mathcal{A}'$. Neste caso, a bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ diz-se *riddled*. Esta circunstância tem a seguinte implicação atípica: uma trajectória é iniciada em $\mathbf{x} \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$ e a sua órbita $\mathcal{O}(\mathbf{x})$ evolui para $\mathcal{B}(\mathcal{A}')$, para certo atrator $\mathcal{A}'$ diferente de $\mathcal{A}$.

A propriedade *riddled* da bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ pode ser caracterizada pela condição

$$(1.8) \quad \ell(\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap U) \cdot \ell(\mathcal{B}^C(\mathcal{A}) \cap U) > 0,$$

para qualquer conjunto aberto U que intersecte $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Embora $\mathcal{A}$ seja atrator para um conjunto de condições iniciais $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ de medida de Lebesgue positiva (i.e., $\ell(\mathcal{B}(\mathcal{A})) > 0$), $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ tem um conjunto complementar relativamente a X , $\mathcal{B}^C(\mathcal{A}) = X \setminus \mathcal{B}(\mathcal{A})$, que é aberto e denso no espaço de fase X . A bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ e a sua fronteira são o mesmo conjunto. A bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ diz-se *riddled* com o conjunto $\mathcal{B}^C(\mathcal{A})$.

Tanto quanto sabemos, os estudos efectuados ([81],[5],[53],[82]) apontam para que um atrator de Milnor $\mathcal{A}$ com bacia *riddled* se situe, em geral, numa subvariedade invariante suave $\mathcal{M}$ do espaço de fase X . Como sistemas dinâmicos típicos não admitem sub-

variedades invariantes suaves, as bacias *riddled* não ocorrem em casos genéricos. Na Subsecção 1.2, expõe-se como a transição para uma bacia *riddled* está associada à perda de estabilidade do atrator de Milnor mergulhado numa subvariedade invariante suave.

Pikovsky e Grassberger [64] observaram explosões temporais extremas próximo de um tipo particular de bifurcação. Platt *et al.* [67] designaram esse fenómeno por intermitência *on-off* visto que as trajectórias permaneceriam próximas de uma subvariedade invariante por longos períodos de tempo (*on-phase*), antes de evoluir para fora do atrator (*off-phase*) mergulhado na subvariedade. Ashwin *et al.* ([8],[7]), relacionaram a ideia de intermitência *on-off* com a de atrator com uma bacia localmente *riddled*.

Diz-se que $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ é localmente *riddled* se existe uma vizinhança U de $\mathcal{A}$ tal que a bacia de atracção de $\mathcal{A}$ relativa a U , $\mathcal{B}_U(\mathcal{A})$, é globalmente *riddled*. Assim, uma vizinhança arbitrariamente pequena de qualquer ponto de $\mathcal{B}_U(\mathcal{A})$ tem um conjunto de medida de Lebesgue positiva de pontos que evoluem para fora de U em tempo finito. Uma bacia *riddled* é localmente *riddled*, mas o inverso não é válido. Enquanto uma bacia localmente *riddled* $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ pode verificar $\mathcal{B}(\mathcal{A}) =_0 E$ para certo conjunto aberto E , tal não é válido para bacias *riddled*.

Atratores de Milnor instáveis. Na ausência de regularidade ou invertibilidade num sistema $S = (X, T, \phi^t)$, podem surgir atratores com outras características. Trabalhos recentes de Timme *et al.* [88], em redes de osciladores globalmente ligados (com interações por impulso com atraso) mostram "casos extremos" de atratores com bacia *riddled*, designados por atratores fracos de Milnor instáveis. São atratores de Milnor que têm propriedades locais de repulsão responsáveis pela existência de vizinhanças U nas quais quase todos os pontos, relativamente à medida de Lebesgue, evoluem para fora de U em tempo finito. No entanto, simulações numéricas em modelos físicos e biológicos indicam que estes atratores podem ser robustos desde que exista um número suficiente de osciladores no sistema. Ashwin e Timme [9] apresentam uma descrição formal desta classe de atratores, um fenómeno relacionado mas distinto de atratores de Milnor com bacia *riddled*.

Definição 1.1.16 *Um conjunto invariante compacto $\mathcal{A} \subset X$ de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se um atrator instável se é um atrator de Milnor e existe uma vizinhança U de $\mathcal{A}$ cujo domínio absorvente $\mathcal{U}$ verifica*

$$(1.9) \quad \ell(\mathcal{U}) = 0.$$

Tanto quanto sabemos, até agora todos os exemplos de atractores de Milnor com bacia de atracção *riddled* possuem dinâmica muito irregular ou caótica com atracção local para algumas condições iniciais e repulsão local para outras. Em contraste, a dinâmica observada em atractores instáveis pode ser muito simples, mesmo de equilíbrio. Em [9] é dado um exemplo de um sistema de osciladores contínuos com uma órbita periódica que é um atrator instável. Obviamente pontos fixos e órbitas periódicas assintoticamente estáveis para um sistema suave invertível não podem ser atractores instáveis; nestes casos o teorema de Hartman-Grobman garante a existência de uma vizinhança contida na bacia de atracção. Mais genericamente, se um atrator $\mathcal{A}$ é assintoticamente estável então claramente não pode ser um atrator instável.

Podem distinguir-se duas classes de atractores instáveis.

Definição 1.1.17 *Um atrator instável $\mathcal{A}$ de um sistema $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se com bacia de atracção local (de medida) positiva se qualquer vizinhança U de $\mathcal{A}$ verifica*

$$\ell(\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap U) > 0.$$

Embora, pela condição (1.9), quase todas as trajectórias iniciando numa vizinhança suficientemente pequena U evoluam primeiro para fora de U , existe um conjunto de condições iniciais de medida positiva cujas trajectórias eventualmente evoluem para U e são assintóticas ao atrator $\mathcal{A}$.

Definição 1.1.18 *Um atrator instável $\mathcal{A}$ de um sistema $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se com bacia de atracção local (de medida) nula se existe uma vizinhança U de $\mathcal{A}$ que verifica $\ell(\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap U) = 0$.*

Neste caso, quase todas as condições iniciais numa vizinhança suficientemente pequena U de $\mathcal{A}$ evoluem para fora de U e não voltam a ser assintóticas ao atrator $\mathcal{A}$.

1.1.4 Comportamento caótico

Uma das definições de transformação caótica unidimensional mais utilizada foi introduzida por Li e Yorke [41] em 1975. Neste artigo, os autores averigam os possíveis períodos em pontos periódicos de transformações reais contínuas definidas num intervalo.

Definição 1.1.19 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo de números reais. Uma transformação contínua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se caótica se satisfaz:*

(C1) f tem pontos periódicos de período n , para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

(C2) existe um conjunto não-contável $J \subset I$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f^n(x) - f^n(y)| = 0,$$

para quaisquer $x, y \in J$, e

(C3) para qualquer $x \in J$ e x^* um ponto periódico de f é válido

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(x) - f^n(x^*)| > 0.$$

Pela condição (C2), quaisquer duas órbitas em J ora estão perto ora estão longe no decurso do tempo e, pela condição (C3), os pontos periódicos não são assintóticos para nenhum ponto de J .

No artigo [41] é ainda provado que se f tem uma órbita periódica de período 3, então f é caótica. No entanto, já num artigo escrito em russo de 1964, Sharkowski [78] havia provado um forte resultado relativo à existência de pontos periódicos para transformações contínuas. Mais especificamente, considerando a ordem dos números naturais

$$\begin{aligned} 3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft \dots \\ \triangleleft 2^n \cdot 3 \triangleleft 2^n \cdot 5 \triangleleft 2^n \cdot 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^\infty \triangleleft \dots \triangleleft 2^{n+1} \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2 \triangleleft 1, \end{aligned}$$

hoje designada por sucessão ou ordem de Sharkowski, provou o resultado seguinte.

Teorema 1.1.6 (de Sharkowski) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação contínua. Se f tem um ponto periódico de período p e $p \triangleleft q$ na ordem de Sharkowski, então f também tem um ponto periódico de período q .*

Assim, se f tem um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2, então f tem necessariamente um número infinito de pontos periódicos. Inversamente, se f tem apenas um número finito de pontos periódicos, então todos eles têm necessariamente como período uma potência de 2. O resultado de [41] pode ser considerado como um corolário do Teorema 6, com $p = 3$. Note que o teorema de Sharkowski nada estabelece acerca da estabilidade das órbitas periódicas de tais períodos.

O teorema de Sharkowski não é válido em sistemas dinâmicos definidos em outros espaços topológicos. Para transformações bidimensionais, o seguinte resultado de Smale [79] estabelece a possibilidade de obter comportamento caótico.

Teorema 1.1.7 *Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo e $\mathbf{x}^*$ é um ponto hiperbólico sela de $\mathbf{f}$. Se existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ como ponto da intersecção transversal da variedade estável global $W^s(\mathbf{x}^*)$ com a variedade instável global $W^u(\mathbf{x}^*)$ (ponto homoclínico) então $\mathbf{f}$ é caótico.*

Na tentativa de clarificar a noção de comportamento caótico para sistemas dinâmicos em geral, foram sendo dadas várias definições, desde noções teóricas de medida de aleatoriedade, em teoria ergódica, a abordagens topológicas que privilegiamos nesta exposição.

Definição 1.1.20 *Seja $E \subseteq X$ um subconjunto invariante de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$. A restrição $\phi^t|_E : E \rightarrow E$ diz-se topologicamente transitiva se, para qualquer par de conjuntos abertos não-vazios $U, V \subseteq E$, se verifica*

$$\phi^{t'}(U) \cap V \neq \emptyset$$

para algum $t' > 0$.

Se o sistema possui uma órbita densa em E , ou seja, se existe $\mathbf{x} \in X$ tal que

$$\text{cl} \left(\{ \phi^t(\mathbf{x}) \}_{t \in T} \right) = E,$$

então $\phi^t|_E$ é topologicamente transitiva. O inverso não é necessariamente verdade. No entanto, se E não tem pontos isolados a definição anterior é equivalente à existência de uma órbita densa em E .

Definição 1.1.21 *Um subconjunto invariante $E \subseteq X$ de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se ter dependência sensível às condições iniciais se existe $\delta > 0$ tal que, para cada $\mathbf{x} \in E$ e cada vizinhanças U de $\mathbf{x}$,*

$$d(\phi^t(\mathbf{x}) - \phi^t(\mathbf{x}')) \geq \delta$$

para algum ponto $\mathbf{x}' \in U$ e algum tempo $t \geq 0$.

Dado $\mathbf{x} \in E$, não é necessário que todos os pontos $\mathbf{x}'$ próximos de $\mathbf{x}$ se afastem dele sob iteração; no entanto, a definição exige que exista pelo menos um ponto $\mathbf{x}'$ em cada vizinhança de $\mathbf{x}$ com essa propriedade. O valor de tempo $t \geq 0$ é independente do ponto $\mathbf{x} \in E$ considerado.

Considere então a seguinte definição de conjunto invariante caótico.

Definição 1.1.22 Um subconjunto invariante $E \subseteq X$ de um sistema dinâmico $S = (X, T, \phi^t)$ diz-se caótico se verifica as propriedades:

(C4) ϕ^t tem dependência sensível às condições iniciais em E ,

(C5) ϕ^t é topologicamente transitiva em E , e

(C6) os pontos periódicos de ϕ^t são densos em E .

Alguns sistemas dinâmicos são caóticos em todo o espaço de fase X (por exemplo, os difeomorfismos de Anosov) mas, em geral, o comportamento caótico apenas existe num subconjunto $E \subset X$. Têm particular interesse os casos em que o comportamento caótico tem lugar num atrator $\mathcal{A}$, pois a um grande conjunto de condições iniciais correspondem órbitas que convergem para a região caótica. Pela transitividade topológica, se o sistema dinâmico é iniciado num ponto da bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, a representação computacional da sua órbita permite reproduzir todo o atrator caótico $\mathcal{A}$. Tipicamente, um atrator caótico tem um conjunto denso de órbitas periódicas instáveis nele mergulhadas. Além disso, existem invariantes numéricos expressos em termos da soma (média) sobre as órbitas periódicas instáveis, tais como a medida natural (ver Anexo 1), os expoentes de Lyapunov e as entropias topológica e métrica (e as dimensões fractais). As órbitas periódicas instáveis têm ainda um importante papel em muitos processos dinâmicos, tais como bifurcações, perdas de sincronização de sistemas caóticos e bacias de atracção *riddled*.

O teorema da existência e unicidade de soluções de uma equação diferencial garante que trajectórias distintas num sistema definido por um campo vectorial não se intersectam. Como tal, num sistema dinâmico contínuo e não-linear apenas pode existir um atrator invariante com uma topologia qualitativamente mais complexa que um ciclo limite se os seus estados são determinados por três ou mais variáveis. Em sistemas dinâmicos discretos a existência de um termo não-linear na expressão de uma transformação unidimensional é suficiente para a obtenção de comportamento caótico.

Expoentes de Lyapunov. O comportamento caótico num sistema implica a dependência sensível do resultado da dinâmica a pequenas mudanças nas condições iniciais. Uma medida dessa sensibilidade é quantificada pelos expoentes de Lyapunov. Num sistema dinâmico unidimensional seja δ_0 a distância inicial no tempo t_0 entre dois pontos próximos P_0 e P'_0 no espaço de fase. Se a distância $\delta(t)$ entre os pontos resultantes da evolução de P_0 e P'_0 no tempo t cresce exponencialmente com a evolução do sistema, este tem dependência sensível às condições iniciais. Trata-se do caso em que, após um certo tempo t ,

se tem

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\lambda(t-t_0)},$$

com $\lambda > 0$. Note que mesmo em órbitas caóticas, a divergência entre elas apenas pode ser localmente exponencial pois se o sistema é limitado, como a maioria dos modelos físicos, $\delta(t)$ não pode tender para infinito. Conforme o artigo de Wolf *et al.* [92], para definir uma medida desta divergência, deve ser medido o crescimento exponencial em muitos pontos ao longo da trajectória. Começando com uma órbita de referência e um ponto numa trajectória próxima, é medida a razão $\delta(t)/\delta_0$. Quando $\delta(t)$ se torna demasiado grande, é considerada uma nova órbita próxima e definida uma nova distância $\delta_0(t)$. Resulta deste processo que

$$\lambda = \frac{1}{t_N - t_0} \sum_{i=1}^N \ln \frac{\delta(t_i)}{\delta_0(t_{i-1})}.$$

O número real λ , designado por expoente de Lyapunov, verifica $\lambda \leq 0$ se o movimento é regular e $\lambda > 0$ se o movimento é caótico.

Apenas em casos muito simples é possível o cálculo explícito dos expoentes de Lyapunov. Em 1984, Wolf [94] desenvolveu o algoritmo numérico mais usado para estimar o expoente de Lyapunov λ a partir da medição de uma única variável dinâmica $x(t)$ do sistema. Uma outra revisão deve-se a Abarbanel *et al.* [1] em 1991.

Definição 1.1.23 *Seja f uma transformação do intervalo de classe C^1 . Para cada ponto x_0 , o expoente de Lyapunov (característico) de f em x_0 define-se pelo limite, caso exista,*

$$(1.10) \quad \lambda(x_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|,$$

onde x_i é a i -ésima iterada de f em x_0 .

Dada a possibilidade de não existir o limite em (1.10), a definição original considera o limite superior.

Para atractores caóticos λ é positivo. Para pontos fixos e órbitas periódicas estáveis λ é negativo dado por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{N} \ln |(f^N)'(x_0)|,$$

onde $N \geq 1$ é o período da órbita de x_0 .

Em dimensões superiores a prova da existência do limite apropriado, para quase todos os pontos em termos de uma medida invariante, requiere uma versão mais avançado do teorema ergódico multiplicativo obtida por Oseledec [50].

Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico discreto definido num subespaço vectorial compacto X de $\mathbb{R}^m$ por (1.1), onde $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$. Dado $\mathbf{x}_0 \in X$, considere um vector infinitesimal $\boldsymbol{\delta}_0$ de deslocamento da condição inicial $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\delta}_0$. Obtem-se uma equação que caracterize a evolução de $\boldsymbol{\delta}_0$ considerando o desenvolvimento de Taylor e ignorando os termos de ordem superior, tem-se

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\delta}_0.$$

Para $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1$ é válido $\boldsymbol{\delta}_1 = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \cdot \boldsymbol{\delta}_0$. Segue, por indução, a equação linearizada

$$\boldsymbol{\delta}_{n+1} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \cdot \boldsymbol{\delta}_n, \quad n > 0$$

que determina a evolução de um deslocamento infinitesimal $\boldsymbol{\delta}_0$ da órbita a partir da órbita inicial (não perturbada) de pontos $\mathbf{x}_n$. Em particular,

$$\frac{\boldsymbol{\delta}_n}{\|\boldsymbol{\delta}_n\|} \quad \text{e} \quad \frac{\|\boldsymbol{\delta}_n\|}{\|\boldsymbol{\delta}_0\|}$$

são, respectivamente, o vector unitário com a direcção do deslocamento infinitesimal da órbita a partir de $\mathbf{x}_n$ e o factor pelo qual o deslocamento infinitesimal aumenta (se $\|\boldsymbol{\delta}_n\| > \|\boldsymbol{\delta}_0\|$) ou diminui (se $\|\boldsymbol{\delta}_n\| < \|\boldsymbol{\delta}_0\|$).

O vector $\mathbf{v}_n = \boldsymbol{\delta}_n / \|\boldsymbol{\delta}_0\|$ é um vector tangente, situado no espaço tangente, cuja equação de evolução de $\mathbf{v}_n$ é dada por

$$(1.11) \quad \mathbf{v}_{n+1} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{v}_n.$$

A evolução do vector tangente $\mathbf{v}_n$ depende da órbita de $\mathbf{x}_0$ e da orientação inicial do vector tangente unitário $\mathbf{v}_0$. Com o objectivo de obter a taxa exponencial pela qual o vector tangente cresce ou diminui por iteração de $\mathbf{f}$, considere a expressão $(\ln \|\mathbf{v}_n\|) / n$. Obtem-se de (1.11) que

$$\mathbf{v}_n = [D\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdot \dots \cdot D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)] \cdot \mathbf{v}_0 = \prod_{i=0}^{n-1} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{v}_0,$$

logo, pela regra de derivação da função composta, tem-se

$$\frac{1}{n} \ln \|\mathbf{v}_n\| = \frac{1}{n} \ln \left\| \prod_{i=0}^{n-1} D\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{v}_0 \right\| = \frac{1}{n} \ln \|D\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}_0\|.$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtêm-se os m possíveis valores

$$(1.12) \quad \lambda_i(\mathbf{x}_0) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{v}_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}_0\|,$$

para $i = 1, \dots, m$, conforme as m orientações iniciais possíveis do vector tangente $\mathbf{v}_0$ no espaço tangente m -dimensional, designados por expoentes de Lyapunov (característicos) para a condição inicial $\mathbf{x}_0$ e a orientação do deslocamento infinitesimal dada por $\mathbf{v}_0$.

As expressões

$$\frac{\ln \|\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}_0\|}{n} \quad e \quad e^{\lambda_i(\mathbf{x}_0)}$$

dizem-se, respectivamente, o expoente de Lyapunov tempo-finito e número de Lyapunov. O último representa um factor média pelo qual é multiplicado o comprimento do vector de deslocamento infinitesimal em cada iterada. A aplicação da matriz $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$ aos m vectores unitários $\mathbf{v}_0$ resulta num elipsóide cujos m eixos maiores são os números de Lyapunov. As direcções principais do elipsóide são os m vectores próprios perpendiculares da matriz real simétrica $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)]^T$ (T denota a matriz transposta). Os eixos maiores do elipsóide são as raízes quadradas dos m valores próprios, as quais se dizem os valores singulares de $\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0)$.

Segundo Farmer *et al.* [17] é válido o seguinte resultado.

Proposição 1.1.5 *Seja $S = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido num subespaço vectorial compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ onde $\mathbf{f}$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 1$. Sejam $|\Lambda_{j_1}(\mathbf{x}_0)| \geq |\Lambda_{j_2}(\mathbf{x}_0)| \geq \dots \geq |\Lambda_{j_m}(\mathbf{x}_0)|$ os módulos dos valores próprios da matriz Jacobiana*

$$\mathbf{Df}^n(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{n-1}) \cdot \mathbf{Df}(\mathbf{x}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{Df}(\mathbf{x}_0)$$

da n -ésima iterada de $\mathbf{f}$. Então os expoentes de Lyapunov de $\mathbf{f}$ são

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_{j_i}(\mathbf{x}_0)|.$$

Tal como em dimensão 1, em dimensão superior os expoentes existem quase em toda a parte em termos de uma medida invariante. O teorema ergódico multiplicativo de Oseledec garante que, se a órbita de $\mathbf{x}_0$ gera uma medida de probabilidade ergódica μ invariante por $\mathbf{f}$, então os limites em (1.12) existem e os valores de $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ são o mesmo para quase todo o $\mathbf{x}_0$, relativamente a essa medida μ .

Se estão a ser consideradas órbitas num atrator caótico $\mathcal{A}$, pode assumir-se que existe uma medida natural ergódica no atrator. Em particular, para quase todo o $\mathbf{x}_0$ relativamente à medida de Lebesgue na bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, a órbita de $\mathbf{x}_0$ gera a medida natural. Como tal, para esse $\mathbf{x}_0$, o teorema ergódico multiplicativo de Oseledec [50] garante que o espectro de Lyapunov $\{\lambda_i(\mathbf{x}_0)\}$ é o mesmo conjunto para todo o $\mathbf{x}_0$ na bacia do atrator excepto para um possível conjunto de medida de Lebesgue nula. Além disso, se η é a medida natural no atrator $\mathcal{A}$, segundo o trabalho de Ruelle [76] os expoentes de Lyapunov $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ relativamente a essa medida são os mesmos valores para todos os $\mathbf{x}_0$ na bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, excepto para um conjunto de medida natural nula. Neste caso os expoentes de Lyapunov denotam-se simplesmente por λ_i , entendendo por λ_i o valor de $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ obtido para quase todos os $\mathbf{x}_0$. A multiplicidade de $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ é a dimensão do subespaço $W^i(\mathbf{x}_0)$. Assim, o espectro de Lyapunov pode ser, de facto, considerado uma propriedade do atrator.

Seja agora S um sistema dinâmico contínuo definido num subespaço métrico $X \subset \mathbb{R}^m$ por (1.2) onde $\mathbf{f}$ é um campo vectorial de classe C^r , com $r \geq 1$. A discussão para definir os expoentes de Lyapunov como medida da dependência sensível da solução de (1.2), para uma dada condição inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, é análoga ao caso de tempo discreto.

Seja ϕ^t o fluxo gerado pelo campo vectorial $\mathbf{f}$. Seja μ uma medida de probabilidade em X que é preservada por ϕ^t . Considere um ponto $\mathbf{x}_0 \in X$ e um ponto $\mathbf{y} \in X$ próximo de $\mathbf{x}_0$. A taxa de variação da distância entre eles evolue sob a acção do fluxo ϕ^t pela razão

$$\frac{\|\phi^t(\mathbf{y}) - \phi^t(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|},$$

cujo limite quando $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0$, ao longo de uma dada curva γ , pode ser escrito como

$$\frac{\|\mathbf{D}\phi^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\dot{\phi}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\mathbf{f}(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|},$$

onde $\mathbf{D}\phi^t(\mathbf{x}_0)$ é a derivada de ϕ^t relativamente a $\mathbf{x}$ calculada em $\mathbf{x}_0$, e $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ é um vector do espaço $\mathcal{T}_{\mathbf{x}_0}X$ tangente à curva γ . A evolução do vector tangente $\mathbf{v}$ ao longo do tempo é definida pela equação linearizada

$$(1.13) \quad \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

onde $\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ calculada em $\phi^t(\mathbf{x}_0)$. A matriz $\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))$ descreve como uma pequena perturbação no ponto $\mathbf{x}_0$ se propaga ao ponto final $\phi^t(\mathbf{x}_0)$.

Os expoentes de Lyapunov (característicos) do fluxo ϕ^t para a condição inicial $\mathbf{x}_0$ são definidos por

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|D\phi^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)\|},$$

para $i = 1, \dots, m$. A versão do teorema ergódico multiplicativo apresentada por Oseledec [50], estabelece as condições em X e ϕ^t sob as quais este limite existe para quase todos os pontos $\mathbf{x}_0 \in X$, relativamente à medida μ . Analogamente ao caso discreto, pode ser considerada a definição alternativa

$$\lambda(\mathbf{x}_0) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))\|.$$

Nomeadamente, garante a existência da matriz simétrica e positiva

$$L(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[2t]{\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \cdot [\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))]^T}$$

cujos valores próprios conduzem à determinação do espectro de Lyapunov do fluxo ϕ^t no ponto $\mathbf{x}_0$ [1].

Proposição 1.1.6 *Seja S um sistema dinâmico definido num subespaço métrico $X \subset \mathbb{R}^m$ por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ onde $\mathbf{f}$ é um campo vectorial de classe C^r com $r \geq 1$. Se $\Lambda_i(\mathbf{x}_0)$ são os valores próprios da matriz*

$$L(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sqrt[2t]{\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0)) \cdot [\mathbf{Df}(\phi^t(\mathbf{x}_0))]^T}$$

então os expoentes de Lyapunov $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ são dados por $\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \ln(\Lambda_i(\mathbf{x}_0))$.

O espectro de Lyapunov $\lambda_1(\mathbf{x}_0), \lambda_2(\mathbf{x}_0), \dots, \lambda_m(\mathbf{x}_0)$, descrevendo o comportamento dos vectores no espaço tangente $\mathcal{T}_{\mathbf{x}_0}X$, depende em geral do ponto inicial $\mathbf{x}_0$ tomado. Para sistemas em tempo contínuo um dos expoentes de Lyapunov é nulo, correspondente ao deslocamento infinitesimal ao longo do fluxo (a direcção tangente à trajectória). Mais precisamente, dado $\mathbf{x}_0 \in X$, tal que $\omega(\mathbf{x}_0, \mathbf{f})$ não contém nenhuma solução estacionária, existe um i tal que $\lambda_i = 0$, correspondente à localização inicial de $\mathbf{x}_0$ no atractor caótico com orientação de $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$ tangente à órbita através de $\mathbf{x}_0$.

Seja $\mathbf{x}^*$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de (1.2). A matriz Jacobiana $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ não tem valores próprios no eixo imaginário $\mathcal{I}$ e aplica-se o teorema de Hartman-Grobman para fluxos. Então,

$$\lambda(\mathbf{x}^*) = \max_{\lambda} \{\operatorname{Re}(\Lambda) \mid \Lambda \text{ é valor próprio de } D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\}.$$

Entropia topológica. A entropia topológica e a entropia métrica são quantidades que, tal como os expoentes de Lyapunov, medem a complexidade da dinâmica de um sistema: são positivas para sistemas caóticos e nulas para sistemas não caóticos. Os valores de cada uma das entropias são, em geral, mais difíceis de calcular do que os expoentes de Lyapunov, pelo que o seu uso tem sido menos frequente. Para os propósitos desta tese apenas interessa abordar a entropia topológica.

A entropia topológica é o invariante numérico mais importante relacionado com o crescimento orbital num sistema dinâmico. Representa a taxa de crescimento exponencial do número de órbitas distinguíveis com precisão arbitrariamente pequena mas finita. Tem a vantagem de descrever de um modo sugestivo, através de um único número real, a complexidade exponencial total da estrutura orbital do sistema. Embora a definição original de entropia topológica seja atribuída a Adler, Konheim e McAndrew [3] (1965), é aqui apresentada a definição introduzida por Bowen [11] em 1971.

Seja $S = (X, T, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido por uma transformação contínua $\mathbf{f}$ e d a métrica tomada no compacto X . Um subconjunto $E \subset X$ diz-se (ϵ, n) -separado para $\mathbf{f}$ se, para quaisquer pontos distintos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, existe pelo menos um k , com $0 \leq k < n$, tal que

$$d(\mathbf{f}^k(\mathbf{x}), \mathbf{f}^k(\mathbf{y})) > \epsilon.$$

Uma outra maneira de expressar este conceito é introduzir em X uma sucessão crescente de distâncias

$$(1.14) \quad d_{n,\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}), \mathbf{f}^i(\mathbf{y})),$$

com termo inicial $d_{1,\mathbf{f}} = d$. O número $d_{n,\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mede a distância entre os segmentos de órbita $I_{n,\mathbf{x}} \equiv \{\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x})\}$ e $I_{n,\mathbf{y}}$. Um subconjunto $E \subset X$ é (ϵ, n) -separado para $\mathbf{f}$ se $d_{n,\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \epsilon$ para quaisquer dois pontos distintos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Seja $N(\mathbf{f}, \epsilon, n)$ a cardinalidade máxima de um conjunto (ϵ, n) -separado, ou seja, o número máximo de órbitas distinguíveis de comprimento n ,

$$N(\mathbf{f}, \epsilon, n) = \max \{ \#E \mid E \subset X \text{ é um conjunto } (\epsilon, n)\text{-separado para } \mathbf{f} \},$$

onde $\#E$ denota o cardinal de E . Dado que X é tomado como compacto, $N(\mathbf{f}, \epsilon, n)$ é finito. Se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, então $N(\mathbf{f}, \epsilon_1, n) \geq N(\mathbf{f}, \epsilon_2, n)$. Considere a taxa de crescimento exponencial de $N(\mathbf{f}, \epsilon, n)$ quando n aumenta, como

$$h(f, \epsilon) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \log N(\mathbf{f}, \epsilon, n).$$

Se $N(\mathbf{f}, \epsilon, n) = e^{n\tau}$, então $h(\mathbf{f}, \epsilon) = \tau$. Assim, $h(\mathbf{f}, \epsilon)$ mede o expoente pelo qual $N(\mathbf{f}, \epsilon, n)$ aumenta quando $n \rightarrow \infty$. Dado que $N(\mathbf{f}, \epsilon, n) \geq 1$ para qualquer par (n, ϵ) e X é compacto, prova-se que $0 \leq h(\mathbf{f}, \epsilon) < \infty$ (para X não compacto apenas é garantido que $0 \leq h(\mathbf{f}, \epsilon) \leq \infty$). Se $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$, então $h(\mathbf{f}, \epsilon)$ é uma função monótona com ϵ , $h(\mathbf{f}, \epsilon_1) \geq h(\mathbf{f}, \epsilon_2)$, o que garante a existência do limite da definição seguinte.

Definição 1.1.24 *A entropia topológica de $\mathbf{f}$ é definida por*

$$h_{top}(\mathbf{f}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} h(\mathbf{f}, \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(\mathbf{f}, \epsilon, n).$$

A entropia topológica $h_{top}(\mathbf{f})$ é independente da métrica d tomada em X . Sendo $h_{top}(\mathbf{f}, \epsilon)$ monótona crescente, para todo o $\epsilon > 0$, é válido

$$0 \leq h_{top}(\mathbf{f}, \epsilon) \leq h_{top}(\mathbf{f}) < \infty.$$

Obtém-se uma definição equivalente da entropia topológica utilizando conjuntos (n, ϵ) -geradores minimais para $\mathbf{f}$ em vez de conjuntos (n, ϵ) -separados maximais.

O cálculo da entropia topológica directamente pela definição é, em geral, difícil. No entanto a entropia topológica verifica um conjunto de propriedades de invariância que motivaram a sua introdução na teoria de sistemas dinâmicos e que a tornam particularmente útil. A proposição seguinte apresenta algumas das propriedades elementares.

Proposição 1.1.7 *A entropia topológica satisfaz as seguintes propriedades:*

- (T1) *Se A é um conjunto fechado invariante por $\mathbf{f}$ então $h_{top}(\mathbf{f}|_A) \leq h_{top}(\mathbf{f})$; se $\mathbf{f} : X \rightarrow X$ e $\mathbf{f}(X) = A$ então $h_{top}(\mathbf{f}) = h_{top}(\mathbf{f}|_A)$;*
- (T2) *Se $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, onde $X_1, X_2, \dots, X_k$ são subconjuntos fechados invariantes para $\mathbf{f}$ tais que $X_i \cap X_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então $h_{top}(\mathbf{f}) = \max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(\mathbf{f}|_{X_i})$;*
- (T3) *Se $\mathbf{f}$ é um homeomorfismo então $h_T(\mathbf{f}^{-1}) = h_T(\mathbf{f})$;*
- (T4) *Se $\mathbf{f} : X \rightarrow X$, $\mathbf{g} : Y \rightarrow Y$ e $\mathbf{h} : X \rightarrow Y$ são transformações contínuas e sobrejectivas tais que $\mathbf{g} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \mathbf{f}$ então $h_{top}(\mathbf{f}) \geq h_{top}(\mathbf{g})$; se $\mathbf{h}$ é um homeomorfismo então $h_{top}(\mathbf{f}) = h_{top}(\mathbf{g})$;*
- (T5) *$h_{top}(\mathbf{f}^k) = |k| h_{top}(\mathbf{f})$;*
- (T6) *Se $\mathbf{f} : X \rightarrow X$, $\mathbf{g} : Y \rightarrow Y$ e $\mathbf{f} \times \mathbf{g} : X \times Y \rightarrow X \times Y$ definida por $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{g}(\mathbf{y}))$ então $h_{top}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = h_{top}(\mathbf{f}) + h_{top}(\mathbf{g})$;*

(T7) O conjunto $\text{Rec}(\mathbf{f}) \subset X$ verifica $h_{\text{top}}(\mathbf{f}) = \mathbf{h}_{\text{top}}(\mathbf{f}|_{\text{Rec}(f)})$;

(T8) Se o conjunto $\text{Rec}(\mathbf{f}) \subset X$ é um conjunto finito de órbitas periódicas então $h_{\text{top}}(\mathbf{f}) = 0$.

No que segue, um intervalo I pode significar um ponto, um intervalo aberto, semi-aberto ou fechado.

Proposição 1.1.8 *Seja f uma transformação contínua do intervalo. Então, dado $n \in \mathbb{N}$, existem um intervalo J_n , uma colecção $\mathcal{D}_n$ de subintervalos de J_n disjuntos dois a dois e $k_n \in \mathbb{N}$, tais que*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \log(\#\mathcal{D}_n)$$

e $J_n \subset f^{k_n}(I)$ para todo o $I \in \mathcal{D}_n$.

Este resultado tem como corolário uma relação entre pontos periódicos e entropia topológica. Seja $p(f)$ a taxa de crescimento exponencial dos pontos periódicos de f definida como

$$p(f) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{n} \ln P_n(f).$$

Corolário 1.1.3 *Para qualquer transformação contínua f do intervalo é válida a desigualdade $p(f) \geq h_{\text{top}}(f)$.*

Corolário 1.1.4 *Se f é uma transformação contínua do intervalo tal que $h_{\text{top}}(f) > 0$, então existe um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2*

Existem relações interessantes entre a entropia topológica e os expoentes característicos de Lyapunov.

Proposição 1.1.9 *Sejam λ_i^+ os expoentes característicos de Lyapunov de um sistema dinâmico $S = (X, T, \mathbf{f})$ definido por uma transformação contínua $\mathbf{f}$. Então*

$$h_{\text{top}}(\mathbf{f}) \leq \sum_i \lambda_i^+.$$

A definição de entropia topológica para o fluxo $\Phi = \{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ gerado por um campo vectorial é completamente análoga à definição para o caso de tempo discreto. A expressão (1.14) dá lugar à sucessão não-decrescente de distâncias

$$d_{t', \Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{0 \leq t \leq t'} d(\phi^t(\mathbf{x}), \phi^t(\mathbf{y})).$$

Como correspondente à propriedade **(T5)**, é válida a seguinte proposição.

Proposição 1.1.10 *Dado um fluxo $\Phi = \{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$, é válida a igualdade*

$$h_{top}(\Phi) = h_{top}(\phi^1).$$

A entropia topológica para um fluxo é obviamente invariante pela equivalência topológica. No entanto varia com a mudança temporal (reparametrização) e, conseqüentemente, com uma equivalência orbital.

1.1.5 Bifurcações

Embora a teoria de bifurcações seja um tema com origens matemáticas clássicas, por exemplo nos trabalhos de Euler no século XVIII, o termo "bifurcação" foi introduzido por Poincaré, no final do século XIX, para descrever a separação das soluções de equilíbrio numa família de equações diferenciais. No entanto, não há concordância quanto ao significado rigoroso do termo.

Muitos sistemas dinâmicos não-lineares com importância prática, em tempo discreto ou contínuo, são dependentes de parâmetros, designados por parâmetros de controle. Portanto, um sistema dinâmico S , além de ser função do tempo, pode ser pensado como função de um vector de parâmetros $\boldsymbol{\rho}$ num certo espaço paramétrico, caso em que se representa genericamente por $S = (X, T, \phi_{\boldsymbol{\rho}}^t)$. Para fins aplicativos é crucial entender a evolução do comportamento qualitativo desses sistemas quando os parâmetros variam.

Definição 1.1.25 *Seja $\{\phi_{\boldsymbol{\rho}}^t\}_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^l}$ uma família de sistemas dinâmicos definidos em $X = \mathbb{R}^m$ e $\Delta\boldsymbol{\rho}$ uma variação suave arbitrariamente pequena dos valores paramétricos a partir de um valor $\boldsymbol{\rho}_0$. Se o retrato de fase sob a variação $\Delta\boldsymbol{\rho}$ do parâmetro não é localmente topologicamente equivalente ao retrato de fase em $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$, diz-se que existe uma bifurcação em $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$.*

Assim, ocorre uma bifurcação na família de sistemas $\{\phi_{\boldsymbol{\rho}}^t\}_{\boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^l}$ quando o parâmetro $\boldsymbol{\rho}$ atinge um valor crítico $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$, designado por ponto de bifurcação, correspondente a uma mudança topológica do comportamento dinâmico dos elementos da família. O número de componentes do vector de parâmetros $\boldsymbol{\rho}$ que devem variar para ocorrer uma dada bifurcação diz-se a codimensão da bifurcação.

O estudo de famílias de sistemas é auxiliado por um novo tipo de diagrama, o diagrama de bifurcação, que representa os possíveis pontos de equilíbrio do sistema em tempo longo em função do parâmetro de bifurcação $\boldsymbol{\rho}$. Tal como no caso de sistemas dinâmicos

individuais, na teoria de bifurcações existem problemas locais, semi-locais e globais. No âmbito desta tese apenas são consideradas bifurcações locais.

As bifurcações locais mais frequentes são as relacionadas com alteração das propriedades de estabilidade local de um ponto periódico. Como tal uma bifurcação é acompanhada por uma mudança na posição dos valores próprios relativamente à fronteira de estabilidade ($\mathcal{S}$ ou $\mathcal{I}$ do plano complexo).

Se $\mathbf{x}^*$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do sistema para $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$, sob uma pequena perturbação o ponto de equilíbrio move-se ligeiramente mas continua hiperbólico. Assim, a falta de hiperbolicidade é usualmente um indicativo para a ocorrência de bifurcações. Os valores dos parâmetros para os quais ocorrem pontos de equilíbrio/periódicos não-hiperbólicos são os "candidatos" principais a pontos de bifurcação estruturalmente estável. É usual considerar ainda as intersecções transversais das variedades estável e instável de pontos de equilíbrio/periódicos.

A teoria de bifurcações, embora recente, tem conduzido à identificação de diversos padrões de bifurcação e estabelecido resultados gerais para o seu reconhecimento em situações práticas. Em codimensão 1, caso contínuo, podem ser consideradas as bifurcações sela-nodo e de Andronov-Hopf relativas à falta de hiperbolicidade em pontos de equilíbrio. E ainda as bifurcações duplicação de período (ou *flip*), ciclo limite (*fold*) e de Neimark-Sacker relativas a pontos periódicos não-hiperbólicos, no caso discreto.

Bifurcações elementares em tempo discreto. Uma bifurcação estruturalmente estável (local) ocorre num ponto $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\rho}})$ se a matriz Jacobiana $D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}}(\tilde{\mathbf{x}})$ das derivadas parciais em $\mathbf{x}$ tem um valor próprio Λ na circunferência unitária $\mathcal{S}$ do plano complexo.

Em dimensão 1, as bifurcações estruturalmente estáveis podem ser facilmente descritas. Neste caso o único valor próprio da derivada num ponto fixo é real e portanto os únicos valores próprios em $\mathcal{S}$ são $\Lambda = 1$ ou $\Lambda = -1$.

Considere que $\Lambda = -1$. Então ocorre uma bifurcação de tipo duplicação de período (ou bifurcação *flip*) caracterizada pelo teorema seguinte.

Teorema 1.1.8 (bifurcação duplicação do período) *Seja $S = (\mathbb{R}, \mathbb{N}_0, f_\rho)$ um sistema dinâmico definido por $x_{n+1} = f_\rho(x_n)$, onde f_ρ é uma transformação de classe C^r , $r \geq 3$, nas variáveis x e ρ . Se $f_\rho(x_0) = x_0$ para todo o ρ num intervalo em torno de ρ_0 e x_0 não é um ponto fixo hiperbólico nem transversal,*

$$\left. \frac{\partial f_\rho}{\partial x} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) = -1,$$

e as derivadas de f_ρ na variável x satisfazem

$$\left. \frac{\partial^2 f_\rho}{\partial x^2} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) < 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial^3 f_\rho}{\partial x^3} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) < 0,$$

então existem intervalos (ρ_1, ρ_0) e (ρ_0, ρ_2) e $\delta > 0$ tais que:

- (1) Se $\rho \in (\rho_1, \rho_0)$ então $f_\rho(x)$ tem um único ponto fixo estável para $x \in (-\delta, \delta)$;
- (2) Se $\rho \in (\rho_0, \rho_2)$ então $f_\rho(x)$ tem um ponto fixo instável e uma órbita periódica de período 2 para $x \in (-\delta, \delta)$.

Assim, a mudança na estrutura orbital do sistema correspondente à perda de estabilidade do ponto fixo x^* em $\rho = \rho_0$ é acompanhada pelo aparecimento de uma órbita de período 2 estável num dos lados do ponto de bifurcação. Se o sistema sofre sucessivas transições de comportamento periódico de período 2^k para novo comportamento periódico em que o período das oscilações duplicou, 2^{k+1} , diz-se que é produzida uma cascata infinita duplicação do período¹, na qual existem órbitas de período 2^k estáveis na variação paramétrica $\rho_k < \rho < \rho_{k+1}$. O comprimento de intervalos sucessivos $[\rho_k, \rho_{k+1}]$ da variação de estabilidade para uma órbita de período 2^k decresce quando k aumenta. Conforme provado por Feigenbaum [18], a razão entre os comprimentos destes intervalos converge para uma constante universal, designada por número de Feigenbaum, dada por

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\rho_k - \rho_{k-1}}{\rho_{k+1} - \rho_k} = 4.6692 \dots \equiv \hat{\delta},$$

comum a todos os sistemas dissipativos típicos que apresentam uma cascata infinita duplicação do período. Além disso, existe um ponto de acumulação de um número infinito de bifurcações duplicação do período num valor finito ρ , denotado por ρ_∞ , dado por

$$\rho_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_k = 3.570 \dots$$

Uma cascata de bifurcações de duplicação do período conduz a comportamento caótico. O valor paramétrico de ρ a partir do qual o comportamento dinâmico de um sistema é caótico diz-se o ponto de Misiurewicz, denotado por 2^∞ .

Considere agora que $\Lambda = 1$. Então ocorre uma bifurcação de tipo *fold* (ou tangencial) caracterizada pelo teorema seguinte.

¹Existem sistemas dinâmicos que exibem bifurcação metade-período, na qual o sistema se desvia para um novo comportamento com metade do período do comportamento anterior. Uma sequência destas bifurcações conduz o sistema do caos para ordem.

Teorema 1.1.9 (bifurcação fold) *Seja $S = (\mathbb{R}, \mathbb{N}_0, f_\rho)$ um sistema dinâmico definido por $x_{n+1} = f_\rho(x_n)$, onde f_ρ é uma transformação de classe C^r , $r \geq 3$, nas variáveis x e ρ . Se $f_\rho(x_0) = x_0$ para todo o ρ num intervalo em torno de ρ_0 e x_0 não é um ponto fixo hiperbólico,*

$$\left. \frac{\partial f_\rho}{\partial x} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) = 1,$$

e as derivadas da transformação f_ρ na variável x e ρ satisfazem:

- (1) $\left. \frac{\partial^2 f_\rho}{\partial x^2} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) \neq 0$, e
- (2) $\left. \frac{\partial f_\rho}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} (x_0) \neq 0$.

Então existe um intervalo I em torno de x_0 e uma função real suave g definida em I tais que $g(x_0) = \rho_0$ e $f_{g(x)}(x) = x$. Além disso, $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) = 0$. Os sinais das expressões em (1) e (2) determinam o "sentido" da bifurcação: para a direita se os sinais são opostos e para a esquerda no caso contrário.

Os pontos fixos estável e instável existentes para valores inferiores do parâmetro ρ colidem no ponto de bifurcação ρ_0 e produzem um ponto semi-estável: um ponto que atrai de um lado e repele do outro. Mais, quando existem dois pontos fixos simétricos, um estável e outro instável, é ainda possível que ocorra uma bifurcação correspondente à troca de estabilidade entre eles, designada por bifurcação transcítica. Note que neste caso, além do ponto de bifurcação o número de pontos fixos não muda, contrariamente à bifurcação *fold*.

Em dimensões superiores, as bifurcações estruturalmente estáveis ocorrem quando um dos valores próprios é $\Lambda = 1$ ou $\Lambda = -1$ e os restantes valores próprios estão no exterior da circunferência unitária $\mathcal{S}$ do plano complexo. As bifurcações resultantes dizem-se bifurcações sela-nodo. Quando o valor do parâmetro ρ se aproxima do ponto de bifurcação $\rho = \rho_0$, um nodo (com valores próprios negativos) e uma sela (a que corresponde um valor próprio negativo e outro positivo) colidem e aniquilam-se entre si de tal modo que, para $\rho > \rho_0$, não existem pontos fixos. Não é estruturalmente estável a bifurcação que ocorre quando os valores próprios de uma transformação são um par de números complexos conjugados que cruzam $\mathcal{S}$, designada por bifurcação de Neimark-Sacker. De facto, dá-se o aparecimento de uma curva invariante fechada após o ponto fixo mudar de atrator para repulsor.

Teorema 1.1.10 (bifurcação de Neimark-Sacker) *Seja $S = (\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}, \mathbf{f}_\rho)$ um sistema dinâmico definido por $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}_\rho(\mathbf{x}_n)$, onde $\mathbf{f}_\rho$ é um difeomorfismo de classe C^r , $r \geq 5$, nas variáveis $\mathbf{x}$ e ρ . Se a transformação $\mathbf{f}_\rho$ satisfaz:*

- (1) $\mathbf{f}_\rho(0, 0) = (0, 0)$ para todo o ρ num intervalo em torno de 0;
- (2) $\mathbf{Df}_\rho(0, 0)$ tem dois valores próprios imaginários puros conjugados, $\Lambda(\rho)$ e $\bar{\Lambda}(\rho)$, tais que $|\Lambda(0)| = 1$ e

$$\frac{d|\Lambda(\rho)|}{d\rho} \neq 0$$

(por uma mudança de parâmetro, pode ser assumido que $|\Lambda(\rho)| = 1 + \rho$);

- (3) por uma mudança de base em $\mathbb{R}^2$ dependente de μ , verifica-se

$$\mathbf{Df}_\rho(0, 0) = (1 + \rho) \begin{pmatrix} \cos(\beta(\rho)) & -\sin(\beta(\rho)) \\ \sin(\beta(\rho)) & \cos(\beta(\rho)) \end{pmatrix}.$$

- (4) $\Lambda(0)^m = e^{im\beta(0)} \neq 1$ para $m = 1, 2, \dots, 5$, ou seja, $\Lambda(0)$ não é uma raiz de ordem baixa da unidade e não sendo igual a ± 1 ;
- (5) existe uma mudança de coordenadas (porque $\Lambda(0)$ não é uma raiz de ordem baixa de 1) que transforma $\mathbf{f}_\rho$ para a forma

$$\mathbf{f}_\rho(x_1, x_2) = N_\rho(x_1, x_2) + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^5),$$

onde $N_\rho(x_1, x_2)$ é dada em coordenadas polares por

$$N_\rho(r, \theta) = ((1 + \rho)r - l_1(\rho)r^3, \theta + \beta(\rho) + l_3(\rho)r^2).$$

Então, para todo o ρ suficientemente pequeno com $\rho l_1(\rho)^{-1} > 0$, $\mathbf{f}_\rho$ tem uma curva fechada invariante em redor do ponto fixo $(0, 0)$ de raio aproximadamente igual a $(\mu/l_1(\mu))^{1/2}$. Além disso, a curva fechada é atractora se $l_1(0) > 0$ e é repulsora se $l_1(0) < 0$.

Bifurcações elementares em tempo contínuo. Ocorre uma bifurcação estruturalmente estável (local) quando a parte real de um valor próprio de um ponto de equilíbrio passa através do eixo imaginário $\mathcal{I}$, ou seja, ocorre uma bifurcação em $(\mathbf{x}_b; \boldsymbol{\rho}_b)$ se a matriz Jacobiana $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_b, \boldsymbol{\rho}_b)$ tem um valor próprio Λ com parte real nula.

Existem, genericamente, duas maneiras pelas quais a condição de hiperbolicidade num ponto de equilíbrio pode deixar de ser válida. Para um certo valor $\boldsymbol{\rho}_b$, um valor próprio

real aproxima-se de 0 ou um par de valores próprios conjugados aproxima-se de $\mathcal{I}$ e tem-se $\Lambda_{1,2} = \pm i\beta$, com $\beta > 0$.

A bifurcação associada ao aparecimento de $\Lambda = 0$, é possível num espaço de fase unidimensional, e diz-se uma bifurcação tangencial (bifurcação fold ou bifurcação sela-nodo) para fluxos. A dinâmica do sistema neste tipo de bifurcação é caracterizada por uma colisão de pontos de equilíbrio, um instável e outro estável, que conduz ao seu desaparecimento.

Teorema 1.1.11 (bifurcação tangencial para fluxos) *Seja X um domínio conexo aberto de $\mathbb{R}$ e f uma função real de classe C^r , $r \geq 2$, definida em $X \times \mathbb{R}$. Considere o sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{R}, f)$ definido por $\dot{x} = f(x; \rho)$. Se $f(0; \rho_0) = 0$ e as derivadas de f na variável estado x e na variável parâmetro ρ satisfazem*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; \rho_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; \rho_0) > 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial \rho}(0; \rho_0) > 0,$$

então existem intervalos (ρ_1, ρ_0) e (ρ_0, ρ_2) e $\delta > 0$ tais que:

- (1) *Se $\rho \in (\rho_1, \rho_0)$, então $f(x; \rho)$ tem dois pontos fixos em $(-\delta, \delta)$ sendo o positivo instável e o negativo estável;*
- (2) *Se $\rho \in (\rho_0, \rho_2)$, então $f(x; \rho)$ não tem dois pontos fixos em $(-\delta, \delta)$.*

Se não existe destruição dos pontos de equilíbrio, mas apenas trocam de estabilidade quando colidem, a bifurcação diz-se transcítica.

Teorema 1.1.12 (bifurcação transcítica para fluxos) *Seja X um domínio conexo aberto de $\mathbb{R}$ e f uma função real de classe C^r , $r \geq 2$, definida em $X \times \mathbb{R}$. Considere o sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{R}, f)$ definido por $\dot{x} = f(x; \rho)$. Se $f(0; \rho_0) = 0$ e as derivadas de f na variável estado x e na variável parâmetro ρ satisfazem*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; \rho_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; \rho_0) > 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial x}(0; \rho_0) > 0,$$

então existem dois pontos de equilíbrio, um estável e outro instável.

Em sistemas dinâmicos com uma inversão ou simetria de reflexão (i.e., as equações de movimento permanecem imutáveis se é alterado o sinal de pelo menos uma das variáveis

do espaço de fase), é ainda possível um outro tipo de bifurcação, designada por bifurcação forquilha. Usualmente, ocorre bifurcação forquilha quando um ponto de equilíbrio do sistema bifurca em três pontos de equilíbrio, um com estabilidade oposta e dois com a mesma estabilidade do ponto de equilíbrio original. A bifurcação forquilha diz-se supercrítica (subcrítica) quando um ponto de equilíbrio estável (instável) bifurca em dois pontos de equilíbrio estáveis (instáveis) e um ponto de equilíbrio instável (estável).

A solução bifurcada pode não ter a simetria total da equação de movimento. Este fenómeno diz-se simetria quebrada. Uma solução com uma simetria quebrada não ocorre em isolamento porque a simetria quebrada aplicada sobre uma tal solução gera uma nova solução onde a mesma simetria é quebrada. Todas estas soluções formam uma família. Como tal, dois pontos fixos com uma simetria quebrada bifurcam sempre uma vez numa bifurcação transcritical. São ambos estáveis (bifurcação transcritical supercrítica) ou são ambos instáveis (bifurcação transcritical subcrítica).

Teorema 1.1.13 (bifurcação forquilha) *Seja X um domínio conexo aberto de $\mathbb{R}$ e f uma função real de classe C^r , com $r \geq 3$, definida em $X \times \mathbb{R}$. Considere o sistema dinâmico $S = (X, \mathbb{R}, f)$ definido por $\dot{x} = f(x; \rho)$. Se $f(-x; \rho) = -f(x; \rho)$ e as derivadas de f na variável estado x e na variável parâmetro ρ satisfazem, respectivamente,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0; \rho_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; \rho_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0; \rho_0) \neq 0,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}(0; \rho_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \rho \partial x}(0; \rho_0) > 0,$$

então o sistema tem uma bifurcação forquilha em $(x; \rho) = (0; \rho_0)$. A bifurcação forquilha é supercrítica (subcrítica) se a terceira derivada de f na variável x calculada em $(0; \rho_0)$ é negativa (positiva).

Bifurcações bubbling e blowout. Como já foi referido, o estudo da dinâmica de sistemas com atractores de Milnor contidos em subvariedades invariantes suaves do espaço de fase tem revelado a existência de bacias de atracção *riddled* ou localmente *riddled*. A estrutura e as propriedades de tais bacias podem ser conhecidas por análise dos expoentes de Lyapunov transversais para a subvariedade invariante ([5],[7],[8]).

Seja $S = (\mathbb{R}^m, \mathbb{N}_0, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido por uma transformação suave $\mathbf{f}$ que deixa invariante uma subvariedade l -dimensional $\mathcal{M}$ (de baixa dimensão). Suponha que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ é um atrator para a restrição $\mathbf{f}|_{\mathcal{M}}$ e que η é uma medida natural suportada em

$\mathcal{A}$. Então, para quase todo o $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ relativamente à medida η , existem $(m - l)$ expoentes de Lyapunov transversais $\lambda_i^\perp(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq m - l$, cujos subespaços próprios são ortogonais a $\mathcal{M}$. O maior expoente de Lyapunov transversal diz-se o expoente de Lyapunov normal. Existem ainda l expoentes de Lyapunov tangenciais (longitudinais) $\lambda_j^\parallel(\mathbf{x})$, $1 \leq j \leq l$. Sendo η uma medida natural, não se considera a dependência de $\mathbf{x}$. Se o expoente de Lyapunov normal é negativo então existe um conjunto $B_\eta \subset \mathcal{A}$ de medida total tal que, para todo o $\mathbf{x} \in B_\eta$, existe uma variedade estável local de dimensão $(m - l)$ transversal a $\mathcal{M}$. Portanto, dada uma vizinhança U de $\mathcal{A}$, os pontos situados na intersecção de U com a variedade estável são assintóticos para $\mathcal{A}$. Por outro lado, se pelo menos o expoente de Lyapunov normal é positivo, então para todo o $\mathbf{x} \in B_\eta$ existe uma variedade instável local e $\mathcal{A}$ deve ser pelo menos Lyapunov instável.

Coloca-se a questão de analisar sob que condições o atrator $\mathcal{A}$ para a restrição $\mathbf{f}|_{\mathcal{M}}$ é ainda um atrator para o sistema total $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Esta questão conduz ao estudo do sinal do expoente de Lyapunov normal para a medida natural suportada em $\mathcal{A}$. Ashwin *et al.* [7] descrevem o seguinte mecanismo possível para a perda de estabilidade do atrator $\mathcal{A}$ contido em $\mathcal{M}$, com base na teoria de bifurcações.

Suponha que a dinâmica transversal da subvariedade invariante $\mathcal{M}$ é definida por um parâmetro ρ , mas que esse parâmetro não afecta a sua dinâmica. Existe um valor crítico ρ_c tal que, para $\rho > \rho_c$, todos os conjuntos invariantes mergulhados em $\mathcal{A}$ são estáveis relativamente a perturbações transversais a $\mathcal{M}$, ou seja, são atractores na direcção transversal. Para $\rho > \rho_c$ o expoente de Lyapunov normal é negativo e, como tal, as trajectórias próximas à subvariedade $\mathcal{M}$ convergem exponencialmente para ela. O atrator $\mathcal{A}$ é então um atrator para o sistema total. Quando se considera um valor paramétrico ρ menor do que ρ_c , existe um conjunto invariante contido em $\mathcal{A}$ que se torna instável a perturbações transversais a $\mathcal{M}$. Assim, quando $\rho < \rho_c$, o atrator caótico $\mathcal{A}$ é ainda transversalmente estável (atractor) em média pois muitas condições iniciais próximas de $\mathcal{A}$ permanecem próximas de $\mathcal{A}$. No entanto, em consequência da existência de um conjunto invariante instável na direcção transversal mergulhado em $\mathcal{A}$, algumas condições iniciais evoluem numa órbita repulsora para longe de $\mathcal{M}$ contendo $\mathcal{A}$. Este tipo de transição em $\rho = \rho_c$ diz-se uma bifurcação *bubbling* ([7],[8]).

No ponto $\rho = \rho_c$ de bifurcação *bubbling* podem ocorrer duas situações ([81],[52],[39]). Se cada órbita repulsora de S é atraída para um conjunto fora de $\mathcal{M}$, então diz-se que bifurcação *bubbling* em $\rho = \rho_c$ resulta numa bacia de atracção *riddled* para o atrator $\mathcal{A}$ na subvariedade invariante $\mathcal{M}$ [5] e diz-se uma bifurcação *riddling*, segundo designação de Lai

et al. [39]. Portanto, o ponto de bifurcação *riddling* $\rho = \rho_c$ corresponde ao valor de ρ no qual a primeira órbita periódica no atrator $\mathcal{A}$ se torna transversalmente instável, e evolui para um atrator remoto. Por outro lado, se todas as possíveis trajectórias do sistema dinâmico são limitadas e $\mathcal{A}$ é o único atrator do sistema, então a trajectória repulsora de $\mathcal{A}$ eventualmente volta a uma vizinhança de $\mathcal{A}$ após um período transitório, no qual a órbita faz vários percursos fora de $\mathcal{M}$. Nesse período transitório ocorrem explosões temporais que subitamente interrompem o comportamento típico de qualquer variável estado.

Quando se considera uma diminuição adicional de ρ , novos conjuntos invariantes no atrator caótico $\mathcal{A}$ perdem a sua estabilidade transversal. Por este processo o próprio atrator caótico $\mathcal{A}$ pode torna-se transversalmente instável em média para o sistema total num certo valor paramétrico ρ_{cc} . Em $\rho = \rho_{cc}$ tem lugar uma bifurcação *blowout*, segundo designação de Ott e Sommerer [82]. Portanto, para $\rho < \rho_{cc}$ todas as órbitas são repulsoras a partir de $\mathcal{A}$. No ponto de bifurcação *blowout* $\rho = \rho_{cc}$ o expoente de Lyapunov normal da medida natural em $\mathcal{A}$ torna-se positivo [82]. Esta bifurcação pode resultar numa forma extrema de explosões intermitentes, a intermitência *on-off* [67]. Conforme designações de Venkataramani *et al.* [89], se as explosões aparecem subitamente a bifurcação *blowout* diz-se *hard* e, se a amplitude máxima de explosão aumenta continuamente a partir de 0, diz-se *soft*.

Definição 1.1.26 *Seja $S = (\mathbb{R}^m, \mathbb{N}_0, \mathbf{f})$ um sistema dinâmico definido por uma transformação suave $\mathbf{f}$. Suponha que sob a iteração de $\mathbf{f}$ existe uma subvariedade invariante l -dimensional $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ é um atrator caótico para a restrição $\mathbf{f}|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, com medida natural. Diz-se que o sistema tem uma bifurcação *blowout* se o expoente de Lyapunov normal relativamente à medida natural passa de negativo a positivo.*

O termo *blowout* foi introduzido por Ott e Sommerer no artigo [82] de 1994, embora o fenómeno tenha sido reconhecido dez anos antes por Pikovsky [62] e por Yamada e Fujisaka [91]. A escolha do termo deve-se a que, quando o expoente de Lyapunov normal deixa de ser negativo, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ deixa de ser atrator para o sistema total e consequentemente trajectórias típicas em $\mathbb{R}^m$ são sopradas para fora de $\mathcal{M}$ para outros atractores contidos em $\mathbb{R}^m$.

1.2 Generalidades em sincronização de caos

Os conceitos presentes nesta secção são introduzidos apenas para sistemas dinâmicos discretos, visto que os correspondentes para sistemas dinâmicos contínuos autónomos são

análogos, com as adaptações óbvias. De facto, dado o fluxo ϕ^t gerado pelo campo vectorial $\mathbf{f}$ suficientemente suave de um sistema autónomo definido por (1.2), pode ser considerado o difeomorfismo $\mathbf{f}$ definido como a transformação tempo- T analítica $\mathbf{x}_{n+1} = \phi^T(\mathbf{x}_n)$.

Sejam $S_1 = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{f})$ e $S_2 = (X, \mathbb{Z}, \mathbf{g})$ sistemas dinâmicos discretos caóticos definidos num subconjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ por difeomorfismos $\mathbf{f}, \mathbf{g} : X \rightarrow X$. As transformações $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ satisfazem uma condição dissipativa global e, como tal, possuem atractores globais $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nos respectivos espaços de fase X e Y . Após um período de transição inicial, o comportamento de cada um dos sistemas S_1 e S_2 , definidos pelas equações às diferenças $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ e $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{y}_n)$, pode ser discutido em termos da dinâmica dos conjuntos invariantes $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$.

A sincronização assintótica entre os sistemas caóticos S_1 e S_2 , sujeitos a uma força de ligação, corresponde à existência de uma função invertível suave $\mathbf{H}$ que transforme trajectórias do atractor caótico $\mathcal{A}_1$ em trajectórias no atractor caótico $\mathcal{A}_2$ de tal modo que se uma órbita de S_1 aproxima uma trajectória $\mathbf{x}_n$ no seu atractor $\mathcal{A}_1$ a correspondente órbita do sistema S_2 aproxima a trajectória $\mathbf{y}_n = \mathbf{H}(\mathbf{x}_n)$ em $\mathcal{A}_2$. Assim, o conhecimento de um vector estado de S_1 permite prever o correspondente vector estado de S_2 .

A ocorrência de coincidência total ou parcial dos vectores estado $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos sistemas S_1 e S_2 , idênticos ou não, pode ser uma expressão formal de comportamento sincrónico entre eles.

Definição 1.2.1 *Os sistemas dinâmicos caóticos S_1 e S_2 dizem-se em sincronização assintótica se*

$$(1.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\| = 0$$

para uma certa força de ligação entre eles, e dizem-se em sincronização prática se a diferença $\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n$ varia num intervalo de amplitude inferior a 1, ou seja, se

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n\| < K$$

para certa constante positiva $K < 1$. A diferença $\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n$ diz-se o erro de sincronização na n -ésima iterada.

A possibilidade dos sistemas S_1 e S_2 sincronizarem depende de diversas condições tais como as regiões paramétricas de cada um deles, a força de ligação considerada e o grau de diferenciação dos sistemas entre si. O objectivo é obter sincronização dos sistemas com uma força de ligação mínima.

A condição (1.15) implica convergência de cada um dos vectores estado $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ para o conjunto $\{\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$ relativo ao vector estado $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ do sistema obtido por ligação, designado por sistema ligado (composto ou integral). O estado $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ diz-se o estado caótico sincrónico e, quando é atingido, as dinâmicas caóticas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ficam restringidas a um subespaço invariante atrator m -dimensional, designado por conjunto de sincronização.

Embora não exista uma maneira única de ligar os sistemas S_1 e S_2 , a ligação deve possuir determinadas propriedades relevantes. Pretende-se que a ligação:

- (i) seja dissipativa (ou contractora), isto é, que tenda a tornar os vectores estado $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos sistemas S_1 e S_2 próximos entre si;
- (ii) não afecte o estado caótico sincrónico $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

A forma apropriada de aplicar um operador de ligação linear às transformações não-lineares $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$, que satisfaça as condições (i) e (ii), é por multiplicação dos operadores correspondentes,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{y}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 - \rho_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}_n) \end{bmatrix},$$

com $0 \leq \rho_1, \rho_2 \leq 1$. Obtem-se uma ligação bidireccional entre S_1 e S_2 e o sistema ligado define-se por

$$(1.16) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = (1 - \rho_1) \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho_1 \mathbf{g}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho_1 [\mathbf{g}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)] \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho_2) \mathbf{g}(\mathbf{y}_n) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_n) + \rho_2 [\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_n)] \end{cases}.$$

Os números reais ρ_1 e ρ_2 , designados por parâmetros de ligação², controlam a força de ligação entre os sistemas. As expressões $\rho_1 [\mathbf{g}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)]$ e $\rho_2 [\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_n)]$ dizem-se os termos de ligação. Se $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ e $\rho_1 = \rho_2$ então (1.16) é simétrico. Quando $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ os sistemas S_1 e S_2 dizem-se em ligação dissipativa externa e, se $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, em ligação dissipativa externa generalizada.

A ligação unidireccional é descrita pela matriz de interacção

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 - \rho \end{bmatrix}$$

²Note que para obter ligação dissipativa devem ser introduzidos termos que diminuam o valor de $\mathbf{x}$. Um termo aditivo como $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \rho \mathbf{x}_n$ pode ou não reduzir o valor de $\mathbf{x}$, dependendo dos sinais e dos valores de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e ρ . Por outro lado, a multiplicação por um factor ρ tal que $|\rho| < 1$, como $\mathbf{x}_{n+1} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$, reduz sempre o valor absoluto de $\mathbf{x}$.

e conduz ao sistema ligado não-simétrico

$$(1.17) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho) \mathbf{g}(\mathbf{y}_n) \end{cases}$$

com estrutura *skew product*, onde $\mathbf{x}_n$ e $\mathbf{y}_n$ são as variáveis dinâmicas dos sistemas transporte e resposta, respectivamente. Contrariamente à ligação bidireccional em (1.16), apenas a dinâmica do sistema resposta é afectada pelo sistema transporte através da ligação; o inverso não é válido.

Considere a transformação $2m$ -dimensional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \rho) \equiv (\mathbf{f}(\mathbf{x}), \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho) \mathbf{g}(\mathbf{y}_n))$$

obtida de (1.17). Os sistemas S_1 e S_2 em ligação unidireccional dizem-se assintoticamente sincronizados se existe uma região de valores do parâmetro ρ na qual, para quaisquer condições iniciais $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ e $(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_0)$, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n - \tilde{\mathbf{y}}_n\| = 0$$

com $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \mathbf{F}^n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \rho)$ e $(\mathbf{x}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) = \mathbf{F}^n(\mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{y}}_0; \rho)$.

1.2.1 Sincronização idêntica

Considere os sistemas dinâmicos discretos S_1 e S_2 idênticos

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n)$$

definidos por uma mesma transformação caótica $\mathbf{f}$. Assuma que $\mathbf{f}$ satisfaz uma condição dissipativa global e tem, por isso, um atractor global $\mathcal{A}$.

Dado que a dinâmica de $\mathbf{f}$ é caótica, após um período de transição inicial as sequências de iterações geradas pelos sistemas não-correlacionados S_1 e S_2 a partir de condições iniciais diferentes $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ representam duas trajectórias independentes no atractor global $\mathcal{A}$. Em cada um dos sistemas a evolução no atractor caótico $\mathcal{A}$ é caracterizada por um expoente de Lyapunov positivo.

Seja $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ a variável que representa a distância $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ entre os vectores estado dos sistemas S_1 e S_2 . A evolução dessa variável é determinada pela equação às diferenças

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_n).$$

Para pequenos valores de $\mathbf{e}$, ou seja, para $\mathbf{e} \ll \mathbf{e}_{\mathcal{A}}$ onde $\mathbf{e}_{\mathcal{A}}$ é a diferença máxima entre dois vectores estado no atractor $\mathcal{A}$, pode assumir-se que a distância entre as trajectórias dos sistemas S_1 e S_2 após n iterações é dada pela equação linearizada

$$(1.18) \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_0 e^{\lambda n},$$

onde λ é um expoente de Lyapunov e $\mathbf{e}_0$ é a diferença inicial entre as trajectórias. Por (1.18), a equação às diferenças da separação de trajectórias é

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n e^{\lambda}.$$

Assim, para trajectórias inicialmente próximas, a separação entre elas aumenta se λ é um valor positivo e diminui se λ é um valor negativo, segundo uma taxa de variação que é proporcional ao expoente de Lyapunov λ .

Considere a ligação bidireccional em (1.16) dos sistemas S_1 e S_2

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = (1 - \rho_1) \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho_1 \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho_2 \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho_2) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) \end{cases}.$$

O principal objectivo no estudo deste regime de sincronização, designado por sincronização idêntica ou completa, é determinar uma certa variação dos parâmetros de ligação ρ_1 e ρ_2 tal que, para valores iniciais próximos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$, se obtenha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_n\| = 0,$$

ou seja, tenha lugar o estado caótico sincrónico simétrico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$. Para essa variação dos parâmetros a evolução dos vectores estado tem lugar no hiperplano de dimensão m , $\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} = \mathbf{y}\}$, designado por variedade de sincronização.

No caso particular em que $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$, o sistema ligado toma a forma

$$(1.19) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = (1 - \rho) \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) \end{cases}$$

e é completamente simétrico relativamente à troca das variáveis. Visto que o sistema ligado (1.19) permanece invariante sob a transformação $\mathbf{x} \longleftrightarrow \mathbf{y}$, tem o estado sincrónico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ como uma das suas soluções para qualquer valor de ρ .

A ligação unidireccional (1.17) em sincronização idêntica corresponde ao sistema ligado

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + (1 - \rho) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) \end{cases}.$$

Embora esta ligação seja assimétrica, o sistema tem $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ como solução caótica simétrica.

Podem ser considerados outros mecanismos de ligação entre sistemas dinâmicos discretos que conduzem a sincronização idêntica. Por exemplo, a ligação dissipativa interna

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}((1-\rho)\mathbf{x}_n + \rho\mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\rho\mathbf{x}_n + (1-\rho)\mathbf{y}_n) \end{cases},$$

a ligação difusiva linear

$$(1.20) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \rho(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n) \end{cases},$$

por adição dos termos de ligação lineares $\rho(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n)$ e $\rho(\mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n)$, a ligação por termos quadráticos

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) + \rho(\mathbf{x}_n^2 - \mathbf{y}_n^2) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{y}_n) + \rho(\mathbf{y}_n^2 - \mathbf{x}_n^2) \end{cases},$$

ou a ligação bilinear quando os termos de ligação lineares em (1.20) são substituídos por $\pm\rho\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n$. Contudo, estes esquemas de ligação são do ponto de vista aplicativo menos realistas. É ainda possível considerar os esquemas de ligação anteriores entre sistemas unidireccionalmente ligados e com parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2 .

Quando $\rho = 0$ em (1.19), as variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ estão completamente não-correlacionadas e os sistemas S_1 e S_2 evoluem de forma independente. Sempre que a ligação está activa, para qualquer $\rho > 0$, existe alguma dependência entre as trajectórias dos sistemas mas a força de ligação ρ pode não ser suficientemente grande de modo que ocorra a sincronização dos sistemas.

Se ρ é considerado como um parâmetro de bifurcação que aumenta gradualmente a partir de 0, é geralmente observada uma complexa estrutura de bifurcação (possivelmente incluindo estados não-caóticos) mas existe claramente uma tendência para acentuar a correlação entre as variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de (1.19). O objectivo é obter os sistemas sincronizados com uma força de ligação ρ tão pequena quanto possível. Quando $\rho = 1/2$ as variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ tornam-se idênticas após poucas iterações e observa-se o estado sincrónico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$, para todo o n . Assim, $\rho = 1/2$ corresponde à força de ligação máxima necessária. No entanto, existe uma força crítica de ligação $0 < \rho_{sync} < 1/2$, designada por limiar de sincronização, tal que para $\rho > \rho_{sync}$ é observado o estado sincrónico $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Quando este estado é atingido, a dinâmica do sistema ligado corresponde à de uma única transformação $\mathbf{f}$. Como a ligação não afecta este estado, as dinâmicas de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são as mesmas que nos sistemas

desligados, ou seja, são caóticas. Quando cada um dos sistemas exibe comportamento caótico e as variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são idênticas em cada instante de tempo estes dizem-se em sincronização total e $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ diz-se o estado caótico totalmente síncronico.

A sincronização próximo de $\rho = \rho_{sync}$ parece ser extremamente sensível. Os vectores estado de (1.19) fora do hiperplano $\mathcal{M}$ representam o estado assíncronico. Com aumento de ρ a distribuição dos vectores estado tende para $\mathcal{M}$ e, acima do limiar de ligação ρ_{sync} todos os pontos satisfazem a condição $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Análise da estabilidade assintótica local do estado síncronico. Quando no sistema ligado (1.19) é atingido o estado caótico totalmente síncronico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$, as dinâmicas caóticas das variáveis $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ficam restringidas a um subespaço invariante atrator m -dimensional. Assim, o problema de sincronização pode ser entendido como um problema de estabilidade assintótica de um atrator caótico síncronico simétrico $\mathcal{A}$ de dimensão m , definido por $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, mergulhado num espaço de fase $2m$ -dimensional.

Visto que o estado síncronico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ é uma solução de (1.19) para qualquer valor de ρ , se as condições iniciais são simétricas, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$, a simetria é preservada no decurso do tempo. Se é pretendido que a sincronização se estabeleça mesmo a partir de vectores estado iniciais não-simétricos, há que impôr a condição de estabilidade assintótica: que o estado totalmente síncronico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ seja um atrator. Em sistemas caóticos idênticos, a estabilidade assintótica do estado síncronico é o único requisito para sincronização, pois a variedade de sincronização suave $\mathcal{M}$ é invariante mesmo que não seja estável. Esta condição de estabilidade assintótica determina a força crítica de ligação ρ_{sync} para o começo de sincronização estável.

O limiar de sincronização ρ_{sync} , como o valor a partir do qual se obtém o estado síncronico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ assintoticamente estável, pode ser calculado por linearização em torno deste ponto fixo. Para caracterizar a transição de sincronização em $\rho = \rho_{sync}$ é conveniente definir duas novas variáveis

$$(1.21) \quad \mathbf{U}_n = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_n = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n).$$

Geometricamente, a variável $\mathbf{U}_n$ está direccionada ao longo do hiperplano $\mathcal{M}$, enquanto a variável $\mathbf{V}_n$ corresponde à direcção transversal a este hiperplano. No estado totalmente síncronico tem-se $\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n = \mathbf{U}_n$. Próximo do estado totalmente síncronico, a variável $\mathbf{V}_n$ é pequena. Em estados quase assíncronos mas obtidos para valores de ρ ainda próximos de ρ_{sync} , é característico o aparecimento de comportamento intermitente

da variável $\mathbf{V}_n$. A ocorrência de raras mas intensas explosões de $\mathbf{V}_n$ é uma característica desta intermitência *on-off*.

Na análise de oscilações caóticas sincronizadas há que distinguir entre a estabilidade a perturbações dentro do hiperplano $\mathcal{M}$ e transversais a ele. Conforme provado por Rabinovich e Trubetskov [71], o regime de sincronização idêntica é estável quando as trajectórias sincronizadas são estáveis a perturbações na direcção transversal a $\mathcal{M}$. Assim, a evolução da variável transversal $\mathbf{V}_n$ determina a estabilidade do estado síncrono $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ que pode ser descrita como a estabilidade transversal do atractor caótico $\mathcal{A}$.

Seja $m = 1$. Dado que o vector próprio do expoente de Lyapunov $\lambda_{\mathbf{V}}$, designado por expoente de Lyapunov transversal, se direcciona transversalmente ao subespaço simétrico $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, o seu sinal determina a estabilidade transversal do atractor caótico $\mathcal{A}$. Se $\lambda_{\mathbf{V}} < 0$ as oscilações síncronas são transversalmente estáveis e se $\lambda_{\mathbf{V}} > 0$ as oscilações síncronas são transversalmente instáveis. Quando as oscilações caóticas são síncronas, o vector próprio do expoente de Lyapunov $\lambda_{\mathbf{U}}$, designado por expoente de Lyapunov tangencial (longitudinal), é tangente ao subespaço simétrico $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Como tal o sinal de $\lambda_{\mathbf{U}}$ determina o carácter das oscilações atractor caótico $\mathcal{A}$ no subespaço simétrico. Se $\lambda_{\mathbf{U}} < 0$ as oscilações são periódicas e se $\lambda_{\mathbf{U}} > 0$ as oscilações são caóticas. Em resumo, a taxa de crescimento de uma pequena diferença ao longo das trajectórias no atractor caótico $\mathcal{A}$ é medida pelo expoente de Lyapunov tangencial $\lambda_{\mathbf{U}}$ e a evolução de perturbações na direcção perpendicular é caracterizada pelo expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\mathbf{V}}$.

Nas variáveis (1.21) o sistema ligado (1.19) é reescrito como

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{n+1} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n)], \\ \mathbf{V}_{n+1} = \frac{1-2\rho}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n)] \end{cases}.$$

A linearização deste sistema próximo do estado síncrono $\mathbf{U}_n$, onde a variável $\mathbf{V}_n$ é pequena, conduz a transformações lineares para pequenas perturbações de $\mathbf{U}_n$ e $\mathbf{V}_n$ dadas por

$$(1.22) \quad \mathbf{U}_{n+1} = [\mathbf{Df}(\mathbf{U}_n)] \mathbf{U}_n \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{n+1} = (1-2\rho) [\mathbf{Df}(\mathbf{U}_n)] \mathbf{V}_n,$$

onde a matriz Jacobiana $\mathbf{Df}(\mathbf{U}_n)$ é calculada em $\mathbf{U}_n$. Visto que na aproximação linear as perturbações de $\mathbf{U}_n$ e $\mathbf{V}_n$ não interagem, as perturbações podem ser consideradas separadamente. Para $\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$, $\lambda_{\mathbf{U}}$ não é mais do que o expoente de Lyapunov λ para a

transformação desligada,

$$\lambda_{\mathbf{U}} = \lambda = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |\mathbf{Df}(\mathbf{U}_i)|,$$

e, para oscilações sincronizadas, o expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\mathbf{V}}$ pode ser escrito em termos de λ como

$$(1.23) \quad \lambda_{\mathbf{V}} = \lambda + \ln |1 - 2\rho|.$$

Segue de (1.23) que $\lambda_{\mathbf{V}} < \lambda_{\mathbf{U}}$. Tem-se $\lambda_{\mathbf{V}} < 0$ para quaisquer oscilações sincronizadas regulares enquanto, no caso de oscilações caóticas, $\lambda_{\mathbf{V}}$ pode ser negativo ou positivo conforme o valor de ρ tomado.

Dado que $\lambda_{\mathbf{V}}$ depende de λ pela relação (1.23), ρ_{sync} é obtido com base no expoente de Lyapunov do sistema caótico desligado. A fronteira de estabilidade assintótica do estado síncrono pode ser deduzida de imediato: o estado síncrono é assintoticamente estável se $\lambda_{\mathbf{V}} < 0$ e instável se $\lambda_{\mathbf{V}} > 0$. Assim, a variação de estabilidade assintótica é dada por

$$\frac{1 - \exp(-\lambda)}{2} < \rho < \frac{1 + \exp(-\lambda)}{2},$$

e o limiar de sincronização, definido por $\lambda_{\mathbf{V}} = 0$, é $\ln |1 - 2\rho_{sync}| = -\lambda$, o que implica

$$\rho_{sync} = \frac{1 - \exp(-\lambda)}{2}.$$

Análise de estabilidade global do estado síncrono. Seja $m = 1$. A estabilidade assintótica global de um ponto fixo fica garantida se está definida, numa vizinhança desse ponto, uma função definida positiva cuja derivada é semi-definida negativa. Para obter condições para a estabilidade assintótica global do estado síncrono $x = y$, define-se a função de Lyapunov por

$$L(x, y) = (x - y)^2.$$

A igualdade $L(x, y) = 0$ apenas é válida quando os sistemas estão totalmente sincronizados. Para a estabilidade global assintótica do estado síncrono, a função de Lyapunov deverá satisfazer a condição

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} < 1$$

na região de estabilidade. Para o esquema de ligação (1.19), a função de Lyapunov é dada por

$$L_{n+1} = (x_{n+1} - y_{n+1})^2 = (1 - 2\rho)^2 [f(x_n) - f(y_n)]^2,$$

e, usando a expansão de Taylor de $f(x_n)$ em torno de y_n , obtem-se

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = (1 - 2\rho)^2 \left[f'(y_n) + f''(y_n) \frac{x_n - y_n}{2} + O(x_n - y_n)^2 \right]^2.$$

Se a expressão no parêntesis recto no lado direito da equação é limitada então existem valores de ρ em torno de $1/2$ para os quais o estado sincronizado é global e assintoticamente estável.

Transição de sincronização do ponto de vista topológico. Ao variar a força de ligação é possível identificar um número de diferentes estados caracterizados por diferentes graus de correlação entre os sistemas S_1 e S_2 . Para visualizar a sincronização dos sistemas S_1 e S_2 traça-se $\mathbf{y}_n$ versus $\mathbf{x}_n$ em cada iteração, para determinado valor do parâmetro de ligação ρ , e verifica-se se os pontos $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$ se situam no hiperplano $\mathcal{M}$ definido por $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

A transição de sincronização observada em gráficos obtidos com diferentes valores de ρ , ou seja, a transição de um atractor totalmente sincrónico simétrico situado no hiperplano $\mathcal{M}$ para um conjunto assimétrico³ ocupando uma vizinhança desse hiperplano, pode ser discutida do ponto de vista topológico em termos da teoria de bifurcação, conforme os artigos de Maistrenko *et al.* ([43],[44]). Dado que cada trajectória caótica de um sistema dinâmico é estruturada sobre um conjunto infinito denso de órbitas periódicas instáveis, é conveniente considerá-las no estudo da transição de sincronização para, quando possível, aplicar os resultados de teoria de bifurcação a órbitas periódicas.

Dado o estado totalmente sincrónico simétrico $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n$ para $\rho \approx 1/2$, analise-se a perda de simetria quando ρ decresce.

Se a transformação $\mathbf{f}$ tem um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ então, para todo o ρ , existe uma solução ponto fixo sincrónica $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n = \mathbf{x}^*$. A estabilidade de $\mathbf{x}^*$ pode ser determinada com base nas equações lineares em (1.22) através dos valores próprios

$$(1.24) \quad \Lambda_{\mathbf{U}} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*) \quad \text{e} \quad \Lambda_{\mathbf{V}} = (1 - 2\rho) \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)$$

correspondentes às perturbações das variáveis $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ definidas por (1.21). Sendo $\mathbf{f}$ caótica, o valor próprio $\Lambda_{\mathbf{U}}$ pertence ao exterior do circunferência unitária $\mathcal{S}$ do plano complexo e a direcção $\mathbf{U}$ é instável. A direcção transversal $\mathbf{V}$ é assintoticamente estável se

$$|(1 - 2\rho) \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)| < 1$$

³Neste contexto, assimétrico significa que $x_n \neq y_n$, pois a distribuição de probabilidade no plano (x, y) pode permanecer simétrica.

e instável no caso contrário. Como tal, ocorre bifurcação transversal em $\rho_{sync}(\mathbf{x}^*)$ determinada pela condição

$$(1.25) \quad \rho_{sync}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \left(1 - |\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)|^{-1} \right).$$

Para $\rho > \rho_{sync}(\mathbf{x}^*)$, o ponto fixo é instável na direcção tangencial de $\mathbf{U}$ e assintoticamente estável na direcção transversal de $\mathbf{V}$ e, para $\rho < \rho_{sync}(\mathbf{x}^*)$, a instabilidade transversal resulta no aparecimento de novas órbitas.

O conhecimento dessas órbitas resulta do tipo de bifurcação transversal determinado pelo valor próprio $\Lambda_{\mathbf{U}}$: se $\Lambda_{\mathbf{U}} = 1$ ocorre uma bifurcação *fold* e se $\Lambda_{\mathbf{V}} = -1$ ocorre uma bifurcação duplicação do período. Se estas bifurcações transversais são supercríticas, o que não pode ser decidido da teoria linear pois depende da não-linearidade da transformação $\mathbf{f}$, surge um par de pontos fixos simétricos no caso de bifurcação *fold* ou uma órbita de período 2 no caso de bifurcação duplicação do período. Estes novos pontos periódicos, o par de pontos fixos ou o ciclo, são estáveis na direcção transversal de $\mathbf{V}$ em redor do estado sincrónico $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mas instáveis na direcção tangencial de $\mathbf{U}$ por influência do ponto fixo simétrico.

Considere a generalização para o caso das órbitas periódicas de $\mathbf{f}$. Se $\Lambda_{\mathbf{U}} = 1$ uma órbita de período N simétrica $\mathbf{x}_n^* = \mathbf{y}_n^*$ de $\mathbf{f}$ bifurca num par de órbitas simétricas em *fold* e, se $\Lambda_{\mathbf{U}} = -1$, bifurca numa órbita de período $2N$ em duplicação do período. O ponto de bifurcação é determinado pela generalização de (1.24): para uma órbita de período N o valor próprio é o produto de valores próprios locais

$$\Lambda_{\mathbf{U}} = (1 - 2\rho)^N \prod_{n=1}^N \mathbf{Df}(\mathbf{x}_n^*)$$

e, como generalização de (1.25), tem-se

$$(1.26) \quad \rho_{sync}(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\prod_{n=1}^N |\mathbf{Df}(\mathbf{x}_n^*)| \right)^{-1/N} \right].$$

Tipicamente, os valores próprios para diferentes órbitas periódicas são diferentes, logo existe uma região de bifurcação

$$\left] \rho_{sync, \min}, \rho_{sync, \max} \right[$$

onde diferentes órbitas periódicas se tornam transversalmente instáveis. Assim, a transição para o atrator caótico sincrónico $\mathcal{A}$ exige a análise pormenorizada de um intervalo de parâmetros com vista a delinear diferentes níveis de sincronização.

1.2.2 Generalizações da noção de sincronização idêntica

Antes de definir formalmente outros regimes de sincronização, pode tentar-se uma generalização da ligação (1.19) apresentada na Subsecção anterior para sistemas idênticos. Suponha que duas transformações não-idênticas $\mathbf{f}(\mathbf{x}; a)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{y}; b)$, mas apenas com ligeiros desajustes paramétricos, são bidireccionalmente ligadas pelo operador linear

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho & \rho \\ \rho & 1 - \rho \end{bmatrix}.$$

Em vez de (1.19), obtem-se o sistema ligado não simétrico

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = (1 - \rho) \mathbf{f}(\mathbf{x}_n; a) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{y}_n; b) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}_n; a) + (1 - \rho) \mathbf{f}(\mathbf{y}_n; b) \end{cases},$$

que, nas variáveis (1.21), dá lugar ao sistema equivalente

$$(1.27) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{n+1} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n; a) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n; b)] \\ \mathbf{V}_{n+1} = \frac{1 - 2\rho}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n - \mathbf{V}_n; b)] \end{cases}.$$

O estado simétrico $\mathbf{V}_n = \mathbf{0}$ já não é uma solução deste sistema mas, para um desajuste paramétrico entre as transformações que seja pequeno, é esperado que $\mathbf{V}_n$ seja pequeno. Além disso, negligenciando o efeito de pequenas perturbações da variável $\mathbf{U}_n$ e considerando apenas a segunda equação de (1.27), obtem-se a equação linearizada

$$(1.28) \quad \mathbf{V}_{n+1} = \frac{1 - 2\rho}{2} [(\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) + \mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)) \mathbf{V}_n + \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)]$$

para pequenas perturbações de $\mathbf{V}_n$. A principal diferença relativamente à expressão (1.22) do caso simétrico é a presença do termo não-homogéneo $\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)$. Ele é proporcional ao desajuste paramétrico, e pode assumir-se que é de ordem $\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b) \ll 1$. Se a diferença $\mathbf{V}_n$ entre os estados dos sistemas é maior do que $\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)$, este termo não-homogéneo não é importante. No entanto, se a diferença $\mathbf{V}_n$ é de ordem $\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)$, o termo não-homogéneo actua como uma força casual que impede $\mathbf{V}_n$ de se tornar inferior a $\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)$. Para a dinâmica de $\mathbf{V}_n$ sujeita a esta força, existe então uma limitação de tipo

$$|\mathbf{V}_n| \approx \ln |\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)|$$

e a dinâmica de $\mathbf{V}_n$ tem lugar na região onde

$$|\mathbf{V}_n| > \ln |\mathbf{f}(\mathbf{U}_n; a) - \mathbf{f}(\mathbf{U}_n; b)|,$$

mesmo para $\lambda_V < 0$. Existem, portanto, explosões de V_n no estado síncrono mesmo quando o expoente de Lyapunov transversal é negativo, mostrando que o estado caótico síncrono é extremamente sensível a perturbações (mesmo um pequeno desajuste paramétrico pode resultar em grandes explosões). Verifica-se assim que a não existência de simetria no sistema ligado, resultante da não identidade entre os sistemas, dificulta a obtenção de um estado síncrono estável.

Sincronização generalizada. Considere o sistema unidireccionalmente ligado

$$(1.29) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \\ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n; \boldsymbol{\rho}) \end{cases}$$

para difeomorfismos $\mathbf{f} : X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow X$ e $\mathbf{g} : Y \subset \mathbb{R}^l \rightarrow Y$, onde X e Y são conjuntos compactos, e o vector de parâmetros $\boldsymbol{\rho}$ caracteriza a força de interacção entre os sistemas transporte e resposta.

Definição 1.2.2 *Os sistemas em (1.29) dizem-se em sincronização generalizada se existe uma transformação $\mathbf{H} : X \rightarrow Y$ entre os espaços de fase e uma variedade invariante definida por*

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{x})\}$$

que contenha pelo menos um atractor caótico de Milnor. A transformação $\mathbf{H}$ diz-se a função de sincronização generalizada e $\mathcal{M}$ diz-se a variedade de sincronização.

Em particular, quando os sistemas são idênticos e o hiperplano

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{y} = \mathbf{x}\}$$

do sistema ligado é invariante pela dinâmica, a função $\mathbf{H}$ é simplesmente a identidade e tem-se sincronização idêntica.

Por vezes é mais conveniente estabelecer uma relação entre $\mathbf{y}_{n+1}$ e $\mathbf{x}_n$, escrevendo $\mathbf{y}_{n+1} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_n)$, dado que estas duas variáveis estão directamente relacionadas pela equação que caracteriza o sistema resposta. Se a transformação $\mathbf{f}$ que define o sistema transporte é invertível então esta relação é equivalente à definição anterior.

Quando $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$, o sistema resposta evolui independentemente do transporte, e é assumido que ambos os sistemas são caóticos.

A Definição 1.2.2 permite uma descrição natural de condições suficientes que assegurem a estabilidade do estado síncrono.

Definição 1.2.3 *O sistema ligado (1.29) é assintoticamente estável se, para quaisquer condições iniciais $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), (\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{y}}_0) \in X \times Y$, as quais partilham o mesmo estado transporte inicial $\mathbf{x}_0$, se tem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{y}}_0; \boldsymbol{\rho})\| = 0,$$

onde $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\rho})$ (respectivamente, $\mathbf{y}_n(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{y}}_0; \boldsymbol{\rho})$) é a coordenada y da n -ésima iterada de $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ (respectivamente, $(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{y}}_0)$) sob a dinâmica de (1.29).

Assim, o sistema ligado (1.29) é assintoticamente estável se duas réplicas do sistema resposta sincronizam quando sujeitas ao mesmo sinal condutor.

Conforme provado por Kocarev e Parlitz [36], a estabilidade assintótica e a sincronia generalizada são equivalentes sempre que o sistema transporte é invertível e tem um atrator compacto. Contudo, Barreto *et al.* [10] mostraram que é possível ter estabilidade assintótica em sistemas não-invertíveis, nos quais $\text{graph}(\mathbf{H})$ não é sequer o gráfico de uma transformação unívoca.

Para assegurar que a sincronização persista sob perturbações do sistema (1.29), a taxa pela qual trajectórias são atraídas na direcção da variedade $\mathcal{M}$ deve ser maior do que as taxas de contracção ou expansão dentro dessa variedade. Tal como em sincronização idêntica, a estabilidade da variedade $\mathcal{M}$ pode ser determinada pela negatividade dos expoentes de Lyapunov condicionados [70], pelo uso de funções de Lyapunov [36] ou pelo estudo dos valores próprios [12].

Sincronização de fase. Uma generalização importante da noção de sincronização idêntica é o fenómeno de sincronização de fase ([73],[87],[65],[57]). É um tipo mais fraco de comportamento sincrónico definido como o aparecimento de uma certa relação funcional entre as fases dos sistemas enquanto as suas amplitudes podem permanecer fracamente correlacionadas ou mesmo não-correlacionadas.

Definição 1.2.4 *Dois sistemas ligados dizem-se sincronizados in-phase se, para inteiros n e m arbitrários, a diferença entre as fases ϕ_1 e ϕ_2 dos sistemas é limitada por uma constante*

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{const},$$

onde as fases são funções de tempo monotonicamente crescente, escolhidas apropriadamente.

Para investigar sincronização de fase em sistemas caóticos é necessário identificar uma variável de fase bem-definida em cada sistema. Para um sistema caótico, a evolução da fase depende da frequência média das oscilações ω , assim como da sua amplitude A ,

$$(1.30) \quad \dot{\phi} = H(\omega, A),$$

através de uma função H que depende do sistema considerado. O fecho de um atractor caótico contém um número infinito de órbitas periódicas instáveis de períodos diferentes e cada trajectória típica no atractor vagueia de uma órbita periódica instável para outra, não podendo ser correctamente definido o período. Assim, não existe uma maneira universal e não-ambígua para determinar a amplitude A e a fase ϕ de um sinal caótico, e que se reduza à usual para as órbitas periódicas mergulhadas no atractor caótico. Este é o primeiro obstáculo quando tentamos estabelecer se dois sistemas caóticos estão sincronizados (em fase), visto que a comparação de fases é essencial para detectar e quantificar o estado síncronico.

A equação de evolução (1.30) pode ser generalizada a sistemas ligados. Sob certas condições, pode ser obtida uma equação de evolução simplificada para a diferença de fases dos dois osciladores, essencial para entender qualitativamente a natureza da sincronização de fase. Dado que as coordenadas ϕ e A são, por vezes, mais convenientes do que x e y para descrever a dinâmica do sistema, pode ser conveniente escrever as equações da dinâmica para cada um dos osciladores em termos das variáveis $\phi_{1,2}$ e $A_{1,2}$.

O espectro de expoentes de Lyapunov tem uma mudança quantitativa quando surge sincronização de fase [73]. Se ambos os osciladores não estão sincronizados por fase, existem dois expoentes de Lyapunov nulos associados a fases individuais. Quando os dois osciladores caóticos ligados atingem sincronização de fase, a diferença de fase é limitada por uma constante e um dos dois expoentes de Lyapunov nulos sofre uma transição para valores negativos. Com aumento adicional da força de ligação, um outro expoente de Lyapunov sofre uma transição de valores positivos para negativos, e obtem-se também uma forte correlação das amplitudes. Quando o desajuste paramétrico entre os sistemas é pequeno, este ponto de transição está próximo ao da sincronização idêntica em osciladores idênticos ligados.

Tal como em sincronização generalizada, a detecção de sincronização de fase não é directa, especialmente em sistemas experimentais e naturais onde a única informação acessível pode ser uma série temporal não-linear medida nos sistemas componentes.

Capítulo 2

Sincronização de sistemas dinâmicos contínuos

A sincronização de caos em tempo contínuo foi experimentalmente descoberta em 1985 por Afraimovich *et al.* [4] em sistemas idênticos. Apesar dos muitos graus de liberdade envolvidos e da complexidade inerente à ligação de sistemas caóticos, tem sido possível obter um considerável número de resultados analíticos, em especial para sistemas definidos pela mesma lei de evolução (embora podendo apresentar pequenos desajustes paramétricos).

Iniciamos este capítulo com uma secção relativa à sincronização de sistemas caóticos idênticos. É abordada a ligação por substituição, o primeiro método de sincronização por ligação unidireccional que foi analiticamente formalizado. Seguem-se outros métodos em ligação unidireccional: por decomposição activo-passivo, por controle *feedback* negativo e por decomposição valor singular. Ainda na Secção 2.1 abordamos a ligação difusiva linear bidireccional. Para este último mecanismo de ligação expomos uma condição de sincronização que pode ser aplicada na estimação do expoente de Lyapunov maximal em sistemas não-suaves. Descrevemos também, em termos do parâmetro de ligação, as várias transições de estabilidade do atrator caótico mergulhado na variedade de sincronização considerando as bifurcações caracterizadas pelas equações do sistema ligado. A Secção 2.2 é relativa à sincronização generalizada de sistemas dinâmicos contínuos não-idênticos. Os resultados obtidos ao longo deste trabalho para a sincronização em sistemas contínuos são apresentados na Secção 2.3.

Todas as abordagens numéricas apresentadas usam os atractores caóticos de Lorenz ou de Rössler como exemplos; uma das ligações estudadas usa também o atrator hipercaótico de Rössler.

2.1 Sincronização idêntica

Seja X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ com $m \geq 3$. Considere os sistemas dinâmicos m -dimensionais idênticos S_1 e S_2 definidos em X pelas equações diferenciais ordinárias autónomas não-lineares $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$ e $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a})$, respectivamente, onde $\mathbf{a}$ é um vector de parâmetros reais de controle.

Sejam $\mathbf{u}_1(0)$ e $\mathbf{u}_2(0)$ condições iniciais para as quais, para certo valor de $\mathbf{a}$, S_1 e S_2 evoluem para um atrator caótico $\mathcal{A}$ assintoticamente estável. As soluções $\mathbf{u}_1(t)$ e $\mathbf{u}_2(t)$ de cada um dos sistemas, partindo de $\mathbf{u}_1(0) \neq \mathbf{u}_2(0)$ na bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, representam trajectórias independentes que evoluem em $\mathcal{A}$ após um período de tempo de movimento transitório. Esta evolução é caracterizada por um expoente de Lyapunov positivo.

Considere a diferença $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)$ entre órbitas próximas. A evolução de $\mathbf{e}(t)$ é descrita pelas equações

$$(2.1) \quad \dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{u}}_2(t) - \dot{\mathbf{u}}_1(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2(t); \mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a}).$$

Para uma pequena variação de $\mathbf{e}(t)$, pode assumir-se que a distância entre as trajectórias individuais dos sistemas S_1 e S_2 é dada pela equação

$$\|\mathbf{e}(t)\| = \delta_0 e^{\lambda_{\max} t},$$

onde $\delta_0 \geq 0$ é uma distância inicial infinitamente pequena entre as trajectórias e $\lambda_{\max}$ é o valor do maior expoente de Lyapunov positivo, que caracteriza a direcção expansora do espaço de fase.

Dada a relação $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}_1(t)$, o expoente de Lyapunov $\lambda_{\max}$ que caracteriza a evolução de $\mathbf{e}(t)$, também caracteriza a evolução dos sistemas S_1 e S_2 . Por derivação, é válida a relação

$$\|\dot{\mathbf{e}}(t)\| = \lambda_{\max} \delta_0 e^{\lambda_{\max} t}$$

logo, por (2.1), tem-se

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}_2(t); \mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a})\| = \lambda_{\max} \delta_0 e^{\lambda_{\max} t}.$$

Esta equação é satisfeita para um certo tempo $\tau \approx (1/\lambda_{\max}) \ln(|\mathcal{A}|/\delta_0)$ após o qual se tornam relevantes os efeitos não-lineares dos sistemas S_1 e S_2 .

Definição 2.1.1 *Os sistemas dinâmicos S_1 e S_2 dizem-se assintoticamente sincronizados se é válida a condição*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\| = 0,$$

e dizem-se totalmente sincronizados se $\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\| = 0$ para $t > t_{sync}$, com $t_{sync} \in \mathbb{R}$ designado por tempo de sincronização.

A condição de sincronização assintótica pode ser simplesmente escrita como

$$(2.2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$$

através da diferença $\mathbf{e}(t)$, designada por variável erro de sincronização. O sistema dinâmico que descreve a evolução de $\mathbf{e}(t)$, o sistema transversal ou sistema erro, é caracterizado pela equação (2.1). Atendendo a (2.2), S_1 e S_2 atingem sincronização assintótica se o sistema transversal (2.1) tem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável em $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$.

Quando ocorre sincronização assintótica as trajectórias dos sistemas S_1 e S_2 convergem entre si no decurso do tempo. Como tal a evolução dos sistemas em $\mathcal{A}$, no espaço de fase $2m$ -dimensional, fica restringida à evolução no atractor de um deles no espaço de fase m -dimensional. Existe então, no espaço de fase $2m$ -dimensional de S_1 e S_2 , uma variedade invariante

$$\mathcal{M} \equiv \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in X \times X \mid \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2\} \subset \mathbb{R}^{2m}$$

suave de dimensão m , a variedade de sincronização, na qual tem lugar a dinâmica sincronizada definida pelo estado caótico sincrónico simétrico.

Tem sido mostrado por Pecora e Carroll [58], Fujisaka e Yamada ([90],[91]), Kapitaniak [29], Pikovsky [62] e Ashwin *et al.* [7], para diferentes tipos de ligação, que é atingida sincronização estável quando o atractor caótico $\mathcal{A}$ mergulhado na variedade m -dimensional $\mathcal{M}$ é assintoticamente estável no espaço de fase $2m$ -dimensional do sistema ligado, ou seja, se a sincronização é atingida para todas as condições iniciais numa vizinhança de $\mathcal{A}$.

Até ao final deste capítulo, usamos simplesmente o termo sincronização para designar sincronização assintótica.

2.1.1 Diferentes tipos de ligação unidireccional

Têm sido desenvolvidos vários mecanismos de ligação unidireccional que conduzem a sincronização idêntica. Segue-se a apresentação de alguns deles e, para cada um, é abordada na subsecção seguinte a estabilidade assintótica da dinâmica sincronizada na variedade invariante $\mathcal{M}$.

Ligação unidireccional por substituição. Considere uma decomposição arbitrária $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ da variável $\mathbf{u}_1$ do sistema m -dimensional S_1 em dois subsistemas

$$(2.3) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a}),$$

nas variáveis $\mathbf{x}_1 = (u_1, \dots, u_k)$ e $\mathbf{y}_1 = (u_{k+1}, \dots, u_m)$, respectivamente, para $1 \leq k \leq m$. Atendendo a que $\mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}), \dots, f_m(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}))$, os campos vectoriais $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ são definidos pelas funções componentes do campo vectorial $\mathbf{f}$ como

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = (f_1(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}), \dots, f_k(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}))$$

e

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = (f_{k+1}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}), \dots, f_m(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})).$$

São respectivamente tomadas nos subsistemas em (2.3) condições iniciais $\mathbf{x}_1(0)$ e $\mathbf{y}_1(0)$ independentes.

Seja $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$ um subsistema idêntico a $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ mas em que a variável $\mathbf{x}_1$ é substituída por uma correspondente $\mathbf{x}_2$,

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \quad e \quad \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a}).$$

As equações

$$(2.4) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a}),$$

com $\mathbf{y}_2(0) \neq \mathbf{y}_1(0)$, constituem um novo sistema dinâmico $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a})$ que partilha uma parte das variáveis com o sistema $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$.

Pecora e Carroll [58] formalizaram deste modo uma ligação entre os sistemas (2.3) e (2.4) através da variável $\mathbf{x}_1$, $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}_{x_2 \rightarrow x_1}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$, com obtenção do sistema ligado

$$(2.5) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$$

resultante de aumentar (2.3) com o subsistema $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$. Neste mecanismo de ligação unidireccional, designado por substituição completa (ou sincronização sistema-subsistema), o sistema transporte (2.3) conduz o sistema resposta (2.4) através de $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ que se diz o subsistema sinal condutor.

O sistema resposta (2.4) é uma réplica do transporte (2.3) excepto na variável $\mathbf{x}_2$ que lhe é enviada do transporte como $\mathbf{x}_1$. A variável $\mathbf{x}_1$ é usada para conduzir o subsistema

$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$ da resposta (2.4) de modo que este atinja sincronização com o subsistema $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ do transporte (2.3), enquanto a variável $\mathbf{x}_2$, evoluindo como $\mathbf{x}_1$, apenas é introduzida para elevar a $2m$ a dimensão do espaço de fase do sistema ligado (2.5). Claramente, o estado simétrico

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1(0) \quad \wedge \quad \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1(0)$$

é sempre uma solução do sistema ligado (2.5).

Nesta configuração de ligação não existe um parâmetro a controlar a força de ligação. Perante um sistema $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$, apenas há que averiguar se é possível obter sincronização idêntica para a decomposição $\mathbf{u}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ escolhida.

Em vez de substituir completamente uma das variáveis no sistema resposta pela sua correspondente do sistema transporte, a substituição pode ser feita de forma parcial conforme sugerido por Guemez e Matias [19]. Neste caso, uma variável do sistema resposta dá lugar à sua correspondente do sistema transporte apenas em algumas das equações da resposta. Em geral, os resultados de estabilidade em substituição parcial diferem dos obtidos em substituição completa.

Ligação unidireccional por decomposição activo-passivo. No método de substituição completa de Pecora e Carroll existe um número finito de possíveis decomposições (2.3) do sistema m -dimensional S_1 , correspondente ao número $m(m-1)/2$ de diferentes subsistemas resposta $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ a considerar.

Por simulação numérica é fácil escolher a decomposição (2.3) conveniente. Contudo, para evitar certas dificuldades em sistemas reais, Kocarev e Parlitz ([35],[56]) propuseram uma ligação unidireccional mais geral em que o sinal escalar transmitido do transporte para a resposta é uma função das variáveis dinâmicas do transporte e, por vezes, de um sinal informação.

É formalmente possível reescrever o sistema dinâmico S_1 definido por $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$ como um sistema não-autónomo

$$(2.6) \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{s}(t); \mathbf{a}),$$

para alguma função vectorial do tempo $\mathbf{s}(t)$, que possua certas propriedades de sincronização. Se $\mathbf{s}$ é definida por $\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t))$ então $\mathbf{x}_1 = \mathbf{u}_1$. Para $\mathbf{s}$ dada através de uma

equação diferencial ordinária $\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{s}(t))$, a dimensão de $\mathbf{x}_1$ pode ser menor do que a de $\mathbf{u}_1$.

O par de funções vectoriais $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ constituem uma decomposição do campo vectorial original $\mathbf{f}$. A característica principal desta decomposição é que, para escolhas apropriadas da função $\mathbf{h}$, qualquer novo sistema

$$(2.7) \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{s}(t); \mathbf{a})$$

sincroniza com o sistema inicial (2.6). A ligação entre os dois sistemas é efectuada através da função $\mathbf{s}(t)$, designada por sinal condutor, que depende do vector estado $\mathbf{x}_1$ e é a mesma em ambos os sistemas. O sistema transporte não-autónomo (2.6) definido por $\mathbf{g}$ é um sistema passivo enquanto a componente descrita por $\mathbf{h}$ é uma componente activa. Como tal a decomposição dada por $\mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ é designada por decomposição activo-passivo do sistema transporte $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$.

O potencial aplicativo deste mecanismo de ligação é reforçado por, em muitos casos, a função $\mathbf{s}(t)$ ser bastante geral. Em particular, além de depender de $\mathbf{x}_1$, ela pode depender também de algum sinal informação $i(t)$,

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), i(t)) \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{s}(t), i(t)).$$

Neste caso a decomposição activo-passivo pode ser usada em esquemas de comunicação onde $\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), i(t))$ é o sinal transmitido e recebido. Quando ocorre sincronização idêntica, o sinal informação $i(t)$ pode ser recuperado sem erro a partir da equação $\mathbf{s}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), i(t)) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_2(t), i(t))$ sempre que esta tenha uma solução única para $i(t)$.

Segundo Parlitz *et al.* [55], a ligação por decomposição activo-passivo está bastante relacionada com a abordagem de Pyragas [69] em controle de caos. Em vez de decompor um dado sistema caótico, pode partir-se de um sistema linear estável $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1$ ao qual é adicionada uma função não-linear $\mathbf{s} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1)$ apropriada tal que o sistema $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{s}$ seja caótico. Neste caso, o erro de sincronização é dado pelo sistema linear estável $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}$, e ocorre sincronização para todas as condições iniciais e sinais $\mathbf{s}$ arbitrários.

Ligação unidireccional por controle *feedback* negativo. Ainda numa configuração unidireccional, é possível abordar a sincronização de sistemas caóticos de um ponto de vista mais geral, que inclui a substituição como caso particular. O método de Pecora e Carroll é funcional na obtenção de sincronização estável, mas requer a decomposição do

sistema original em dois subsistemas estáveis. No entanto uma trajectória caótica de um sistema pode sincronizar com uma trajectória caótica de um sistema idêntico, partindo de condições iniciais diferentes, sem decompôr o sistema original desse modo.

Considere a ligação unidireccional de S_1 e S_2 através do termo $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$,

$$(2.8) \quad \dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1),$$

em que $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)$ é o vector parâmetro de ligação, com $\rho_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. A ligação em (2.8) é designada por controle *feedback* negativo através do termo amortecedor linear $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$.

Segundo Parlitz *et al.* [54], se $\mathcal{A}$ é o único atractor caótico assintoticamente estável dos sistemas S_1 e S_2 , então é possível encontrar valores de $\boldsymbol{\rho}$ para os quais ocorre sincronização para todas as condições iniciais numa vizinhança de $\mathcal{A}$, ou seja, sincronização estável. Contudo quando as equações que definem S_1 e S_2 descrevem um sistema quase-hiperbólico, com pelo menos dois atractores co-existent, a ligação em (2.8) não resulta imediatamente no estado sincrónico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ e os m gráficos que representam as diferenças entre as m coordenadas correspondentes de $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ não constituem linhas rectas.

Sejam $\mathbf{u}_1 = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in X$ e $\mathbf{u}_2 = (u'_1, u'_2, \dots, u'_m) \in X$ as variáveis dos sistemas S_1 e S_2 , respectivamente, e condições iniciais que verificam $\mathbf{u}_1(0) \neq \mathbf{u}_2(0)$. Seja escolhida no sistema S_1 uma variável dinâmica u_k , para $1 \leq k \leq m$. Supondo que $u_k(t)$ e a sua correspondente $u'_k(t)$ podem ser medidas, considere a expressão $\rho(u_k - u'_k)$, com $\rho > 0$. A adição de $\rho(u_k - u'_k)$ a um dos sistemas,

$$(2.9) \quad \begin{cases} \dot{u}'_1 = f_{\mathbf{a},1}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m), \\ \dots \\ \dot{u}'_k = f_{\mathbf{a},k}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m) + \rho(u_k - u'_k) \quad , \\ \dots \\ \dot{u}'_m = f_{\mathbf{a},m}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m) \end{cases}$$

conduz a um caso particular da ligação em (2.8), a ligação através de uma única variável u_k , que se diz a variável condutora. A expressão $\rho(u_k - u'_k)$ é usada como um sinal de controle (ou sinal perturbação) aplicado ao sistema S_2 na forma de *feedback* negativo. Uma característica importante de $\rho(u_k - u'_k)$ é o facto de não alterar a solução de S_2 . O parâmetro ρ , designado por força de ligação, é ajustável experimentalmente e mede a intensidade da perturbação.

A partir de condições iniciais distintas $\mathbf{u}_1(0)$ e $\mathbf{u}_2(0)$, os vectores estado de cada um dos sistemas S_1 e (2.9) são iguais, para certo valor de ρ , ao fim de um certo tempo

t_{sync} . Quando é atingida a sincronização o sinal de controle torna-se 0 e os sistemas S_1 e (2.9) tornam-se praticamente desligados, mas fica estabelecido o estado caótico síncrono simétrico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Uma variante desta ligação é o controle *feedback* negativo deslocado. Neste mecanismo de ligação, após escolher a variável condutora u_k , o sinal de controle $\rho(u'_k - u_k)$ é aplicado ao sistema S_2 numa equação que não é a k -ésima. Assim, para $1 \leq j, k \leq m$, o sistema resposta é agora dado por

$$\begin{cases} \dot{u}'_1 = f_{\mathbf{a},1}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m), \\ \dots \\ \dot{u}'_j = f_{\mathbf{a},j}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m) + \rho(u_k - u'_k) \quad \text{para } j \neq k. \\ \dots \\ \dot{u}'_m = f_{\mathbf{a},m}(u'_1, u'_2, \dots, u'_m) \end{cases}$$

2.1.2 Estabilidade do sistema ligado em ligação unidireccional

Neste estudo há que distinguir entre a estabilidade por perturbações tangentes ou transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$. Conforme afirmado por Pecora *et al.* [61], $\mathcal{M}$ é atractora para a dinâmica do sistema ligado se a diferença $\mathbf{e}(t)$ entre as variáveis $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ se anula no decurso do tempo e se o limite (2.2) é satisfeito para todas as condições iniciais numa vizinhança do ponto de equilíbrio $\mathbf{e}(t) = \mathbf{0}$. Como o sistema (2.1) que caracteriza a variável $\mathbf{e}(t)$ caracteriza a dinâmica na direcção transversal a $\mathcal{M}$, há que determinar se pequenas perturbações transversais a $\mathcal{M}$ são reduzidas ou ampliadas pela evolução de S_1 e S_2 . Se são reduzidas então $\mathcal{M}$ diz-se transversalmente estável e o estado caótico síncrono $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ é estável. Dado que o regime de oscilações caóticas idênticas é estável quando as trajectórias sincronizadas são assintoticamente estáveis por perturbações transversais a $\mathcal{M}$, a estabilidade da sincronização é referida como estabilidade transversal.

Em ligação unidireccional por substituição, a condição necessária e suficiente para sincronização estável é que o subsistema resposta

$$\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$$

seja assintoticamente estável. A possibilidade de encontrar um subsistema estável resulta de sistemas caóticos possuírem algumas direcções estáveis no espaço de fase e de, por vezes, essa estabilidade assintótica estar associada a variáveis particulares ou a grupos de variáveis. Na hipótese de que tal aconteça, a variável dinâmica $\mathbf{y}_2$ do sistema resposta (2.4) converge para a sua correspondente $\mathbf{y}_1$ no transporte (2.3) e permanecem em sincronização.

Para definir qual o subsistema $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ assintoticamente estável a ser escolhido na decomposição (2.3) do sistema transporte, é necessário averiguar acerca da estabilidade assintótica das oscilações caóticas sincronizadas ocorridas na variedade invariante

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) \mid \mathbf{y}_1 \in X\} \subset \mathbb{R}^{2m}.$$

Em concreto, há que estudar o comportamento do sistema ligado (2.5) a perturbações transversais a $\mathcal{M}$, as que actuam na variável $\mathbf{y}_2$ da resposta (2.4).

Dado o erro de sincronização $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}_2(t) - \mathbf{y}_1(t)$, o limite de $\|\mathbf{e}(t)\|$ é nulo quando o sistema ligado (2.5) evolui. Para estudar a dinâmica de $\mathbf{e}(t)$, subtrai-se (2.3) de (2.4) obtendo-se o sistema transversal

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{y}}_2(t) - \dot{\mathbf{y}}_1(t).$$

Negligenciando os termos de ordem superior, a equação linearizada para o sistema transversal é dada por

$$(2.10) \quad \dot{\mathbf{e}}(t) = D_{\mathbf{y}_2} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{y}_2(t); \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}(t),$$

onde $D_{\mathbf{y}_2} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{y}_2(t); \mathbf{a})$ é a matriz Jacobiana do campo vectorial $\mathbf{h}$ relativamente à variável $\mathbf{y}_2$. As equações diferenciais ordinárias em (2.10) definem a dinâmica de perturbações transversais a $\mathcal{M}$ e as suas soluções indicam se as coordenadas de $\mathbf{e}(t)$ aumentam ou diminuem no decurso do tempo.

Os três critérios mais usados para o estudo da estabilidade transversal da sincronização são:

(i) *Critério baseado nos valores próprios $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{m-k}$ da matriz Jacobiana*

$$D_{\mathbf{y}_2} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{y}_2(t); \mathbf{a})$$

correspondente ao fluxo sobre a variedade de sincronização $\mathcal{M}$, sugerido por Fujisaka e Yamada ([90],[91]). Este critério exige que o maior valor próprio da matriz $D_{\mathbf{y}_2} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{y}_2(t); \mathbf{a})$ seja negativo para o começo de sincronização estável. No caso de $D_{\mathbf{y}_2} \mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{y}_2(t); \mathbf{a})$ ser constante sobre o atrator $\mathcal{A}$ (i.e., se a resposta for linear) o cálculo dos valores próprios é mais simples e é, então, imediato concluir acerca da obtenção de sincronização estável;

(ii) *Critério baseado na construção e estudo de uma função de Lyapunov $L(\mathbf{e}(t))$ apropriada (método directo de Lyapunov) para o campo vectorial de perturbações transversais a $\mathcal{M}$, desenvolvido por He e Vaidya [20].* Há que determinar uma função L

que, numa vizinhança de $\mathcal{M}$, seja definida positiva excepto em $\mathcal{M}$, onde é nula, $L(\mathbf{e}(t)) \geq 0$ e $L(\mathbf{0}) = 0$, e cuja derivada seja semi-definida negativa, $\dot{L}(\mathbf{e}(t)) \leq 0$, e nula em $\mathcal{M}$. Se for possível a construção de L para uma escolha particular do subsistema $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$, então este é assintoticamente globalmente estável e $\mathcal{M}$ é transversalmente estável;

- (iii) *Crítério baseado na estimação dos expoentes de Lyapunov que indicam se pequenas perturbações transversais $e_i(t)$, para $1 \leq i \leq m$, diminuem ou não, desenvolvido por Pecora e Carroll [58].* Este critério é bastante directo e pode ser facilmente utilizado mesmo em sistemas onde os outros critérios não são aplicáveis. Em geral, na decomposição (2.3) do sistema transporte, o subsistema sinal condutor $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ é escolhido de modo a corresponder aos expoentes de Lyapunov positivos. Assumindo que existem $k \neq 0$ expoentes de Lyapunov positivos, existem $(m - k)$ expoentes de Lyapunov negativos correspondentes a $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ para um total de m expoentes de Lyapunov do sistema transporte (2.3). A condição minimal para estabilidade assintótica é que todos os expoentes de Lyapunov (transversais) do sistema transversal definido por (2.10) sejam negativos. Isto é equivalente a exigir que $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$ tenha todos os expoentes negativos. Assim os subsistemas $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ e $\dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{a})$ apenas sincronizam de forma estável se os $(m - k)$ expoentes de Lyapunov de $\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$ são negativos.

Nota-se que os expoentes de Lyapunov transversais relativos à equação linearizada (2.10) dependem das variáveis dinâmicas do subsistema sinal condutor $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1; \mathbf{a})$, sendo por isso designados por Pecora e Carroll [59] por expoentes de Lyapunov condicionados. Em geral os sinais destes expoentes não são imediatos a partir das equações do movimento e variam com os valores paramétricos tomados. No entanto, se o maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\max}^\perp$, o expoente de Lyapunov condicionado maximal, for negativo então fica garantida a estabilidade do estado síncrono $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$.

De Sousa Vieira *et al.* [83] e Kapitaniak e Chua [30] mostraram que a fronteira entre sincronização e não-sincronização está estritamente relacionada com a transição de comportamento caótico para hipercaótico, sendo este último caracterizado pela existência de pelo menos dois expoentes de Lyapunov positivos.

Em ligação unidireccional por decomposição activo-passivo, o sistema passivo (2.6) e a sua réplica (2.7), conduzidos pela mesma componente activa $\mathbf{h}$, evoluem para sincronização

idêntica estável se o sistema transversal

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{s}(t); \mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{s}(t); \mathbf{a}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{e}, \mathbf{s}(t); \mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{s}(t); \mathbf{a})$$

descrevendo a evolução do erro de sincronização $\mathbf{e} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ possui um ponto de equilíbrio estável em $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Sempre que aplicáveis, isto pode ser provado pelos critérios (i) e/ou (iii) usando a equação linearizada

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = D_{\mathbf{x}_1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{s}(t); \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}(t),$$

onde $D_{\mathbf{x}_1} \mathbf{g}(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{s}(t); \mathbf{a})$ é a matriz Jacobiana da função vectorial $\mathbf{g}$ relativamente à variável $\mathbf{x}_1$, ou pelo método directo de Lyapunov.

Na ligação unidireccional por controle *feedback* negativo (2.9), põe-se a questão de determinar para qual das variáveis condutoras u_k , $1 \leq k \leq m$, e valor da força de ligação ρ a sincronização é estável. Sempre que aplicáveis, os critérios (i)-(iii) permitem esse estudo a partir da equação linearizada

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}(t),$$

onde $D\mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a})$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{f}$ calculada em $\mathbf{e} = 0$. Dado que a equação linearizada depende de $\rho > 0$, a força de ligação ρ afecta a estabilidade assintótica do estado síncronico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Esta ligação é ambiciosa na medida em que é pretendido alcançar sincronização por perturbação através de uma única variável. Na verdade, o recurso a uma só variável u_k como condutora nem sempre resulta em sincronização estável. Esta apenas ocorre se o número de expoentes de Lyapunov positivos do sistema ligado é igual ao número de expoentes de Lyapunov positivos do sistema transporte S_1 , o que equivale a considerar u_k como um subsistema assintoticamente estável. Quando esta condição é satisfeita o sistema ligado, formado por S_1 e (2.9), evolui na variedade onde evoluem os sistemas caóticos S_1 e S_2 obtendo-se sincronização.

Se o sistema ligado possui mais expoentes de Lyapunov do que os sistemas originais S_1 e S_2 é ainda possível tentar evitar comportamento hipercaótico alterando a variação da força de ligação ρ ou envolvendo mais variáveis condutoras no controle por *feedback* negativo. Por um lado a força de ligação ρ pode ser escolhida de modo a ser obtido um tempo de sincronização t_{sync} pequeno, mas não demasiado elevada para evitar comportamento hipercaótico. Por outro lado o intervalo de valores de ρ para os quais ocorre sincronização

pode ser aumentado se são interligadas simultaneamente várias variáveis dos sistemas, ou seja, se o número de variáveis condutoras u_k aumenta. Para tal é considerada a ligação

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) + \rho \mathbf{C}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$$

por adição do termo amortecedor $\rho \mathbf{C}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$ ao sistema resposta que verifica $\rho \mathbf{C}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. No termo amortecedor, usado como factor inibidor na separação de trajectórias, $\mathbf{C}$ é a matriz de ligação que determina a combinação linear das coordenadas de $\mathbf{u}$ presentes na diferença $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ e ρ é o parâmetro que controla a força da ligação.

Heagy *et al.* [21] provaram que se a matriz $\mathbf{C}$ permite que todas as variáveis estejam correlacionadas então existe um limiar de ligação ρ_{sync} acima do qual se obtém comportamento sincronizado. No entanto, conforme Pecora *et al.* [60], a determinação prática de ρ_{sync} pode ser difícil.

Ligação unidireccional por decomposição valor singular. Junge e Parlitz [27] garantem um critério de estabilidade para a ligação unidireccional da forma

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$$

em que $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1)$ é uma matriz de ligação, não necessariamente constante, obtida pelo método de decomposição valor singular.

Para um avanço de tempo arbitrário Δt , a solução do sistema transversal na variável erro $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$, caracterizado pela equação linearizada

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = D\mathbf{f}(\mathbf{u}_2(t); \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}(t),$$

pode ser aproximada por $\mathbf{e}(\Delta t) = [\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f}] \cdot \mathbf{e}_0$, onde $\mathbf{e}_0$ é a diferença inicial entre as trajectórias e $\mathbf{I}$ denota a matriz identidade de ordem m . Através da decomposição valor singular

$$\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{V}^T$$

da matriz $\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f}$, são obtidos os seus valores singulares $w_i(\Delta t)$ dependentes de Δt . Para eliminar esta dependência, considera-se o produto

$$(\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f})^T \cdot (\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f}) = \mathbf{I} + \Delta t \left[(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f} \right] + \Delta t^2 (D\mathbf{f})^T \cdot D\mathbf{f}$$

e negligenciam-se os termos de ordem superior em Δt , donde

$$\mathbf{I} + \Delta t \left[(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f} \right] = (\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f})^T \cdot (\mathbf{I} + \Delta t D\mathbf{f}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{V}^T.$$

Tem-se então $(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T$ com

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m) = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{W}^2 - \mathbf{I}),$$

em que os elementos diagonais Λ_i são os valores próprios de $(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f}$. Os valores singulares $w_i(\Delta t)$ são então dados pela expressão

$$w_i(\Delta t) = \sqrt{1 + \Delta t \Lambda_i}.$$

Dado que ocorre contracção com $w_i < 1$ para as direcções onde $\Lambda_i < 0$, a matriz $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1)$ é escolhida de modo que todos os valores próprios da matriz

$$(D\mathbf{f})^T - \mathbf{C}^T + D\mathbf{f} - \mathbf{C} = (D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f} - (\mathbf{C}^T + \mathbf{C})$$

sejam negativos. Este objectivo pode ser alcançado usando uma matriz simétrica $\mathbf{C}$ que manipule todos os valores próprios $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ não-negativos da matriz $(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f}$. A escolha de uma matriz $\mathbf{C}$ tal que

$$\mathbf{C}^T + \mathbf{C} = 2\mathbf{C} = 2\mathbf{V} \cdot \text{diag}(c_1, \dots, c_k, 0, \dots, 0) \cdot \mathbf{V}^T$$

com $c_i > \Lambda_i/2$ para $i = 1, \dots, k$, conduz a uma matriz $(D\mathbf{f})^T - \mathbf{C}^T + D\mathbf{f} - \mathbf{C}$ com valores singulares negativos e resulta no termo de ligação

$$(2.11) \quad \mathbf{C}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = \sum_{i=1}^k c_i [\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_i \rangle] \mathbf{v}_i.$$

O termo de ligação (2.11), ao ser expresso em termos dos vectores coluna $\mathbf{v}_i$ da matriz ortogonal $\mathbf{V}$, com $i = 1, \dots, k$, correspondentes aos valores próprios Λ_i de $(D\mathbf{f})^T + D\mathbf{f}$ tais que $c_i > \Lambda_i/2$, depende da matriz Jacobina $D\mathbf{f}$ do campo vectorial $\mathbf{f}$ ao longo da órbita.

Ao contrário dos mecanismos de ligação convencionais, baseados sobretudo em forças de ligação globais, a ligação estabelecida com o termo (2.11) suprime a divergência exponencial da dinâmica do erro $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ e explora completamente as propriedades de contracção do fluxo dos sistemas dados¹.

2.1.3 Ligação difusiva linear bidireccional

Segundo Fujisaka e Yamada ([90],[91]), uma maneira natural de introduzir uma ligação dissipativa entre os sistemas idênticos caóticos S_1 e S_2 é adicionar termos de ligação lineares

¹Esta abordagem, embora conceptualmente diferente, baseia-se na mesma ideia de métodos de controle de caos sugeridos por Lai *et al.* [37].

simétricos às expressões que os definem. Este mecanismo de ligação, designado por ligação difusiva linear, desempenha um papel central em controle de caos.

A ligação difusiva linear dos sistemas S_1 e S_2 traduz-se no sistema ligado

$$(2.12) \quad \dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) + \mathbf{D}_1 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) + \mathbf{D}_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2),$$

onde $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ são matrizes diagonais de ligação de ordem m com elementos diagonais $\rho_{1,i}$ e $\rho_{2,i}$ positivos ou nulos, respectivamente.

Se todos os pares $(\rho_{1,i}, \rho_{2,i})$ de elementos diagonais correspondentes são não-nulos, ou seja se $\rho_{1,i} \neq 0$ e/ou $\rho_{2,i} \neq 0$ para $i = 1, \dots, m$, a ligação diz-se total. Quando nas matrizes diagonais $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ existem pares $(\rho_{1,i}, \rho_{2,i})$ de elementos diagonais correspondentes nulos, ou seja $\rho_{1,i} = 0$ e $\rho_{2,i} = 0$ para algum $1 \leq i \leq m$, apenas é efectuada uma ligação parcial. Neste caso a ligação de uma ou mais equações do sistema ligado (2.12) não é executada.

Estabilidade do sistema ligado. Em ligação total a evolução do erro de sincronização $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ é caracterizada pelo sistema transversal

$$\|\dot{\mathbf{e}}(t)\| = \|\mathbf{f}(\mathbf{u}_2(t); \mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a})\| - (d_1 + d_2) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|,$$

onde $d_1 + d_2$ denota a soma dos elementos diagonais $\rho_{1,i}$ e $\rho_{2,i}$ das matrizes $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$. A distância entre as trajectórias individuais dos sistemas S_1 e S_2 é dada pela equação

$$\|\mathbf{e}(t)\| = \delta_0 e^{\lambda_{\max} t},$$

onde $\lambda_{\max}$ é o valor do maior expoente de Lyapunov positivo e $\delta_0 \geq 0$ é uma distância inicial infinitamente pequena entre as trajectórias. Por derivação é obtida a relação

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}_2(t); \mathbf{a}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_1(t); \mathbf{a})\| = \lambda_{\max} \delta_0 e^{\lambda_{\max} t}$$

e, atendendo à igualdade

$$\delta_0 \|\mathbf{e}(t)\| = e^{-\lambda_{\max} t},$$

a equação

$$\|\dot{\mathbf{e}}(t)\| = \lambda_{\max} \delta_0 e^{\lambda_{\max} t} - (d_1 + d_2) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|$$

pode ser escrita como uma equação diferencial ordinária de variáveis separadas cuja solução é

$$(2.13) \quad \|\mathbf{e}(t)\| = \mathbf{e}_0 e^{\lambda_{\max} t} e^{-(d_1 + d_2)t} = \mathbf{e}_0 e^{[\lambda_{\max} - (d_1 + d_2)]t},$$

onde $\mathbf{e}_0$ é diferença inicial entre as trajectórias².

A partir de (2.13) pode concluir-se que o erro de sincronização $\mathbf{e}$ é consequência de duas propriedades independentes. Por um lado, a divergência exponencial de trajectórias próximas com uma razão $\lambda_{\max} t$ proporcional ao expoente de Lyapunov positivo. Por outro lado, a convergência exponencial resultante dos termos de ligação $\mathbf{D}_1 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$ e $\mathbf{D}_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ introduzidos, com uma razão $-(d_1 + d_2) t$ proporcional à soma dos coeficientes de ligação. Fazendo $\mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = 0$, o sistema transversal para a evolução de $\mathbf{e}$ associada a esta convergência toma a forma

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = -(d_1 + d_2) \cdot \mathbf{e}(t).$$

Enquanto a segunda propriedade actua em todo o espaço de fase X , a primeira apenas actua numa vizinhança do estado caótico sincrónico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ onde os efeitos lineares são dominantes. Como tal, o produto de ambos os factores exponenciais de (2.13) apenas tem lugar próximo de $\mathcal{M}$.

Por (2.13), ocorre a sincronização total no sistema ligado (2.12), no sentido da Definição 2.1.1, se for válida a desigualdade

$$(2.14) \quad d_1 + d_2 > \lambda_{\max}.$$

A condição de sincronização total (2.14) mostra que existe uma dependência linear entre o expoente de Lyapunov maximal dos sistemas e os elementos das matrizes diagonais $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ de ligação entre eles.

O estudo de Stefański em [84] mostra que as propriedades de divergência e convergência exponencial em ligação total permitem estimar o maior expoente de Lyapunov de qualquer sistema dinâmico caótico. Esta possibilidade é especialmente útil em sistemas não-suaves, onde a estimação de expoentes de Lyapunov não é directa [84].

A condição de sincronização não assegura um estado totalmente sincronizado quando apenas é efectuada uma ligação parcial. Na verdade, não sendo executada a ligação de uma ou mais equações do sistema ligado (2.12), o efeito dos termos de ligação $\mathbf{D}_1 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$ e $\mathbf{D}_2 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ pode não ser tão regular na sincronização como em ligação total. Stefański

²Pode ainda considerar-se $\mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = 0$ em (2.12) de que resulta o sistema

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{D}_1 \mathbf{e} \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = -(\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2) \mathbf{e}$$

cuja solução é dada por $\|\mathbf{e}(t)\| = \mathbf{e}_0 e^{-(d_1 + d_2)t}$.

e Kapitaniak [86] introduzem um coeficiente de ligação $\zeta > 0$ que permite considerar a condição de sincronização $d_1 + d_2 > \zeta \lambda_{\max}$ que avalia o nível de eficácia da ligação parcial. Esta condição é uma generalização de (2.14), pois em ligação total o valor de ζ eleva-se a 1.

A determinação analítica do coeficiente de ligação ζ (em ligação parcial) é difícil e pode mesmo ser impossível. Contudo, pode ser estimado no decurso de experimentações numéricas de acordo com a relação $\zeta = \rho_{\min}/\lambda_{\max}$, onde $\rho_{\min}$ denota o menor valor da soma $d_1 + d_2$ de elementos diagonais $\rho_{1,i}$ e $\rho_{2,i}$ para os quais ocorre movimento sincrónico estável. Em muitos sistemas o valor de ζ é independente das condições iniciais tomadas [86].

Caso particular I. Quando os elementos diagonais $\rho_{1,i}$ e $\rho_{2,i}$ verificam $\rho_{1,i} = \rho_{2,i} = \rho_i$, a ligação proposta em (2.12) traduz-se no sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{u}_i = f_i(u_1, \dots, u_m; \mathbf{a}) + \rho_i(u'_i - u_i) \\ \dot{u}'_i = f_i(u'_1, \dots, u'_m; \mathbf{a}) + \rho_i(u_i - u'_i) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

A solução caótica sincrónica simétrica $u_i(t) = u'_i(t) \equiv U_i(t)$ deste sistema, correspondente ao estado sincrónico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, e o estudo da sua estabilidade a pequenas perturbações transversais $e_i(t) = u'_i(t) - u_i(t)$, para $1 \leq i \leq m$, requer a equação linearizada

$$(2.15) \quad \dot{e}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{U}(t)) e_j - 2\rho_i e_i.$$

As soluções do sistema transversal (2.15) aumentam exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. Sendo m a dimensão deste sistema, existem m expoentes de Lyapunov transversais e o maior deles, $\lambda_{\max}^\perp$, determina a estabilidade de perturbações. Como as expressões $2\rho_i e_i$ em (2.15) dependem das coordenadas ρ_i do vector de parâmetros $\boldsymbol{\rho}$, o expoente maximal $\lambda_{\max}^\perp$ depende destas coordenadas e a condição $\lambda_{\max}^\perp(\rho_i) < 0$ define a região de sincronização.

Caso particular II. Considere o caso particular em que os elementos diagonais têm o mesmo valor $\rho_1 = \dots = \rho_m \equiv \rho > 0$,

$$(2.16) \quad \begin{cases} \dot{u}_i = f_i(u_1, \dots, u_m; \mathbf{a}) + \rho(u'_i - u_i) \\ \dot{u}'_i = f_i(u'_1, \dots, u'_m; \mathbf{a}) + \rho(u_i - u'_i) \end{cases}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Para análise da estabilidade transversal do estado sincrónico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, considere novas variáveis

$$\mathbf{U}(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)] \quad \text{e} \quad \mathbf{V}(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)]$$

em (2.16). A variável $\mathbf{V}(t)$ descreve a evolução transversal à variedade invariante $\mathcal{M}$ enquanto, no limite de movimento não-transversal, $\mathbf{U}(t)$ descreve a evolução em $\mathcal{M}$. Com esta mudança de variáveis, o sistema ligado (2.16) pode ser reescrito como

$$(2.17) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) + \mathbf{f}(\mathbf{U} - \mathbf{V})] \\ \dot{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{U} + \mathbf{V}) - \mathbf{f}(\mathbf{U} - \mathbf{V})] - 2\rho\mathbf{V} \end{cases}.$$

A análise da estabilidade do subespaço transversal a $\mathcal{M}$ equivale a mostrar que o sistema dinâmico transversal na variável $\mathbf{V}(t)$ tem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável na origem. O espectro de expoentes de Lyapunov da equação (2.17) pode ser dividido em dois subconjuntos: $\lambda^{\parallel}$ dos expoentes de Lyapunov tangenciais, associados à evolução de $\mathbf{U}(t)$, que descreve a dinâmica em $\mathcal{M}$ ou próximo dela, e $\lambda^{\perp}$ dos expoentes de Lyapunov transversais que caracterizam a evolução de pequenas perturbações transversais a esta variedade. Pelo critério (iii), o atrator caótico $\mathcal{A}$ é estável se todos os expoentes de Lyapunov transversais são negativos. Seja $D\mathbf{f}(\mathbf{U})$ a matriz Jacobiana correspondente à linearização em torno do ponto de equilíbrio $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t) = \mathbf{U}(t)$. Se o maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$ correspondente a $D\mathbf{f}(\mathbf{U})$ é negativo, então qualquer perturbação transversal a $\mathcal{M}$ é amortecida e o estado síncrono $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ é estável.

Se, além de $\mathbf{V}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, é ainda verificada a condição

$$\frac{d\|\mathbf{V}(t)\|}{dt} < 0,$$

então tem-se um caso particular de sincronização, designado por sincronização monotónica. No caso de ocorrer sincronização monotónica para todos os valores iniciais na vizinhança de $\mathbf{V}(t) = \mathbf{0}$, o atrator caótico $\mathcal{A}$ diz-se assintoticamente monotonicamente estável.

São apresentadas na Tabela 2.1, do ponto de vista topológico em termos do parâmetro de ligação ρ , as transições de estabilidade de $\mathcal{A}$ mergulhado em $\mathcal{M}$ considerando as bifurcações do sistema ligado.

Parâmetro ρ	Atrator caótico $\mathcal{A}$
$\rho < \rho_0$	sela caótica repulsora
$\rho_0 < \rho < \rho'''$	com intermitência <i>on-off</i> (caos-hipercaos)
$\rho''' < \rho < \rho''$	com bacia localmente <i>riddled</i>
$\rho'' < \rho < \rho'$	assintoticamente estável
$\rho > \rho'$	assintoticamente monotonicamente estável

Tabela 2.1: Comportamento do atrator caótico $\mathcal{A}$ em função de ρ .

A fase de estabilidade assintótica mais forte ocorre para $\rho > \rho'$ mas, se

$$\rho > \rho'' \equiv \frac{1}{2} \left(\lambda_{\max}^{\parallel}(\rho) \right),$$

em que $\lambda_{\max}^{\parallel}(\rho)$ é o expoente de Lyapunov tangencial maximal de $\mathcal{A}$, é atingida sincronização para todas as condições iniciais na vizinhança de $\mathcal{A}$ [91]. Em ρ'' ocorre uma bifurcação em que $\mathcal{A}$ perde a sua estabilidade assintótica. Conforme evidenciado por Alexander *et al.* [5], Sommerer e Ott [81] e Ott *et al.* [53], quando $\rho < \rho''$ o atrator $\mathcal{A}$ é estável mas pode existir uma distância $\delta > 0$ de $\mathcal{A}$ tal que, para cada ponto $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$, qualquer bola arbitrariamente pequena centrada em $\mathbf{u}_1$ contém um conjunto de pontos de medida positiva cujas órbitas excedem δ . Dada uma trajectória típica de (2.17), embora todos os expoentes de Lyapunov transversais sejam negativos, existem ainda condições iniciais (densas) em $\mathcal{A}$ para as quais um deles é positivo. Considerando valores de ρ ainda menores, o sistema (2.17) sofre uma bifurcação *blowout* num determinado valor ρ''' que caracteriza a transição de caos para hipercaos ([90],[62],[29],[58],[7]). Segundo Nusse e Yorke [49], para $\rho < \rho'''$ existe uma vizinhança W de $\mathcal{A}$ tal que o conjunto $\mathcal{B}(\mathcal{A}) \cap W$ contém $\mathcal{A}$ mas tem medida de Lebesgue nula. Uma trajectória típica gasta algum tempo na vizinhança de $\mathcal{A}$ mas explode ocasionalmente para longe dele. O expoente de Lyapunov transversal maximal de $\mathcal{A}$, $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$, é sempre positivo mas de baixo valor. No entanto as flutuações tempo finito podem permitir que todos os expoentes de Lyapunov transitórios sejam negativos em alguns períodos de tempo em que a órbita é atraída para $\mathcal{M}$. O atrator caótico $\mathcal{A}$ torna-se então uma sela caótica. Para ρ abaixo de um certo valor ρ_0 , $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$ é suficientemente grande permitindo a evolução para um atrator distinto.

2.2 Sincronização generalizada

Muitos dos resultados teóricos relativos à sincronização de sistemas caóticos são obtidos no âmbito de sistemas dinâmicos estruturalmente equivalentes. É o caso de sistemas idênticos ou que, não o sendo, apenas diferem por um desajuste paramétrico pequeno.

Para sistemas homocaos $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}_1)$ e $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}_2)$, isto é, sistemas dados pelo mesmo conjunto de equações diferenciais ordinárias mas com diferentes valores no conjunto de parâmetros, Kapitaniak *et al.* [31] admitem a possibilidade de obter sincronização caracterizada pela condição

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)\| \leq \varepsilon,$$

onde $\varepsilon \ll 1$ é uma constante real, que designam por sincronização prática.

Embora esta possibilidade de sincronização tenha grande interesse aplicativo, no estudo de sistemas reais é frequente a necessidade de averiguar o comportamento coerente entre sistemas dinâmicos claramente não-idênticos, incluindo sistemas de diferentes dimensões. A pesquisa em sincronização de sistemas não-idênticos, especialmente de diferentes dimensões, está ainda numa fase inicial, com um número reduzido de resultados teóricos.

Sejam, para cada vector de parâmetros $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, os campos vectoriais $\mathbf{f}(\cdot; \mathbf{a}) : X \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ e $\mathbf{g}(\cdot; \mathbf{b}) : Y \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínuos, com $l, m \geq 3$. Considere os sistemas dinâmicos autónomos S_1 e S_2 unidireccionalmente ligados

$$(2.18) \quad \dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{u}_2, \mathbf{C}_\rho(\mathbf{u}_1); \mathbf{b})$$

através de uma função vectorial $\mathbf{C}_\rho(\mathbf{u}_1) : X \subset \mathbb{R}^l \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$, onde a dependência do vector parâmetro de ligação ρ é explicitamente considerada. Quando $\rho = \mathbf{0}$, o sistema resposta S_2 evolui independentemente do transporte S_1 e ambos os sistemas são assumidos como caóticos.

Sejam $\phi^t(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}))$ e $\psi^t(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \mathbf{u}_2(\mathbf{0}))$ as soluções dos sistemas S_1 e S_2 , respectivamente, para as condições iniciais $\mathbf{u}_1(\mathbf{0})$ e $(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \mathbf{u}_2(\mathbf{0}))$.

Definição 2.2.1 *Os sistemas S_1 e S_2 dizem-se em sincronização generalizada relativamente a $\mathbf{h}$ se, para certa função vectorial $\mathbf{C}_\rho(\mathbf{u}_1) : X \rightarrow Y$, existe uma função vectorial $\mathbf{h} : X \rightarrow Y$ entre os espaços de fase X e Y tal que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi^t(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \mathbf{u}_2(\mathbf{0})) - \mathbf{h}(\phi^t(\mathbf{u}_1(\mathbf{0})))\| = 0$$

e a variedade invariante $\mathcal{M}$ definida por

$$\mathcal{M} \equiv \{(\mathbf{u}_1, \mathbf{h}(\mathbf{u}_1)) \in X \times Y \mid \mathbf{u}_1 \in X\} \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$$

contem pelo menos um atractor caótico. A função $\mathbf{h}$ diz-se a função de sincronização generalizada e $\mathcal{M}$ a variedade de sincronização.

Define-se o erro de sincronização por $\mathbf{e}(t) = \mathbf{u}_2(t) - \mathbf{h}(\mathbf{u}_1(t))$. O sistema dinâmico na variável $\mathbf{e}$, designado por sistema transversal, é definido por

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{u}_1) = \dot{\mathbf{u}}_2 - D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$$

sendo $D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1)$ a matriz Jacobiana de $\mathbf{h}$. Segue da Definição 2.2.1 que o estudo da sincronização generalizada em (2.18) equivale ao estudo da estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio do sistema transversal na origem.

Quando os sistemas S_1 e S_2 são idênticos e a diagonal

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\} \subset \mathbb{R}^{2l}$$

do sistema ligado (2.18) é invariante pela dinâmica, a função $\mathbf{h}$ é simplesmente a identidade em X e tem-se o caso particular de sincronização idêntica.

Existem diversas classes de sincronização generalizada baseadas nas propriedades da função de sincronização $\mathbf{h}$. Exigir que $\mathbf{h}$ seja continuamente diferenciável permite tratar muitos dos exemplos que surgem em aplicações.

Conforme mostraram Kocarev e Parlitz [36], se o sistema transporte S_1 é invertível e tem um atrator compacto, a sincronização generalizada no sistema ligado (2.18) é equivalente à estabilidade assintótica do sistema resposta S_2 . Tem-se então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_2(t, \mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \mathbf{u}_2(\mathbf{0})) - \mathbf{u}_2(t, \mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \tilde{\mathbf{u}}_2(\mathbf{0}))\| = 0,$$

para quaisquer condições iniciais $(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \mathbf{u}_2(\mathbf{0}))$ e $(\mathbf{u}_1(\mathbf{0}), \tilde{\mathbf{u}}_2(\mathbf{0}))$ do sistema ligado (2.18) na bacia do atrator de sincronização. Para verificar a existência de sincronização generalizada é usualmente utilizado o critério da negatividade do expoente de Lyapunov maximal do sistema resposta [58].

Segundo Barreto *et al.* [10], existem ainda exemplos de sistemas transporte não-invertíveis para os quais é possível obter estabilidade assintótica.

A relação funcional $\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{h}(\mathbf{u}_1(t))$ não tem de ser necessitadamente válida em todo o espaço de fase $X \times Y$ do sistema ligado (2.18), mas apenas na variedade $\mathcal{M}$. Dada a relação funcional, se o sistema resposta S_2 é assintoticamente estável o comportamento do sistema ligado (2.18) em $\mathcal{M}$ apenas é controlado pelas oscilações do sistema transporte S_1 no espaço de fase. Como tal um transporte comum pode conduzir/transportar múltiplas réplicas da resposta, conforme evidenciado por Abarbanel *et al.* [2].

2.2.1 Ligação unidireccional por controle *feedback* negativo

Considere a ligação em (2.8) para diferentes valores paramétricos $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$,

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}_1) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}_2) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1),$$

Considere ainda que a trajectória do sistema $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}_1)$ está num atrator caótico $\mathcal{A}_1$ enquanto a trajectória de $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}_2)$ está num atrator caótico co-existente $\mathcal{A}_2$. Para alcançar sincronização há que perturbar uma das trajectórias, digamos a do atrator $\mathcal{A}_1$,

de modo a evoluir para a bacia de atracção $\mathcal{B}(\mathcal{A}_2)$. Sendo $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1)$ a região do espaço de fase na qual evolui a trajectória perturbada, a condição necessária para sincronização é dada por

$$(2.19) \quad \mathcal{R}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{B}(\mathcal{A}_2) \neq \emptyset.$$

Para satisfazer a relação (2.19) pode ser necessária uma forte perturbação difícil de realizar na prática. No entanto Kapitaniak *et al.* [32] discutiram a sincronização e perda de sincronização de sistemas quase-hiperbólicos usando esta ligação com um *feedback* negativo pequeno.

Mesmo que a relação (2.19) não seja inicialmente satisfeita, estes autores introduziram um método simples que permite sincronização de trajectórias caóticas evoluindo em diferentes atractores co-existentes $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ que estejam próximos de um único atractor caótico $\mathcal{A}$. Assumindo que os valores paramétricos $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ estão próximos, considere em ambos os sistemas S_1 e S_2 um valor paramétrico fixado $\mathbf{a}_1$ (relativo a $\mathcal{A}_1$) que verifique (2.19). Obtem-se comportamento caótico sincronizado dos sistemas através da ligação

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}(t)) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_2; \mathbf{a}(t)) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1),$$

em que $\mathbf{a}(t)$ é a parametrização definida por

$$\mathbf{a}(t) = \begin{cases} \mathbf{a}_1, & t \in [0, \tau_s] \\ \mathbf{a}_2, & t > \tau_s \end{cases},$$

onde τ_s é o tempo de sincronização de S_1 e S_2 para o valor paramétrico $\mathbf{a}_1$. Esta definição de $\mathbf{a}(t)$ garante que, quando o estado síncronico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ é atingido (no atractor $\mathcal{A}_1$), o parâmetro $\mathbf{a}$ é desviado para o valor $\mathbf{a}_2$. A igualdade $\mathbf{u}_1(\tau_s) = \mathbf{u}_2(\tau_s)$ assegura as mesmas condições iniciais para a evolução transitória na direcção de um dos atractores (co-existentes). Tem-se $\mathbf{u}_1(t) = \mathbf{u}_2(t)$ para todo o $t > \tau_s$ e é garantida a sincronização num dos atractores.

2.2.2 Ligação unidireccional por função de controle

Suponha que se pretende obter uma ligação apropriada entre dois sistemas dinâmicos não-idênticos $\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$ e $\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{u}_2; \mathbf{b})$ tendo uma determinada função de sincronização generalizada $\mathbf{h}$ como objectivo.

Uma das possibilidades é determinar uma função de controle $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ nas variáveis dos sistemas de modo que a ligação unidireccional

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{g}(\mathbf{u}_2; \mathbf{b}) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$$

conduza a sincronização generalizada. Por outro lado, muitos sistemas, entre os quais o sistema de Lorenz, o sistema de Rössler e o sistema hipercaótico de Rössler, podem ser escritos na forma

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante e $\mathbf{B}(\mathbf{u}_2)$ é a parte não-linear. Considere então o caso particular do sistema ligado (2.18) na forma

$$(2.20) \quad \dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) \quad \wedge \quad \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),$$

em que $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é uma função de controle a determinar.

Na configuração de ligação (2.20), é possível obter explicitamente uma expressão da função de controle $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ para uma escolha arbitrária da função de sincronização generalizada $\mathbf{h}$. Para a variável erro de sincronização $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{h}(\mathbf{u}_1)$, o sistema transversal é dado por

$$(2.21) \quad \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{u}}_2 - \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$$

onde $D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1)$ é a matriz Jacobiana de tipo $l \times m$ da função $\mathbf{h}$.

Considere o sistema transversal (2.21) escrito na forma $\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e}$, para certa matriz constante $\mathbf{A}'$ de ordem m . A resolução da equação

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2) + \mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) - D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e}$$

em ordem a $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ conduz a

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e} - \mathbf{A} \cdot [\mathbf{e} + \mathbf{h}(\mathbf{u}_1)] - \mathbf{B}(\mathbf{u}_2) + D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a}).$$

Obtem-se então a expressão de $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ como

$$(2.22) \quad \mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = -\mathbf{A}' \cdot \mathbf{e} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{h}(\mathbf{u}_1) - \mathbf{B}(\mathbf{u}_2) + D\mathbf{h}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}_1; \mathbf{a})$$

em termos da função de sincronização generalizada $\mathbf{h}$ considerada.

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}(t)) = [\mathbf{e}(t)]^T \cdot \mathbf{e}(t)$. A derivada em ordem a t ,

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{e}) = \frac{d(\mathbf{e}^T)}{dt} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = [(\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e}]^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e},$$

admite a simplificação

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{A}')^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \cdot [(\mathbf{A} - \mathbf{A}')^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}'] \cdot \mathbf{e}.$$

Tem-se $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ sempre que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{A}')^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}'$ seja definida negativa. Pelo método directo de Lyapunov, o sistema transversal (2.21) tem um ponto de equilíbrio assintoticamente estável na origem. Conclui-se então que a função de controle $\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ definida por (2.22) garante sincronização generalizada no sistema ligado (2.20) relativamente à função $\mathbf{h}$ se a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{A}')^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}'$ for definida negativa.

A matriz $\mathbf{A}$ é única a partir das equações do sistema resposta e, para qualquer caso, basta determinar uma matriz $\mathbf{A}'$ de modo que $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ seja diagonal e com todos os elementos diagonais negativos. A obtenção de uma tal matriz $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ caracterizando (2.21) garante que $\mathbf{e} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

2.3 Estudo de caso

2.3.1 Análise de sincronização no sistema não-linear de Lorenz

Considere o sistema de Lorenz

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad \wedge \quad \dot{y} = x(\alpha - z) - y \quad \wedge \quad \dot{z} = xy - \beta z$$

nas variáveis dinâmicas $x, y, z \in \mathbb{R}$ e de parâmetros reais positivos σ , α e β . Este sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias, em que σ é o número de Prandtl, α é o número de Rayleigh e β é um factor geométrico, descreve o fluxo de um fluido numa caixa aquecida ao longo da base.

Em 1963, numa pesquisa que tinha como principal objectivo melhorar a previsão climática, o meteorologista e matemático Edward Lorenz [42] introduziu este sistema como um modelo aproximado do fluxo de fluidos da atmosfera. Verificou que, para uma ampla variação de parâmetros, as soluções do sistema permanecem numa região limitada do espaço de fase mas oscilam de forma irregular e aperiódica. Lorenz detectou comportamento dinâmico pouco comum quando $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 8/3$. Iniciando simulações computacionais a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes, detectou a dependência sensível do sistema às condições iniciais, uma das principais propriedades do comportamento caótico. A Figura 2.1, apresenta o atractor caótico de Lorenz para os valores paramétricos referidos e as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (10, 20, 30)$.

Cada solução ou é simétrica ou tem uma correspondente simétrica. Uma solução que inicie no z -eixo permanece nele e tende para a origem. O sistema de Lorenz é dissipativo. A propriedade de contracção de volume impõe fortes limitações às possíveis soluções do sistema: impossibilita a existência de soluções quaseperiódicas e de pontos de equilíbrio ou órbitas fechadas repulsores.

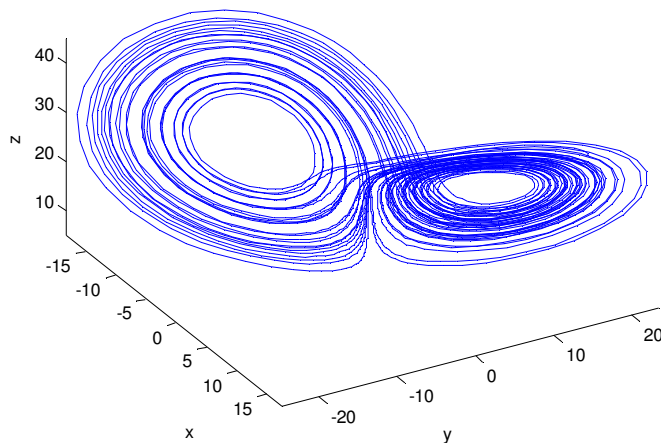


Figura 2.1: Atrator caótico de Lorenz

O sistema de Lorenz tem $O = (0, 0, 0)$ como ponto de equilíbrio para todos os valores paramétricos. No que segue consideram-se fixados $\sigma = 10$ e $\beta = 8/3$ e o parâmetro α a variar.

Se $\alpha < 1$ a origem é um ponto de equilíbrio localmente estável, um nodo, pois todos os valores próprios da matriz Jacobiana do sistema têm parte real negativa. Além disso, a função de Lyapunov

$$L(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$$

permite concluir que a origem é globalmente estável.

Quando $\alpha = 1$, um valor próprio torna-se positivo enquanto os restantes são negativos. Para $\alpha = 28$ a origem tem uma variedade estável $W^s(0, 0, 0)$ bidimensional e uma variedade instável $W^u(0, 0, 0)$ unidimensional. Em simultâneo com a perda de estabilidade da origem, surgem dois novos pontos de equilíbrio simétricos

$$P_{\pm} = \left(\pm \sqrt{\frac{8}{3}(\alpha - 1)}, \pm \sqrt{\frac{8}{3}(\alpha - 1)}, \alpha - 1 \right)$$

indicando que esta sofre uma bifurcação forquilha no ponto de bifurcação $\alpha_0 = 1$.

Para valores de $\alpha > \alpha_0$ próximos de α_0 , P_+ e P_- são localmente estáveis. Continuando a aumentar o valor de α , as trajectórias aproximam-se de P_+ e P_- movimentando-se em espiral em torno de cada um. Neste regime, a dinâmica do sistema não apresenta nem

um atrator caótico nem sequer transição para caos. Quando $\alpha \simeq 13.96$, a trajectória que se afasta da origem, ao longo da sua variedade instável, volta à origem. Ocorre a ligação da variedade instável $W^u(0,0,0)$ com a variedade estável $W^s(0,0,0)$ formando um arco homoclínico. Pela simetria, se um ramo forma um arco homoclínico para um valor paramétrico então o outro ramo também forma um arco homoclínico. A variedade instável $W^u(0,0,0)$ está na variedade estável $W^s(0,0,0)$.

Conforme provado por Kaplan e Yorke [33], inicia-se o regime caótico quando α atinge o valor 13.96. No entanto, é ainda a transição para caos pois P_+ e P_- continuam a ser os únicos atractores do sistema.

Esta transição para caos apenas deixa de ocorrer, dando lugar ao atrator caótico encontrado por Lorenz, quando $\alpha = 470/19 \simeq 24.06$ por existirem bifurcações associadas aos pontos de equilíbrio P_+ e P_- .

Este padrão repete-se para sempre com um número de voltas em torno de um equilíbrio antes de se desviar aparecendo variar de uma forma errática. Ao mesmo tempo, as trajectórias estão confinadas a um conjunto limitado de volume nulo, ainda conseguindo mover-se nesse conjunto para sempre sem se intersectarem a si próprias ou entre si. Deste modo o atrator caótico de Lorenz revela-se um conjunto limitado atrator de volume nulo.

Para a maioria dos valores de α entre 28 e 313 existe comportamento caótico mas também existem pequenas janelas de comportamento periódico intercaladas. As três maiores janelas ocorrem para $99.524... < \alpha < 100.795$, $145 < \alpha < 166$ e $\alpha > 214.4$.

Caso L1. Sejam S_1 e S_2 dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos para os parâmetros de controle $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 2.6$. A ligação unidireccional por substituição completa, transmitindo a componente x_1 como sinal condutor do transporte para a resposta, conduz ao sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = 28x_1 - x_1z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - 2.6z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \dot{y}_2 = 28x_1 - x_1z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_1y_2 - 2.6z_2 \end{cases} ,$$

onde foi eliminada a equação $\dot{x}_1 = 10(y_1 - x_1)$ por ser superflua.

Considere a função

$$\mathbf{h}(x_1, y_2, z_2) = (f_2, f_3)(x_1, y_2, z_2) = (-x_1z_2 + 28x_1 - y_2, x_1y_2 - 2.6z_2),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(y_2(t), z_2(t))$. A equação linearizada (2.10) que

define o sistema transversal corresponde a

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(y_2, z_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 \\ x_1 & -2.(6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

para diferenças e_y e e_z suficientemente pequenas. As soluções do sistema transversal

$$\begin{cases} \dot{e}_y = -e_y - x_1 e_z \\ \dot{e}_z = x_1 e_y - 2.(6) e_z \end{cases}$$

indicam sobre a estabilidade assintótica do sistema ligado. O cálculo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(y_2, z_2)} \mathbf{h}$ conduz a

$$\Lambda_{1,2} = -\frac{11}{6} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{25}{9} - 4x_1^2}.$$

Dado que ambos são negativos para $x_1 \in [-5/6, 5/6]$, está garantida, pelo critério **(i)**, a sincronização estável.

Para estudo do sinal dos expoentes de Lyapunov condicionados há que considerar novas variáveis no sistema ligado. Seja $\mathbf{V}(t)$ a variável

$$(V_1, V_2, V_3) = \frac{1}{2} (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

que descreve a evolução de pequenas perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$, e $\mathbf{U}(t)$ a variável

$$(U_1, U_2, U_3) = \frac{1}{2} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

que descreve a evolução nessa variedade invariante ou próximo dela. Atendendo a que $x_1 = U_1 - V_1$, $x_2 = U_1 + V_1$, $y_1 = U_2 - V_2$, $y_2 = U_2 + V_2$, $z_1 = U_3 - V_3$ e $z_2 = U_3 + V_3$, o sistema ligado pode ser reescrito nas novas variáveis $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ como

$$(2.23) \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = 10(U_2 - V_2 - U_1) \\ \dot{V}_2 = -U_1 V_3 - V_2 \\ \dot{V}_3 = U_1 V_2 - 2.(6) V_3 \end{cases} \wedge \begin{cases} V_1 = 0 \\ \dot{U}_2 = 28U_1 - U_1 U_3 - U_2 \\ \dot{U}_3 = U_1 U_2 - 2.(6) U_3 \end{cases}.$$

A Figura 2.2 mostra o espectro de expoentes de Lyapunov do sistema (2.23). Pode considerar-se a divisão em dois subconjuntos: $\boldsymbol{\lambda}^{\parallel} = \{\lambda_1^{\parallel}, \lambda_2^{\parallel}, \lambda_3^{\parallel}\}$ dos expoentes de Lyapunov tangenciais e $\boldsymbol{\lambda}^{\perp} = \{\lambda_1^{\perp}, \lambda_2^{\perp}\}$ dos expoentes de Lyapunov transversais associados à evolução de $\mathbf{V}(t)$. Pelo critério **(iii)**, se o maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\max}^{\perp}$ é negativo, então qualquer perturbação transversal à variedade $\mathcal{M}$ é amortecida e o estado síncrono $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ é estável.

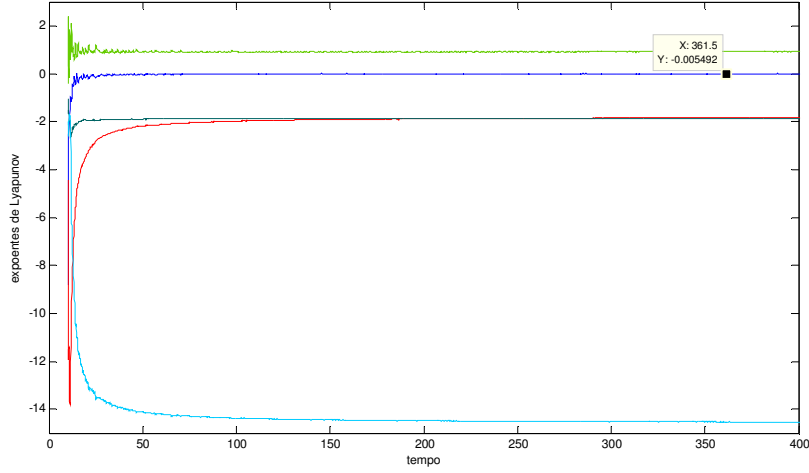


Figura 2.2: Espectro dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado: tangenciais e condicionados

Com vista ao estudo da estabilidade global, considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ [20]. Substituindo as expressões de $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ na derivada de L em ordem a t , $\dot{L}(\mathbf{e}) = e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$, obtém-se

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_y(-e_y - x_1 e_z) + e_z(x_1 e_y - 2.(6)e_z) = -(e_y^2 + 2.(6)e_z^2) \leq 0.$$

Como $\dot{L}(\mathbf{e})$ é negativa excepto em $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, o método directo de Lyapunov garante que a origem é globalmente assintoticamente estável para o sistema transversal.

Caso L2. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos para valores paramétricos σ , α e β que conduzam a comportamento caótico. Liguem-se os dois sistemas através da variável condutora x_1 por adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$, com $\rho > 0$, aplicado como *feedback* negativo deslocado à segunda equação do sistema resposta. Além disso é introduzida a substituição parcial em que a variável x_1 dá lugar à sua correspondente x_2 apenas nos termos não-lineares $x_2 z_2$ e $x_2 y_2$ do sistema resposta.

Inicie-se o sistema ligado

$$(2.24) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - \underline{x}_1 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{z}_2 = \underline{x}_1 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

a partir de condições iniciais arbitrárias tais que $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$. Existe sincronização idêntica se a evolução do sistema ligado (2.24) está continuamente confinada a um hiperplano $\mathcal{M}$ no espaço de fase. Além das coordenadas $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$, considere

$$e'_x = x_2 + x_1, \quad e'_y = y_2 + y_1 \quad \text{e} \quad e'_z = z_2 + z_1.$$

Obtem-se um novo conjunto de coordenadas: e'_x , e'_y e e'_z em $\mathcal{M}$ e e_x , e_y e e_z no subespaço transversal a $\mathcal{M}$. Para que e_x , e_y e e_z tendam para 0 quando $t \rightarrow +\infty$, o ponto $(0, 0, 0)$ no espaço transversal a $\mathcal{M}$ deve ser um ponto de equilíbrio assintoticamente estável nesse espaço. Isto conduz a requerer que o sistema dinâmico em (e_x, e_y, e_z) definindo as perturbações transversais seja assintoticamente estável no ponto de equilíbrio $(0, 0, 0)$.

Considere a função

$$\check{\mathbf{f}} = (\sigma(y_2 - x_2), \alpha x_2 - x_1 z_2 - y_2 + \rho(x_1 - x_2), x_1 y_2 - \beta z_2)$$

obtida da resposta em (2.24). Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais a $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \alpha - \rho & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

Pelo estudo dos valores próprios da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$, conclui-se que é obtida sincronização localmente estável se $\rho_{sync} = \alpha - 1$.

Tomando os parâmetros de controle $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 2.6$ e a força de ligação $\rho = 27.1$, verifica-se que $x_2 \rightarrow x_1$, $y_2 \rightarrow y_1$ e $z_2 \rightarrow z_1$ quando os sistemas evoluem (Fig. 2.3a). Ao fim de um certo tempo, as coordenadas x , y e z de cada um dos sistemas verificam as igualdades $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ (Fig. 2.3b) Como tal, as distâncias $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ e $|z_2 - z_1|$ tendem para 0 ao longo do tempo (Fig. 2.3c). As equações $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ e $z_2 = z_1$ definem um hiperplano $\mathcal{M}$ no espaço de fase de dimensão 6.

Por aplicação do critério (ii), obtem-se que o limiar $\tilde{\rho}_{sync}$ de sincronização globalmente estável é superior ao obtido para estabilidade local,

$$\tilde{\rho}_{sync} = \alpha + \sigma > \alpha - 1,$$

conduzindo, portanto, a um intervalo de valores de ρ mais restrictivo. Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para

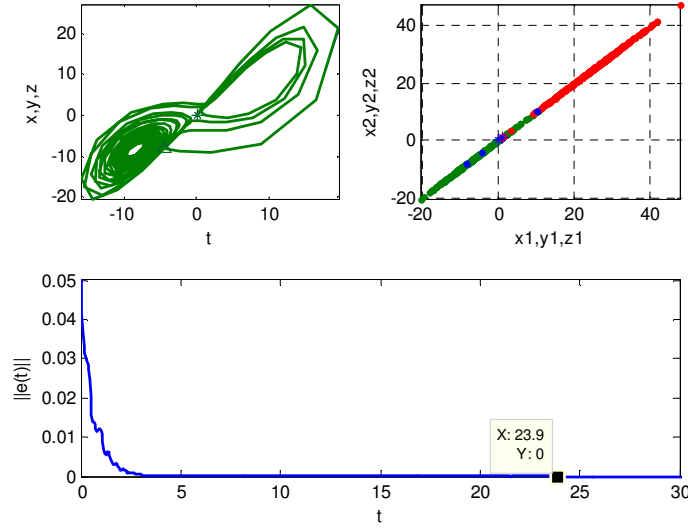


Figura 2.3: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

todo o $\rho > 0$. Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) e_x e_y \\ &\leq -\sigma e_x^2 - e_y^2 - \beta e_z^2 + (\sigma + \alpha - \rho) |e_x e_y|. \end{aligned}$$

Escolhendo uma força de ligação que satisfaça $\tilde{\rho} > \alpha + \sigma$ estão garantidas as condições exigidas pelo método directo de Lyapunov. Logo é alcançada sincronização globalmente estável no sistema ligado para uma força de ligação $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\sigma, \alpha)$ que não depende do parâmetro de controle β tomado.

Tomando os mesmos valores para os parâmetros de controle, seguem-se os gráficos (Fig. 2.4 a,b,c) obtidos para a força de ligação $\rho = 38.1$. Verifica-se que o tempo t_{sync} para $\rho = 38.1$ é inferior ao obtido para $\rho = 27.1 < 38.1$.

A Tabela 2.2 apresenta as condições suficientes para sincronização globalmente estável

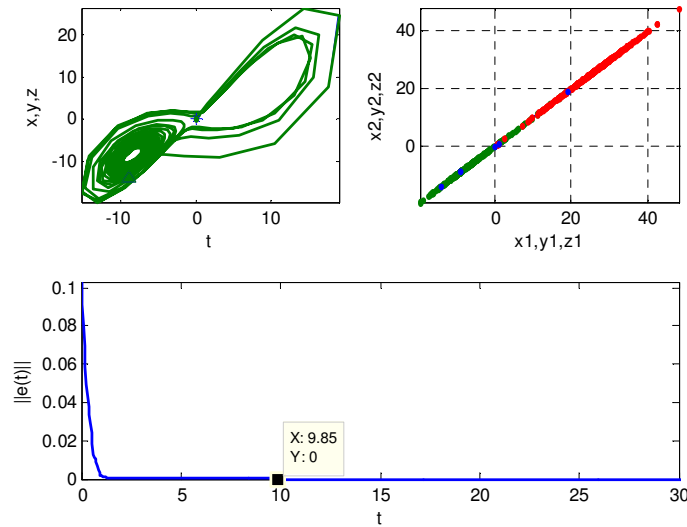


Figura 2.4: (a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

obtidas no estudo de outros casos semelhantes (ver L7, L8 e L9 no Anexo 2a).

Desloc.	Substit.	Condição suficiente para sincronização
à 2ª eq.	—	$\beta (\xi + K_z)^2 < 4\sigma\beta - K_y^2$
à 2ª eq.	na 3ª eq.	$\beta (\xi + K_z)^2 < 4\sigma\beta - \sigma K^2$
à 3ª eq.	na 2ª eq.	$\xi^2 < 4\sigma \wedge \beta \xi^2 < 4\sigma\beta - K K_y \xi + K_y^2 + \sigma K^2$

Tabela 2.2: Ligações unidireccionais por *feedback* negativo deslocado.

Foi aplicado o sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ deslocado e, em alguns casos, foi efectuada a substituição parcial da variável x_1 pela sua correspondente x_2 em alguns termos não-lineares da resposta. As constantes ξ e K representam as expressões $\rho - \sigma - \alpha$ e $K_x + K'_x$, respectivamente.

Conforme o exposto no caso R6 (ver Anexo 2b) para atractores de Rössler caóticos idênticos, esta abordagem é inconclusiva quando é efectuada a adição do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$, $\rho > 0$, aplicado como *feedback* negativo deslocado à terceira equação da resposta e a substituição parcial simultânea da variável x_1 pela sua correspondente x_2 na mesma equação.

Caso L3. Considere entre sistemas de Lorenz idênticos e caóticos a ligação por decomposição activo-passivo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma y_1 \\ \dot{y}_1 = s(t) - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -\sigma x_2 + \sigma y_2 \\ \dot{y}_2 = s(t) - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 \end{cases}$$

com uso do sinal condutor $s = h(x_1, y_1, z_1) = x_1(\alpha - z_1)$.

A equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ y_2 & x_2 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde $\check{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3) = (-\sigma x_2 + \sigma y_2, s(t) - y_2, x_2 y_2 - \beta z_2)$ e as diferenças e_x , e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. Dado que todos os valores próprios $\Lambda_1 = -\sigma$, $\Lambda_2 = -1$ e $\Lambda_3 = -\beta$ da matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ são negativos, está garantida pelo critério (i) a sincronização estável dos sistemas (ver Fig. 2.5 a,b,c obtida com $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 2$.(6)).

Na aplicação do critério (ii), nota-se que $\dot{e}_y = -e_y$ donde $e_y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto, o subsistema bidimensional que descreve a evolução de $e_x = x_1 - x_2$ e $e_z = z_1 - z_2$ pode, quando $t \rightarrow +\infty$, ser escrito apenas como

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -\sigma e_x \\ \dot{e}_z = y_2 e_x - \beta e_z \end{cases}.$$

Considere $L(e_x, e_z) = (e_x^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(e_x, e_z) > 0$ sempre que $(e_x, e_z) \neq (0, 0)$ e $L(0, 0) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$ e $\dot{e}_z$ na derivada $\dot{L}(e_x, e_z) = e_x \dot{e}_x + e_z \dot{e}_z$ obtém-se

$$\dot{L}(e_x, e_z) = -\sigma e_x^2 - y_2 e_x e_z - \beta e_z^2 \leq -e_y^2 - \beta e_z^2 - y_2 |e_x e_z|.$$

Supondo que a função de variável real y_2 é limitada, seja K_y uma constante positiva tal que $|y_2| \leq K_y$. Como tal é válida a desigualdade

$$\dot{L}(e_x, e_z) \leq -e_y^2 - \beta e_z^2 - K_y |e_x e_z| \leq 0,$$

logo, pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ e a sincronização é globalmente estável.

Pelo exposto, conclui-se ainda que ocorre sincronização globalmente estável para todos os tipos de sinal $s(t)$ que conduzam à desigualdade $\dot{e}_y < 0$. Nota-se que, para que o sistema

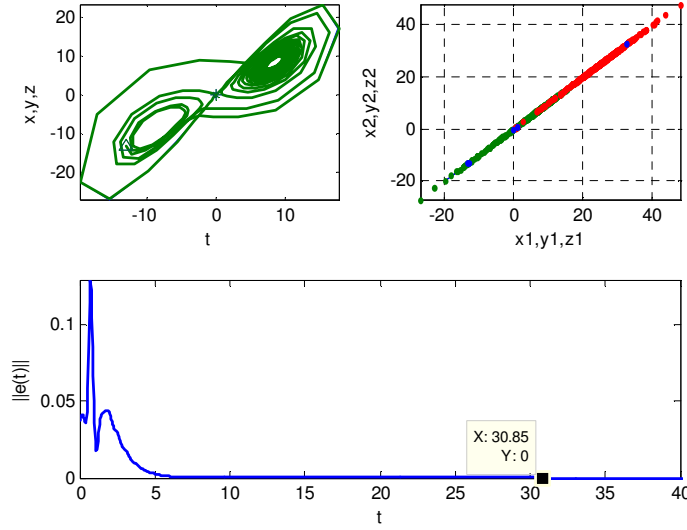


Figura 2.5: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}K_y \\ \frac{1}{2}K_y & \beta \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em que $\|\mathbf{e}\| = (|e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são todos positivos se $K_y^2 < 4\beta$. Pelo método directo de Lyapunov, o erro de sincronização tende para 0 quando $t \rightarrow +\infty$ sempre que a constante positiva K_y limitando a variável do sistema satisfaz a esta desigualdade, e os sistemas alcançam sincronização globalmente estável.

A Tabela 2.3 resume o estudo de ligações no atrator de Lorenz por decomposições activo-passivo com os sinais condutores $s(t) = \sigma y_1(t)$, $s(t) = \alpha x_1(t)$ e $s(t) = -\beta z_1(t)$ (ver casos L10, L11 e L12 no Anexo 2a).

Sinal condutor	Condição suficiente		
$s(t) = \sigma y_1(t)$	$4\sigma > (K_z - \alpha)^2$	$\wedge \quad \beta$	$4\sigma - (K_z - \alpha)^2 > K_y^2$
$s(t) = \alpha x_1(t)$	$(\sigma + K_z)^2 < 4\sigma$	$\wedge \quad \beta$	$4\sigma - (\sigma + K_z)^2 > K_y^2$
$s(t) = -\beta z_1(t)$	inconclusivo		

Tabela 2.3: Ligações por decomposição activo-passivo.

Nota-se que a decomposição activo-passivo com uso do sinal $s(t) = \sigma y_1(t)$ equivale à substituição de y_2 por y_1 mas apenas na primeira equação do sistema resposta, conforme o caso L13 apresentado no Anexo 2a. O mesmo se verifica para os sinais condutores $s(t) = \alpha x_1(t)$ e $s(t) = -\beta z_1(t)$ que correspondem, respectivamente, à substituição da variável x_2 por x_1 apenas na segunda equação da resposta e à substituição da variável z_2 por z_1 na terceira equação da resposta. Isto mostra que o critério de Pecora e Carroll está incluído na abordagem mais geral por decomposição activo-passivo.

Caso L4. Considere a seguinte proposição baseada na estabilidade assintótica global do sistema transversal definido por (2.1).

Proposição 2.3.1 *Seja $\mathbf{A}$ a matriz que caracteriza o sistema transversal relativo a uma ligação dos sistemas idênticos S_1 e S_2 , ou seja, $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}$ para $\mathbf{e} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$. Se existe uma constante $\delta < 0$ tal que a matriz simétrica $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ é definida negativa e satisfaz*

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} \leq \delta \mathbf{I}$$

para qualquer $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ no espaço de fase X então a dinâmica do sistema transversal é globalmente estável e os sistemas S_1 e S_2 estão em sincronização estável.

Prova. Considere a função de Lyapunov da forma $L(\mathbf{e}(t)) = [\mathbf{e}(t)]^T \cdot \mathbf{e}(t)$ cuja derivada em ordem a t é dada por

$$\frac{dL}{dt}(\mathbf{e}) = \frac{d(\mathbf{e}^T)}{dt} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}.$$

Tem-se então

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{e} \leq \delta (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{e}) = \delta (\mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}) < 0$$

para todo o $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Pelo método directo de Lyapunov está garantida a estabilidade assintótica global do sistema transversal ■

Considere os sistemas de Lorenz idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por controle *feedback* negativo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - \underline{x}_1 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = \underline{x}_1 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2) \end{cases},$$

em que também se procedeu à substituição parcial da variável x_2 por x_1 apenas nos termos não-lineares $x_2 z_2$ e $x_2 y_2$ do sistema resposta. Seja $\check{\mathbf{f}}$ a função obtida da resposta, de componentes $\check{f}_1 = \sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2)$, $\check{f}_2 = \alpha x_2 - x_1 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2)$ e $\check{f}_3 = x_1 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2)$. Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma - \rho & \sigma & 0 \\ \alpha & -1 - \rho & -x_1 \\ 0 & x_1 & -\beta - \rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}.$$

e pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sigma - \rho & \sigma & 0 \\ \alpha & -1 - \rho & -x_1 \\ 0 & x_1 & -\beta - \rho \end{bmatrix}.$$

Os determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2(\sigma + \rho) & \sigma + \alpha & 0 \\ \sigma + \alpha & -2(1 + \rho) & 0 \\ 0 & 0 & -2(\beta + \rho) \end{bmatrix}$$

são $\Delta_1 = -2(\sigma + \rho)$, $\Delta_2 = 4(\sigma + \rho)(1 + \rho) - (\sigma + \alpha)^2$ e

$$\Delta_3 = \left[2(\sigma + \alpha)^2 - 8(\sigma + \rho)(1 + \rho)2(\sigma + \alpha)^2 \right] (\beta + \rho).$$

Tem-se $-\Delta_1 > 0$ e a condição $-\Delta_3 > 0$ é satisfeita sempre que $\Delta_2 > 0$ (pois $\beta + \rho > 0$). Conclui-se então pela Proposição 2.3.1 que ocorre sincronização globalmente estável para valores dos parâmetros de controle e de ligação que verifiquem a desigualdade

$$4(\sigma + \rho)(1 + \rho) > (\sigma + \alpha)^2.$$

Tomando os parâmetros de controle $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 2.6$, seguem-se os gráficos (Fig. 2.6 a,b,c) obtidos para a força de ligação $\rho = 14.5$ (o menor valor de ρ em passo de uma décima que verifica a desigualdade anterior).

Esta abordagem é inconclusiva quando não é efectuada a substituição parcial da variável x_2 por x_1 nos termos não-lineares do sistema resposta (ver caso L14 do Anexo 2a).

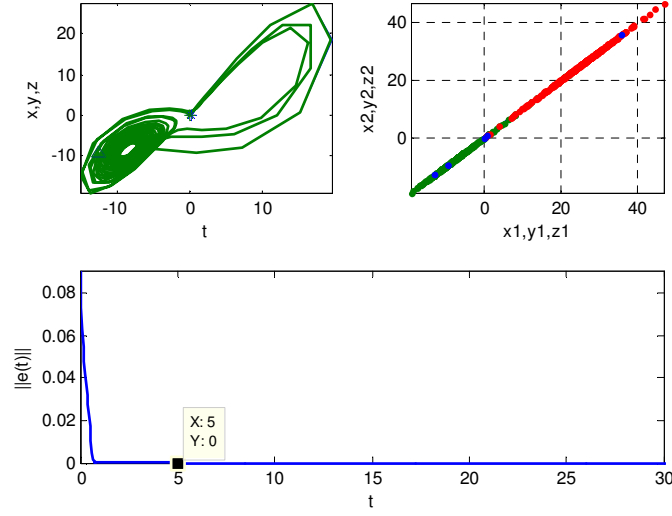


Figura 2.6: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

Caso L5. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos em ligação difusiva linear bidireccional com todos os parâmetros de ligação iguais a $\rho > 0$ (caso particular II)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 + \rho(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 + \rho(z_2 - z_1) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = \alpha x_2 - x_2 z_2 - y_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = x_2 y_2 - \beta z_2 + \rho(z_1 - z_2) \end{cases} ,$$

em que também se procedeu à substituição parcial da variável x_2 por x_1 apenas nos termos não-lineares da resposta. Dado o erro de sincronização $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$, o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma(e_y - e_x) - 2\rho e_x \\ \alpha e_x - x_1 e_z - e_y - 2\rho e_y \\ x_1 e_y - \beta e_z - 2\rho e_z \end{bmatrix}$$

e pode tomar a forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2\rho - \sigma & \sigma & 0 \\ \alpha & -2\rho - 1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & -2\rho - \beta \end{bmatrix}.$$

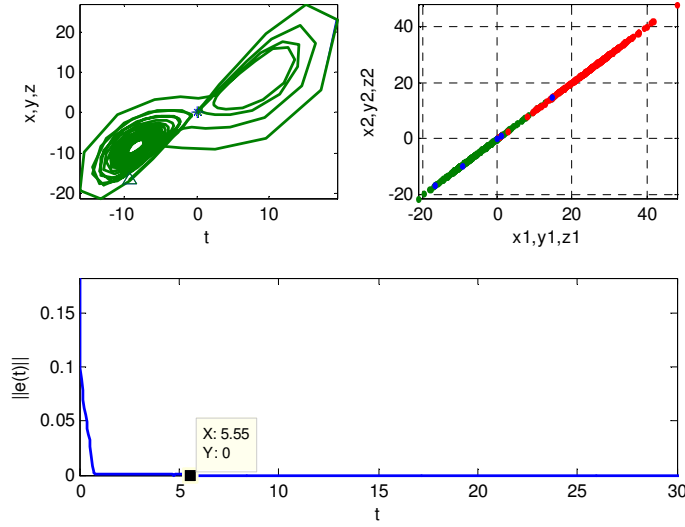


Figura 2.7: (a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

O cálculo dos determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2(2\rho + \sigma) & \sigma + \alpha & 0 \\ \sigma + \alpha & -2(2\rho + 1) & 0 \\ 0 & 0 & -2(2\rho + \beta) \end{bmatrix},$$

conduz a $\Delta_1 = -2(2\rho + \sigma)$, $\Delta_2 = 4(2\rho + \sigma)(2\rho + 1) - (\sigma + \alpha)^2$ e

$$\Delta_3 = -2 \left[4(2\rho + \sigma)(2\rho + 1) - (\sigma + \alpha)^2 \right] (2\rho + \beta).$$

Tem-se $-\Delta_1 > 0$ e a condição $-\Delta_3 > 0$ é satisfeita sempre que $\Delta_2 > 0$ (pois $2\rho + \beta > 0$). Conclui-se então pela Proposição 2.3.1 que ocorre sincronização globalmente estável para valores dos parâmetros de controle e de ligação que verifiquem a desigualdade

$$4(2\rho + \sigma)(2\rho + 1) > (\sigma + \alpha)^2.$$

A Figura 2.7 a,b,c mostra os gráficos obtidos tomando os valores paramétricos $\sigma = 10$, $\alpha = 28$ e $\beta = 8/3$ e $\rho = 7.1$.

Esta abordagem é inconclusiva quando não é efectuada a substituição parcial da variável x_2 por x_1 nos termos não-lineares do sistema resposta (ver caso L15 do Anexo 2a).

Caso L6. Considere dois sistemas de Lorenz idênticos e caóticos unidireccionalmente ligados por transmissão de um sinal do primeiro para o segundo sistema. É escolhido como sinal a primeira componente do sistema transporte e, como tal, em todo o sistema resposta a coordenada x_2 é substituída pela variável x_1 do sistema transporte,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = \alpha x_1 - x_1 z_1 - y_1 \\ \dot{z}_1 = x_1 y_1 - \beta z_1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \dot{y}_2 = \alpha x_1 - x_1 z_2 - y_2 \\ \dot{z}_2 = x_1 y_2 - \beta z_2 \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Seja a função

$$\mathbf{h}(x_1, y_2, z_2) = (f_2, f_3)(x_1, y_2, z_2) = (\alpha x_1 - x_1 z_2 - y_2, x_1 y_2 - \beta z_2),$$

que caracteriza o subsistema resposta $(y_2(t), z_2(t))$. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(y_2, z_2)} \mathbf{h} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 \\ x_1 & -\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde as diferenças e_y e e_z são consideradas suficientemente pequenas. O sistema transversal pode ser escrito na forma matricial $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}(x_1) \cdot \mathbf{e}$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -x_1 \\ x_1 & -\beta \end{bmatrix}.$$

Dado que os determinantes das submatrizes principais da matriz

$$\mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2\beta \end{bmatrix}$$

satisfazem as condições $(-1)^i \Delta_i > 0$ para todo o $i = 1, 2$, então $\mathbf{A}^T + \mathbf{A}$ é definida negativa. Pode então concluir-se que ocorre sincronização globalmente estável (Fig. 2.8 a,b,c).

Conforme o caso L16 apresentado no Anexo 2a, a Proposição 2.3.1 não é aplicável à ligação por substituição parcial de y_2 por y_1 na primeira equação da resposta, dado que $\Delta_2 = 4\sigma - (\alpha - z_2)^2$ e

$$\Delta_3 = -2\beta \left[4\sigma - (\alpha - z_2)^2 \right] + 2(x_2 - x_1) [y_1(\alpha - z_2) + \sigma(x_2 - x_1)] + 2y_1^2.$$

Seguem-se duas tabelas que resumem o estudo efectuado com outros tipos de ligação. Na Tabela 2.4 são apresentados os resultados relativos aos casos L17 (ver Anexo 2a), R7, R8

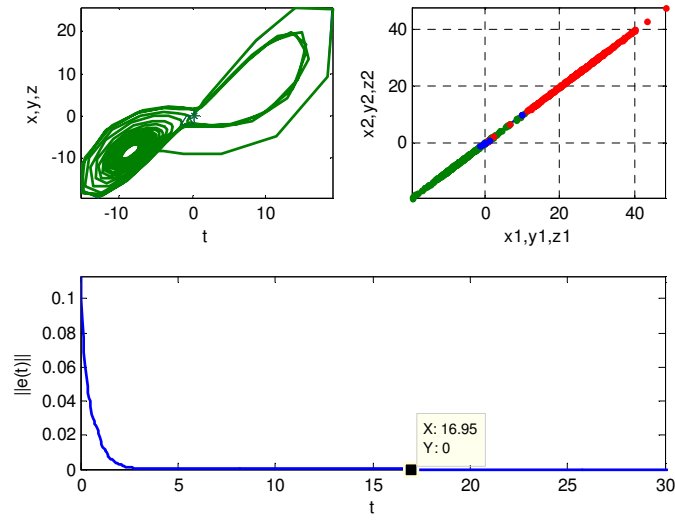


Figura 2.8: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

e R9 (ver Anexo 2b) em ligação por substituição completa, com diferentes subsistemas sinal condutor. Da Tabela 2.5 constam os resultados obtidos nos exemplos R10 e R11 (ver Anexo 2b) em ligação por controle *feedback* negativo, sem e com substituição de variáveis no termo não-linear da resposta. A constante ξ representa a expressão $\rho_y - a$.

Atractor	Ligação	Δ_1	Δ_2	Sincronização
Lorenz	$z_2 \rightarrow z_1$	-2σ	$4\sigma - (\sigma + a - z_1)^2$	não conclusivo
Rössler	$y_2 \rightarrow y_1$	0	$-z_1^2$	não conclusivo
Rössler	$x_2 \rightarrow x_1$	$2a$	$4a(x_1 - c)$	não conclusivo
Rössler	$z_2 \rightarrow z_1$	0	0	não conclusivo

Tabela 2.4: Ligações por substituição completa de variáveis.

Δ_1	Δ_2	Δ_3		Sincronização
$-2\rho_x$	$4\rho_x\xi$	2ξ	$4\rho_x(x_2 - c - \rho_z) + (z_2 - 1)^2$	não conclusivo
$-2\rho_x$	$4\rho_x\xi$	$2\xi[4\rho_x(x_1 - c - \rho_z) + 1]$		não conclusivo

Tabela 2.5: Controle *feedback* negativo no sistema de Rössler.

2.3.2 Análise de sincronização no sistema não-linear de Rössler

Em 1976, o matemático suíço Ott Rössler [74] descobriu um novo sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear com atrator. Trata-se do sistema de Rössler

$$\dot{x} = -(y + z) \quad \wedge \quad \dot{y} = x + ay \quad \wedge \quad \dot{z} = b + z(x - c),$$

nas variáveis dinâmicas $x, y, z \in \mathbb{R}$ e de parâmetros reais a , b e c , que tem um atrator caótico como solução, também designado por atrator de Rössler.

Considere $z = 0$ e examine-se o comportamento no xy -plano com base nas equações simplificadas $\dot{x} = -y$ e $\dot{y} = x + ay$. A estabilidade no xy -plano pode então ser encontrada pelo cálculo dos valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4} \right) / 2$$

da matriz Jacobiana do sistema formado por estas duas equações diferenciais. Assim, quando $0 < a < 2$ os valores próprios são complexos conjugados com parte real positiva, pelo que a origem é instável com uma espiral para o exterior no xy -plano.

Seja agora $z \neq 0$ e considerando esta variação para a . Desde que x seja menor do que c , o termo c mantém a órbita próximo de xy -plano. Quando a órbita se aproxima de x maiores do que c , os valores de z começam a subir mas o termo $-z$ da equação $\dot{x} = -y - z$ limita o crescimento em x . Uma órbita no atrator segue uma espiral para o exterior próximo do xy -plano em torno de um ponto de equilíbrio instável mas, após suficiente subida, um segundo ponto de equilíbrio influencia o movimento causando um aumento e torção na z -dimensão. Torna-se aparente que embora cada variável esteja oscilando dentro de uma variação fixa de valores, as oscilações são caóticas.

O sistema de Rössler tem dois pontos de equilíbrio P_+ e P_- dados por

$$P_{\pm} = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right).$$

O ponto de equilíbrio P_- está localizado no centro do atrator e é uma sela-foco com uma variedade instável bidimensional correspondente a uma espiral instável sobretudo no xy -plano, quando a trajectória se instala sobre um atrator caótico. A expressão de não-linearidade $z(x - c)$ torna-se activa quando a trajectória deixa o xy -plano. Então a trajectória move-se para uma vizinhança do ponto de equilíbrio P_+ exterior à região do atrator, também uma sela-foco. O ponto de equilíbrio P_+ tem uma variedade instável unidimensional que envia a trajectória ao longo da variedade estável unidimensional de

P_- . Pode então ocorrer um novo ciclo. Com valores paramétricos apropriados a trajectória descreve assim um atractor caótico.

Conforme a descrição topológica em [40], não existe um único sistema de Rössler mas uma colecção completa de conjuntos diferentes de equações diferenciais ordinárias com topologias diferentes. Fixando dois dos parâmetros, é possível averiguar a existência de bifurcações quando o outro parâmetro varia. Contudo os comportamentos induzidos pela variação de um parâmetro são substancialmente diferentes conforme o parâmetro escolhido para variar.

Considere $a = b = 0.2$. Em $c = 2.5$ o atractor é um ciclo limite. Quando c aumenta para 3.5, o ciclo limite dá duas voltas antes de fechar e o seu período é aproximadamente o dobro do do ciclo original. De facto, entre $c = 2.5$ e $c = 3.5$ deve ocorrer uma bifurcação de duplicação de período de ciclos, apenas possível em dimensão 3 ou superior. Uma outra bifurcação de duplicação de período cria um ciclo de quatro voltas que já existe quando $c = 4$. Após uma cascata infinita de duplicações de período, existe um atractor estranho quando $c = 5$.

Por outro lado, estudos numéricos do comportamento do sistema sob mudanças de a sugerem que tem uma influência desproporcional sobre o comportamento do atractor. Quando são fixados $b = 2$ e $c = 4$, existe (quase) uma correspondência unívoca entre o diagrama de bifurcação do sistema de Rössler com $a \in [0.126, 0.43295]$ e o da aplicação logística $f(x; \mu) = \mu x(1 - x)$ com $\mu \in [1, 4]$. Assim, surge comportamento caótico após uma cascata de duplicação de período como na aplicação logística.

Rössler estudou o atractor caótico com os valores paramétricos $a = b = 0.2$ e $c = 5.7$ (Fig. 2.9), embora posteriormente se tenham averiguado as propriedades para $a = b = 0.1$ e $c = 14$. Screw chaos ocorre quando os valores paramétricos são $a = 0.343$, $b = 1.82$ e $c = 9.75$. Rössler queria encontrar um sistema minimal que exhibisse comportamento caótico.

Caso R1. Sejam S_1 e S_2 dois sistemas de Rössler idênticos e caóticos para os parâmetros de controle $a = b = 0.2$ e $c = 5$. A ligação unidireccional por controle *feedback* negativo, onde a variável x_1 é escolhida como variável condutora do transporte para a resposta, conduz ao sistema ligado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + 0.2y_1 \\ \dot{z}_1 = 0.2 + z_1(x_1 - 5) \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + 0.2y_2 \\ \dot{z}_2 = 0.2 + z_2(x_2 - 5) \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de

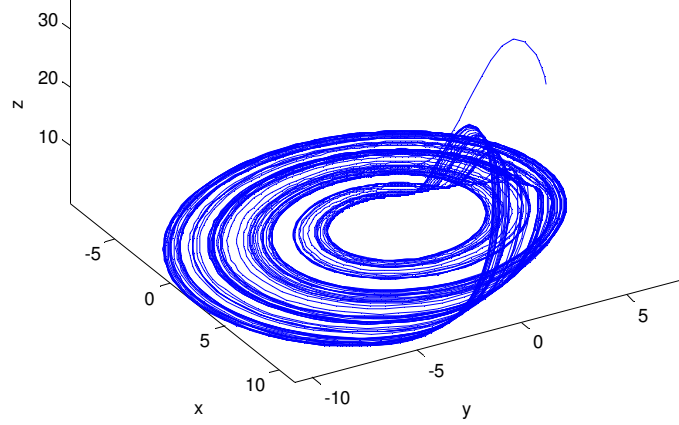


Figura 2.9: Atrator caótico de Rössler

sincronização **e**. Para qualquer valor de ρ , a equação linearizada que define a dinâmica de perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} \approx D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ z_2 & 0 & x_2 - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

onde

$$\check{\mathbf{f}} = (-y_2 - z_2 + \rho(x_1 - x_2), x_2 + 0.2y_2, 0.2 + z_2(x_2 - 5))$$

é obtida da resposta. A matriz Jacobiana $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ depende da força de ligação correspondente ao sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$ na primeira equação do transporte. Pelo critério **(i)**, está garantida a sincronização estável se a matriz $D_{(x_2, y_2, z_2)} \check{\mathbf{f}}$ for definida negativa, ou seja, se

$$\rho < 5 \quad \wedge \quad x_2 + 0.2z_2 < \frac{5\rho + 30}{\rho + 5}.$$

Inicie-se o sistema ligado a partir de condições iniciais próximas tais que $x_1(0) \neq x_2(0)$, $y_1(0) \neq y_2(0)$ e $z_1(0) \neq z_2(0)$. Quando os sistemas evoluem ligados pelo sinal de controle $\rho(x_1 - x_2) = 0.4(x_1 - x_2)$, cada componente x_1 , y_1 e z_1 converge para a sua correspondente x_2 , y_2 e z_2 (Fig. 2.10a) e, ao fim de um certo tempo $t_{sync} \simeq 51.7$, as componentes de cada um dos sistemas verificam $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$ (Fig. 2.10b).

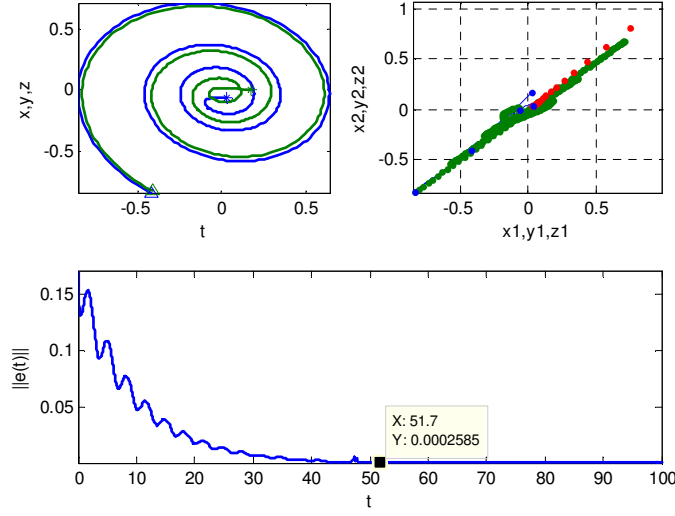


Figura 2.10: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

Como tal, as distâncias $|x_2 - x_1|$, $|y_2 - y_1|$ e $|z_2 - z_1|$ tendem para zero ao longo do tempo (Fig. 2.10c) e estabelece-se no sistema ligado o estado caótico síncronico simétrico.

Para o estudo da estabilidade global, considere a função de Lyapunov

$$L(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) \geq 0$$

que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -\rho e_x^2 + (z_2 - 1) e_x e_z + 0.2 e_y^2 + (x_2 - 5) e_z^2 \\ &\leq -\rho e_x^2 + 0.2 e_y^2 + x_2 e_z^2 - 5 e_z^2 + z_2 |e_x e_z| - |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_2 e z_2 são limitadas, sejam K_x e K_z constantes positivas tais que $|x_2| \leq K_x$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal é válido

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -\rho e_x^2 + 0.2 e_y^2 + K_x e_z^2 - 5 e_z^2 + K_y |e_x e_z| - |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & \frac{1}{2}(1 - K_y) \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - K_y) & 0 & 5 - K_x \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$\rho > 0 \quad \wedge \quad -\rho > 0 \quad \wedge \quad 4\rho(K_x - 5) > (1 - K_y)^2.$$

Sendo a desigualdade relativa a Δ_2 impossível, o método directo de Lyapunov não é aplicável para esta escolha da função de sincronização e nada se conclui quanto à sincronização globalmente estável dos sistemas.

A partir da equação que define o sistema transversal são estimados os expoentes de Lyapunov condicionados que indicam acerca da diminuição ou aumento das perturbações transversais. Seja $\mathbf{V}(t)$ a variável

$$(V_1, V_2, V_3) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

que descreve a evolução de pequenas perturbações transversais à variedade de sincronização $\mathcal{M}$, e $\mathbf{U}(t)$ a variável

$$(U_1, U_2, U_3) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

que descreve a evolução nessa variedade invariante ou próximo dela. Atendendo a que $x_1 = U_1 - V_1$, $x_2 = U_1 + V_1$, $y_1 = U_2 - V_2$, $y_2 = U_2 + V_2$, $z_1 = U_3 - V_3$ e $z_2 = U_3 + V_3$, o sistema ligado pode ser reescrito nas novas variáveis $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ como

$$(2.25) \quad \begin{cases} \dot{V}_1 = -V_2 - V_3 - \rho V_1 \\ \dot{V}_2 = V_1 + 0.2V_2 \\ \dot{V}_3 = U_3V_1 - 5V_3 + U_1V_3 \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \dot{U}_1 = -U_2 - U_3 - \rho U_1 \\ \dot{U}_2 = U_1 + 0.2U_2 \\ \dot{U}_3 = 0.2 + U_1U_3 - 5U_3 + V_1V_3 \end{cases}.$$

A Figura 2.11 mostra o espectro de expoentes de Lyapunov do sistema (2.25). Pode considerar-se a divisão em dois subconjuntos: $\boldsymbol{\lambda}^{\parallel} = \{\lambda_1^{\parallel}, \lambda_2^{\parallel}, \lambda_3^{\parallel}\}$ dos expoentes de Lyapunov tangenciais e $\boldsymbol{\lambda}^{\perp} = \{\lambda_1^{\perp}, \lambda_2^{\perp}, \lambda_3^{\perp}\}$ dos expoentes de Lyapunov transversais associados à evolução de $\mathbf{V}(t)$. Pelo critério (iii), se o maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$ é negativo, então qualquer perturbação transversal à variedade $\mathcal{M}$ é amortecida e o estado sincrónico $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ é estável.

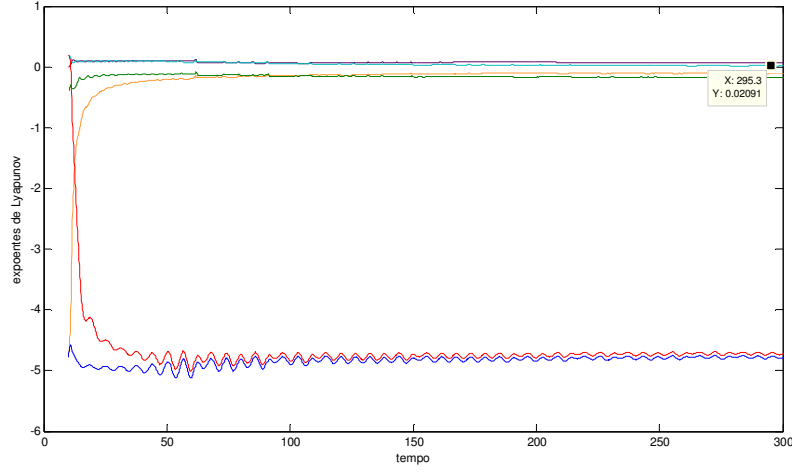


Figura 2.11: Espectro dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado: tangenciais e condicionados

No início da sincronização, o efeito provocado por adicionar o sinal de controle $\rho(x_2 - x_1)$ é diminuir o valor do expoente maximal $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$. Este facto ocorre em muitos exemplos de ligação de sistemas caóticos. Assim, em algum valor intermédio de ρ , denotado por ρ_{sync} , os sistemas sincronizam de forma estável. Contudo, o aumento da força de ligação ρ não garante necessariamente que os expoentes de Lyapunov condicionados continuem a decrescer e que se mantenha o estado síncrono assintoticamente estável. Em particular, conforme ilustra a Figura 5, com o aumento de ρ o expoente maximal $\lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$ torna-se positivo e o estado síncrono deixa de ser estável. Esta perda de sincronização estável foi notada por Heagy *et al.* ([21],[22]). Assim, a condição minimal de estabilidade com uso dos expoentes de Lyapunov garante que o estado síncrono é estável apenas sobre uma variação finita da força de ligação ρ .

Para valores de ρ superiores é ainda possível "escravizar" x_2 a x_1 dada a presença do sinal de controle $\rho(x_1 - x_2)$: assintoticamente é efectuada a substituição completa $x_2 \rightarrow x_1$, ou seja, são substituídas por x_1 todas as ocorrências de x_2 no sistema resposta. Deste modo, as ligações por controle *feedback* negativo e por substituição completa estão relacionadas. O valor assintótico correspondente ao limite

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \lambda_{\max}^{\perp}(\rho)$$

indica se o método de substituição completa funciona e, inversamente, esse valor assimp-

tótico é determinado pela estabilidade do subsistema que permanece desligado do sistema transporte, como consequência de aplicação do método de substituição completa.

Os casos R12, R13, R14 e R15, apresentados no Anexo 2b, mostram que a tarefa de averiguar a existência de sincronização estável em ligação unidireccional por controle *feedback* negativo é bastante mais simples quando são efectuadas substituições parcial no termo não-linear do sistema resposta. A Tabela 2.6 resume o estudo efectuado.

Ligação	Substituição	Sincronização
$\rho(x_1 - x_2)$	$x_2 \rightarrow x_1$ e $z_2 \rightarrow z_1$	não
$\rho(z_1 - z_2)$	$x_2 \rightarrow x_1$ e $z_2 \rightarrow z_1$	não
$\rho(z_1 - z_2)$	$x_2 \rightarrow x_1$	não
$\rho(y_1 - y_2)$	$x_2 \rightarrow x_1$ e $z_2 \rightarrow z_1$	não

Tabela 2.6: Ligações unidireccionais por *feedback* negativo e substituição parcial

Caso R2. Considere os sistemas de Rössler caótico e hipercaótico [75], respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + a_1 y_1 \\ \dot{z}_1 = b_1 + z_1(x_1 - c_1) \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2 = -y_2 - z_2 \\ \dot{y}_2 = x_2 + a_2 y_2 + w_2 \\ \dot{z}_2 = x_2 z_2 + b_2 \\ \dot{w}_2 = -c_2 z_2 + d_2 w_2 \end{array} \right.,$$

para valores paramétricos a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2, d_2 que conduzam a comportamento caótico. Os valores paramétricos $a_2 = 0.25, b_2 = 3, c_2 = 0.5$ e $d_2 = 0.05$ conduzem a comportamento caótico no sistema de Rössler hipercaótico.

Pretende-se uma ligação unidireccional entre eles, por função de controle, para a função de sincronização $\mathbf{h}(x_1, y_1, z_1) = (x_1 z_1, y_1, x_1, 2y_1 + z_1)$. O sistema resposta pode ser escrito na forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{u}_2)$ com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_2 z_2 + b_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz constante

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2a_2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 2d_2 \end{bmatrix}$$

é tal que a matriz diferença

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{bmatrix}$$

é diagonal com todos os elementos diagonais negativos. A soma $(\mathbf{A} - \mathbf{A}')^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}'$ é uma matriz definida negativa com valores próprios $\Lambda_{1,2} = -2$, $\Lambda_3 = -2a_2$ e $\Lambda_4 = -2d_2$.

Dada a matriz Jacobiana de $\mathbf{h}$

$$D\mathbf{h}(x_1, y_1, z_1) = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

a função de controle definida por (2.22) é

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{bmatrix} y_2 - x_2 + z_2 + (2 + b_1)x_1 - z_1[(y_1 + z_1) - x_1(x_1 - c_1 + 1)] \\ -x_2 - 2a_2y_2 + (a_2 + a_1)y_1 + x_1 \\ x_1 - (x_2 + 1)z_2 - b_2 - (y_1 + z_1) \\ c_2z_2 - 2d_2w_2 + (2d_2 + 2a_1)y_1 + 2x_1 + b_1 + z_1(x_1 - c + d_2) \end{bmatrix}.$$

O sistema ligado, para o qual está garantida a sincronização generalizada globalmente estável relativamente a $\mathbf{h}$, tem então por sistema resposta

$$S_2 \equiv \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_2 + (2 + b_1)x_1 - z_1(y_1 + z_1) + z_1x_1(x_1 - c_1 + 1) \\ \dot{y}_2 = -a_2y_2 + w_2 + (a_2 + a_1)y_1 + x_1 \\ \dot{z}_2 = x_1 - z_2 - (y_1 + z_1) \\ \dot{w}_2 = -d_2w_2 + (2d_2 + 2a_1)y_1 + 2x_1 + b_1 + z_1(x_1 - c_1 + d_2) \end{cases}.$$

Caso R3. Considere a ligação difusiva linear bidireccional de dois sistemas de Rössler

$$(2.26) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 + \rho(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) + \rho(z_2 - z_1) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) + \rho(z_1 - z_2) \end{cases}$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Para qualquer valor de ρ , o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -e_y - e_z - 2\rho e_x \\ \dot{e}_y = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = e_x + (a - 2\rho)e_y \\ \dot{e}_z = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = z_2e_x + (x_1 - c - 2\rho)e_z \end{cases}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -2\rho e_x^2 + (z_2 - 1)e_x e_z + (a - 2\rho)e_y^2 + (x_1 - c - 2\rho)e_z^2 \\ &\leq -\rho e_x^2 + (a - \rho)e_y^2 + x_1 e_z^2 - (c + \rho)e_z^2 + z_2 |e_x e_z| - |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_1 e z_2 são limitadas, sejam K_x e K_z constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal é válida a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -2\rho e_x^2 + (a - 2\rho)e_y^2 + K_x e_z^2 - (c + 2\rho)e_z^2 + K_z |e_x e_z| - |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & \frac{1}{2}(1 - K_z) \\ 0 & 2\rho - a & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - K_z) & 0 & c + 2\rho - K_x \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em que $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$(2\rho - a) > 0 \quad \wedge \quad (2\rho - a) \left[\rho(c + 2\rho - K_x) - \frac{1}{4}(1 - K_z)^2 \right] > 0.$$

Como a desigualdade relativa a Δ_3 implica $2\rho - a > 0$ sempre que

$$8\rho(c + 2\rho - K_x) > (1 - K_z)^2,$$

pode concluir-se que a matriz $\mathbf{P}$ é definida positiva se

$$2\rho > a \quad \wedge \quad 8\rho(2\rho + c - K_x) > (1 - K_z)^2.$$

A condição $K_x > 0$ conduz a $8\rho(2\rho + c) > (1 - K_z)^2$. Pelo método directo de Lyapunov, $\mathbf{e} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que os parâmetros de controle a e c , a força de ligação ρ e as constantes positivas K_x e K_z verifiquem as desigualdades anteriores e os sistemas alcançam sincronização estável

Estabelece-se deste modo a seguinte condição suficiente para sincronização.

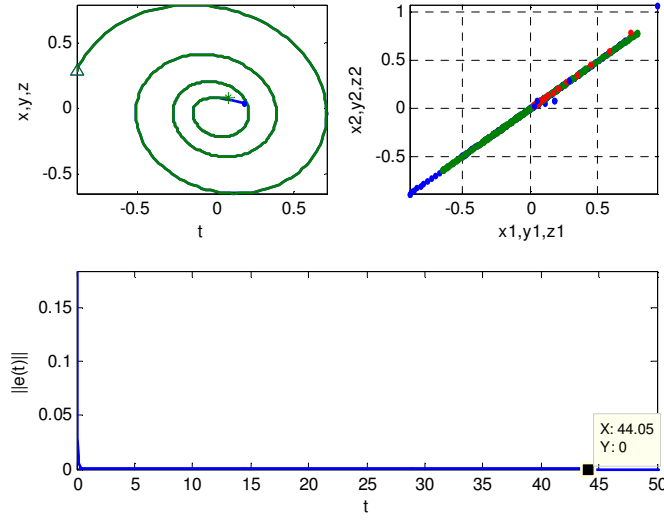


Figura 2.12: (a) Atrator do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

Proposição 2.3.2 *Dois sistemas de Rössler em ligação difusiva linear bidireccional (2.26) alcançam sincronização globalmente estável sempre que*

$$2\rho > a \quad \wedge \quad 8\rho(2\rho + c - K_x) > (1 - K_z)^2$$

onde K_x e K_y são constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$ e $|z_2| \leq K_z$.

A Figura 2.12 a, b e c, cujos gráficos foram obtidos com $\rho = 8$, mostra o estabelecido na Proposição 2.3.2. Como se pode observar, o erro de sincronização evolui rapidamente para zero.

Caso R4. Considere a ligação difusiva linear bidireccional de dois sistemas de Rössler

$$(2.27) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 + \rho(y_2 - y_1) \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) + \rho(z_2 - z_1) \end{cases} \quad \wedge \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 + \rho(y_1 - y_2) \\ \dot{z}_2 = b + z_2(\underline{x}_1 - c) + \rho(z_1 - z_2) \end{cases}$$

em que, simultaneamente, foi introduzida uma substituição parcial da variável x_2 por x_1 no termo não-linear z_2x_2 do sistema resposta.

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Para qualquer valor de ρ o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e_y - e_z - 2\rho e_x \\ e_x + (a - 2\rho) e_y \\ (x_1 - c - 2\rho) e_z \end{bmatrix}.$$

Considere a função de Lyapunov $L(\mathbf{e}) = (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)/2$ que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -2\rho e_x^2 - e_x e_z + (a - 2\rho) e_y^2 + (x_1 - c - 2\rho) e_z^2 \\ &\leq -2\rho e_x^2 + (a - 2\rho) e_y^2 + x_1 e_z^2 - (c + 2\rho) e_z^2 - |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que a função de variável real x_1 é limitada, seja K_x uma constante positiva tal que $|x_1| \leq K_x$. Como tal é válida a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -2\rho e_x^2 + (a - 2\rho) e_y^2 + K_x e_z^2 - (c + 2\rho) e_z^2 - |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & 0.5 \\ 0 & 2\rho - a & 0 \\ 0.5 & 0 & c + 2\rho - K_x \end{bmatrix}$$

deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$(2\rho - a) > 0 \quad \wedge \quad (2\rho - a) \left[2\rho(c + 2\rho - K_x) - \frac{1}{4} \right] > 0.$$

Como a desigualdade relativa a Δ_3 implica $2\rho - a > 0$ sempre que

$$8\rho(c + 2\rho - K_x) > 1,$$

pode concluir-se que a matriz $\mathbf{P}$ é definida positiva se

$$2\rho > a \quad \wedge \quad 8\rho(2\rho + c - K_x) > 1.$$

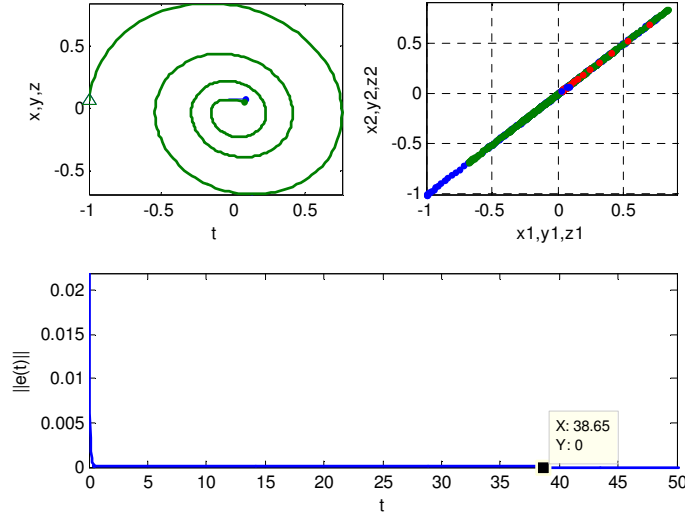


Figura 2.13: (a) Atractor do sistema ligado; (b) Variedade de sincronização; (c) Evolução do erro de sincronização

A condição $K_x > 0$ conduz a $8\rho(2\rho + c) > 1$. Pelo método directo de Lyapunov, $\mathbf{e} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que os parâmetros de controle a e c , a força de ligação ρ e as constantes positivas K_x verifiquem as desigualdades anteriores e os sistemas alcançam sincronização estável.

Estabelece-se deste modo a seguinte condição suficiente para sincronização estável.

Proposição 2.3.3 *Dois sistemas de Rössler em ligação difusiva linear bidireccional (2.27) alcançam sincronização globalmente estável sempre que*

$$2\rho > a \quad \wedge \quad 8\rho(2\rho + c - K_x) > 1$$

onde K_x é uma constante positiva tal que $|x_1| \leq K_x$.

A Figura 2.13 a, b e c, cujos gráficos foram obtidos com $\rho = 6$, mostra o estabelecido na Proposição 2.3.3. Observa-se uma rápida evolução do erro do erro de sincronização para zero.

Caso R5. Considere a ligação difusiva linear parcial bidireccional de dois sistemas de Rössler

$$(2.28) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -(y_1 + z_1) + \rho(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 = x_1 + ay_1 \\ \dot{z}_1 = b + z_1(x_1 - c) \end{cases} \wedge \begin{cases} \dot{x}_2 = -(y_2 + z_2) + \rho(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 = x_2 + ay_2 \\ \dot{z}_2 = b + z_2(x_2 - c) \end{cases}.$$

Considere as componentes $e_x = x_2 - x_1$, $e_y = y_2 - y_1$ e $e_z = z_2 - z_1$ do erro de sincronização $\mathbf{e}$. Para qualquer valor de ρ , o sistema transversal é definido pelas equações

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -e_y - e_z - 2\rho e_x \\ \dot{e}_y = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 = e_x + ae_y \\ \dot{e}_z = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = z_2 e_x + (x_1 - c) e_z \end{cases}.$$

Considere a função de Lyapunov

$$L(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)$$

que verifica $L(\mathbf{e}) > 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $L(\mathbf{0}) = 0$ para todo o ρ . Determine-se a força de ligação ρ tal que a derivada de L satisfaça $\dot{L}(\mathbf{e}) < 0$ se $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ e $\dot{L}(\mathbf{0}) = 0$. Substituindo as expressões de $\dot{e}_x$, $\dot{e}_y$ e $\dot{e}_z$ em

$$\dot{L}(\mathbf{e}) = e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + e_z \dot{e}_z$$

e simplificando, a derivada de L pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{L}(\mathbf{e}) &= -2\rho e_x^2 + (z_2 - 1) e_x e_z + ae_y^2 + (x_1 - c) e_z^2 \\ &\leq -2\rho e_x^2 + ae_y^2 + x_1 e_z^2 - ce_z^2 + z_2 |e_x e_z| - |e_x e_z|. \end{aligned}$$

Supondo que as funções de variável real x_1 e z_2 são limitadas, sejam K_x e K_z constantes positivas tais que $|x_1| \leq K_x$ e $|z_2| \leq K_z$. Como tal é válida a desigualdade

$$\dot{L}(\mathbf{e}) \leq -2\rho e_x^2 + ae_y^2 + K_x e_z^2 - ce_z^2 + K_z |e_x e_z| - |e_x e_z|.$$

Para que o sistema transversal seja assintoticamente estável na origem, a matriz simétrica constante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 & \frac{1}{2}(1 - K_z) \\ 0 & -a & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - K_z) & 0 & c - K_x \end{bmatrix}$$

associada à forma quadrática $-\|\mathbf{e}\|^T \cdot \mathbf{P} \cdot \|\mathbf{e}\|$, em $\|\mathbf{e}\| = (|e_x|, |e_y|, |e_z|)$, deve ser definida positiva. Os determinantes Δ_i , $i = 1, 2, 3$, das submatrizes principais de $\mathbf{P}$ são positivos se

$$-2a\rho > 0 \quad \wedge \quad -8a\rho(c - K_x) + a(1 - K_z)^2 > 0.$$

dado que a condição relativa a Δ_i é impossível, o método directo de Lyapunov não é conclusivo com esta escolha da função de Lyapunov.

Capítulo 3

Ligação assimétrica de sistemas dinâmicos discretos caóticos

O estudo de comportamento síncrono entre sistemas caóticos discretos ligados teve início com o trabalho de Kaneko [28] em meados dos anos 80.

Em modelação de sistemas reais é frequente a ligação de transformações idênticas com obtenção de um sistema ligado simétrico. Contudo existem muitos outros processos, como a transmissão e processamento de informação, que requerem a interacção de transformações por ligações assimétricas. Estas podem ser bidireccionais entre sistemas dinâmicos não-idênticos ou unidireccionais.

Quando se consideram sistemas não-idênticos, as transformações que os definem podem apenas diferir por pequenos desajustes paramétricos ou até corresponder a diferentes leis de evolução. Nestes casos, a sincronização traduz-se numa relação funcional entre eles que não é necessariamente a identidade de estados. Existe entre os sistemas uma dependência mais fraca que caracteriza a sincronização generalizada.

O conceito de sincronização generalizada diferenciável ([4],[77],[36],[23]) estende as noções características da sincronização idêntica. Embora apenas seja exigido que os estados dos sistemas componentes estejam funcionalmente relacionados, a diminuição da força de ligação pode conduzir facilmente à perda de estabilidade transversal do estado síncrono caótico. A função de sincronização pode tornar-se bastante complicada e iniciar-se o processo de perda de sincronização.

A variedade de sincronização pode ser facilmente identificada em sistemas ligados simétricos e, devido a essa simetria, persiste quando a força de ligação diminui. Tal não acontece em sistemas ligados sem simetria. A impossibilidade de centrar o estudo na dinâmica invariante da variedade de sincronização é um dos motivos pelos quais é ainda

pouco claro o modo como a perda de sincronização se manifesta qualitativa e quantitativamente em ligações assimétricas, mesmo entre transformações que diferem apenas por um desajuste paramétrico ligeiro. Uma abordagem alternativa ao estudo da variedade de sincronização foi apresentada por Barreto *et al.* [10], baseado na evolução da estrutura orbital periódica instável do sistema ligado quando a força de ligação diminui.

Ao longo deste capítulo é estudada a dinâmica de sistemas caóticos discretos bidimensionais obtidos por ligação assimétrica. Na Secção 3.1 apresentamos o estudo de uma ligação que surge de forma natural a partir da família de transformações quadráticas complexas analíticas $Z \mapsto \alpha - Z^2$. A decomposição em partes real e imaginária de cada transformação resulta num sistema bidireccionalmente ligado de duas transformações quadráticas reais unidimensionais com parâmetros de controle distintos. O termo de ligação obtido é proporcional ao quadrado da diferença entre as variáveis dinâmicas dos sistemas componentes. Tanto quanto sabemos, esta ligação não foi até agora objecto de estudo. Com o objectivo de otimizar os resultados obtidos para esta ligação, também aplicamos ao sistema ligado uma técnica de controle, que estende o conhecido método de controle de caos de Ott-Grebog-Yorke (OGY) [51], através de uma pequena perturbação do parâmetro de ligação. Para evidenciar as desvantagens da ausência de simetria no sistema ligado, analisamos na Secção 3.2 o caso particular de sistemas idênticos bidireccionalmente ligados que, ao que sabemos, também não foi ainda estudada. Nas Secções 3.3 e 3.4 consideramos a generalização desta ligação assimétrica ao uso de dois parâmetros de ligação diferentes, entre transformações idênticas e não-idênticas, respectivamente. Finalmente, na Secção 3.5, estudamos a configuração unidireccional respectiva. As abordagens computacionais apresentadas são confirmadas pelo estudo analítico efectuado.

Todos os resultados apresentados nesta primeira secção têm por base o modelo unidimensional fornecido pela família de transformações quadráticas $f(x; a) = a - x^2$, onde a é o parâmetro real de controle. Esta família, cujo comportamento dinâmico tem sido intensamente estudado na ausência de ligação, é um exemplo típico no estudo de transformações não-lineares e, em particular, de sistemas cuja dinâmica evolui para comportamento caótico através de uma cascata de bifurcações de duplicação de período por variação do parâmetro de controle a .

A análise da estabilidade da sincronização baseia-se no cálculo dos valores próprios da equação linearizada do sistema transversal e na estimação dos correspondentes expoentes de Lyapunov transversais. Para algumas das ligações são obtidas condições simples que garantem estabilidade transversal do estado sincrónico caótico.

3.1 Ligação obtida da transformação quadrática complexa

Considere a família de transformações quadráticas complexas analíticas¹

$$(3.1) \quad Z_{n+1} = \alpha - Z_n^2, \quad Z, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Efectue-se a decomposição de (3.1) em partes real e imaginária. Designando $Z = X + Yi$ e $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, tem-se

$$Z_{n+1} = X_{n+1} + Y_{n+1}i = \alpha_1 + \alpha_2 i - X_n^2 + Y_n^2 - 2X_n Y_n i,$$

pelo que

$$(3.2) \quad \begin{cases} X_{n+1} = \alpha_1 - X_n^2 + Y_n^2 \\ Y_{n+1} = \alpha_2 - 2X_n Y_n. \end{cases}$$

Conforme Isaeva *et al.* [25], as mudanças de variáveis

$$(3.3) \quad x = X + \beta Y \quad \text{e} \quad y = X - \beta Y$$

e de parâmetros

$$(3.4) \quad a = \alpha_1 + \beta \alpha_2 \quad \text{e} \quad b = \alpha_1 - \beta \alpha_2,$$

onde $\beta \neq 0$ é uma constante arbitrária, transformam o sistema de equações (3.2) num sistema de duas transformações quadráticas reais ligadas. De facto, resulta de (3.3) e (3.4) que $X = (x + y)/2$, $Y = (x - y)/2\beta$, $\alpha_1 = (a + b)/2$ e $\alpha_2 = (a - b)/2\beta$, pelo que o sistema (3.2) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{\beta^2 - 1}{4\beta^2}\right) x_n^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\beta^2}\right) y_n^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta^2}\right) x_n y_n + a \\ y_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4\beta^2}\right) x_n^2 + \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{\beta^2 - 1}{4\beta^2}\right) y_n^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta^2}\right) x_n y_n + b \end{cases}.$$

A este sistema equivale a forma simplificada

$$(3.5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho (x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = b - y_n^2 + \rho (x_n - y_n)^2 \end{cases}$$

em que $\rho = (1 + \beta^2)/4\beta^2$. Considere (3.5) como o sistema ligado das transformações quadráticas unidimensionais $f(x; a) = a - x^2$ e $g(y; b) = b - y^2$ nas variáveis dinâmicas

¹O conjunto de valores paramétricos α para os quais as iterações do ponto crítico $z = 0$ não convergem para infinito é o conjunto Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos [14].

reais x e y , respectivamente, em que ρ tem o papel de parâmetro de ligação. Para qualquer escolha de $\beta \neq 0$ o parâmetro de ligação ρ é positivo e superior a $1/4$. No entanto, motivados pelas observações em [25] relativas a números complexos generalizados, é admissível considerar ρ a tomar valores reais quaisquer.

Excepto no caso particular em que $a = b$, tem-se em (3.5) uma ligação assimétrica resultante do desajuste entre os parâmetros de controle a e b . Tendo como objectivo a sincronização de caos, a e b são tomados na região paramétrica onde a dinâmica das transformações quadráticas é caótica.

Ao contrário do que é usual em configuração bidireccional, o termo de ligação é o mesmo em cada subsistema. Sendo proporcional ao quadrado da diferença entre as variáveis dinâmicas, o termo de ligação admite o termo misto $-2x_n y_n$, o que não se verifica na ligação usual por termos quadráticos ou na ligação dissipativa externa generalizada. Atendendo à presença de um termo misto, pode considerar-se que esta ligação apresenta algumas semelhanças estruturais com a ligação dissipativa interna generalizada.

Até ao final deste capítulo, o parâmetro de controle a é considerado superior ao ponto de Misiurewicz $a^* \simeq 1.565$ (Fig. 3.1), garantindo comportamento caótico das transformações que se ligam, e alguns dos valores paramétricos escolhidos para concretizar o estudo analítico são motivados pela abordagem computacional que só é apresentada posteriormente. Até ao final deste capítulo os valores numéricos são apresentados apenas com quatro casas decimais, embora os cálculos tenham sido efectuados com dez. Os valores numéricos são apresentados apenas com quatro casas decimais.

3.1.1 Análise da dinâmica do sistema ligado

O sistema ligado (3.5) corresponde à equação às diferenças $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$, onde $\mathbf{F}$ é a transformação bidimensional definida por

$$(3.6) \quad \mathbf{F}(x, y) = \left(a - x^2 + \rho(x - y)^2, b - y^2 + \rho(x - y)^2 \right).$$

Considere a ligação bidireccional em (3.5) com valores paramétricos $a = 1.87$ e $b = 1.97$ superiores a a^* .

Os pontos fixos de (3.5) são as soluções da equação $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, a qual é equivalente a

$$\begin{cases} 1.87 + (2\rho - 1)w^2 + 0.25 + 0.1\rho = \pm 2\rho w\sqrt{w^2 + 0.1} \\ y = -0.5 \pm \sqrt{w^2 + 0.1}, \end{cases}$$

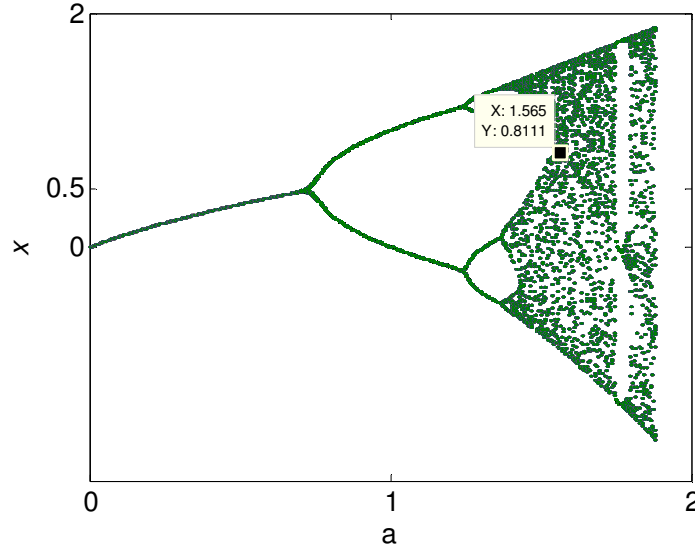


Figura 3.1: Diagrama de bifurcação da transformação quadrática $f(x) = a - x^2$

com $w \equiv x + 1/2$. Tem-se então o sistema

$$\begin{cases} (1 - 4\rho)w^4 + (4.0538\rho - 4.24)w^2 + (2.12 + 0.1\rho)^2 = 0 \\ y = -0.5 \pm \sqrt{w^2 + 0.1} \end{cases}$$

nas variáveis w^2 e y , donde se conclui que, para $\rho \neq 1/4$, w^2 pode tomar qualquer uma das expressões

$$w^2 = A + \frac{B}{4} \pm \left[\left(A + \frac{B}{4} \right)^2 + \frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} \right]^{1/2},$$

com $A \equiv (1.87 - 3.64\rho) / (1 - 4\rho)$ e $B \equiv (1 - 2\rho) / (1 - 4\rho)$. Excluindo as soluções resultantes de elevar ao quadrado, conclui-se que as coordenadas x e y dos quatro pontos fixos de (3.5) são obtidas das expressões

$$x_{\pm, \pm} = -\frac{1}{2} \pm \left[A + \frac{B}{4} \pm \left(\frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} + \left(A + \frac{B}{4} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

e

$$y_{\pm, \pm} = -\frac{1}{2} \pm \left[0.1 + A + \frac{B}{4} \pm \left(\frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} + \left(A + \frac{B}{4} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

Por outro lado, se (x, y) é ponto fixo de (3.5) então também $(-x-1, -y-1)$ o é. De facto, se $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ tem-se $\mathbf{F}(-x-1, -y-1)$ dada por

$$\begin{aligned} & \left(1.87 - (-x-1)^2 + \rho(-x+y)^2, 1.97 - (-y-1)^2 + \rho(-x+y)^2 \right) \\ = & \left(1.87 - x^2 + \rho(x-y)^2 - 2x - 1, 1.97 - y^2 + \rho(x-y)^2 - 2y - 1 \right) \\ = & (x - 2x - 1, y - 2y - 1) = (-x - 1, -y - 1). \end{aligned}$$

Para $\rho = 1/4$ os pontos fixos de (3.5) são $(-1.9561, -1.9900)$ e $(0.9561, 0.9900)$.

Há que verificar a boa definição destes pontos fixos como números reais. Sempre que a abcissa está bem definida como número real, o mesmo acontece com a ordenada. Se $4\rho - 1 > 0$ apenas há que exigir a desigualdade

$$(3.7) \quad \mp \left(\frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} + \frac{(8.48 - 16.56\rho)^2}{16(1 - 4\rho)^2} \right)^{1/2} \leq A + \frac{B}{4} = \frac{8.48 - 16.56\rho}{4(1 - 4\rho)}.$$

Se $8.48 - 16.56\rho < 0$, ou seja, $\rho > 8.48/16.56 = 0.5120772$, esta condição apenas é verificada pelas abcissas $x_{+, \pm}$. O mesmo se verifica se $\rho = 8.48/16.56$ e se $1/4 < \rho < 8.48/16.56$. Conclui-se então que para $\rho > 1/4$ o sistema (3.5) tem apenas os pontos de abcissas $x_{+, \pm}$ como pontos fixos. Se $4\rho - 1 < 0$ há que exigir, além de (3.7), também a desigualdade

$$\frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} + \frac{(8.48 - 16.56\rho)^2}{16(1 - 4\rho)^2} \geq 0.$$

Esta condição é verificada sempre que $\rho \geq -301.2096/0.64 = -470.64$. Há que analisar então a condição (3.7) nesta variação paramétrica. Como $\rho < 1/4 < 8.48/16.56$, tem-se $8.48 - 16.56\rho > 0$, pelo que o lado direito de (3.7) é positivo. A condição (3.7) é verificada para $x_{+, \pm}$ e, para $x_{-, \pm}$, é equivalente a $4\rho - 1 < 0$. Como tal, ela é verificada para qualquer das abcissas $x_{\pm, \pm}$. Conclui-se então que para $-470.64 \leq \rho < 1/4$ o sistema (3.5) tem os pontos de abcissa $x_{\pm, \pm}$ como pontos fixos. Para $\rho < -470.64$ o sistema não tem pontos fixos. Por exemplo, para $\rho = -0.39 < 1/4$ os pontos fixos obtidos são

$$\begin{aligned} P_1(x_{-, -}, y_{+, -}) &= (-1.3933, 0.4476) \\ P_2(x_{+, +}, y_{+, +}) &= (0.9558, 0.9898) \\ P_3(x_{-, +}, y_{-, +}) &= (-1.9558, -1.9898) \\ P_4(x_{+, -}, y_{-, -}) &= (0.3933, -1.4476). \end{aligned}$$

Para $\rho = 0.39 > 1/4$ os pontos fixos obtidos são apenas

$$P'_1(x_{+, +}, y_{+, +}) = (0.9561, 0.9901)$$

e

$$P'_2(-x_{+,+} - 1, -y_{+,+} - 1) = (-1.9561, -1.9901).$$

A estabilidade dos pontos fixos pode ser determinada pelo estudo dos valores próprios da matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$

$$(3.8) \quad D\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 2\rho(x - y) - 2x & 2\rho(y - x) \\ 2\rho(x - y) & -2y - 2\rho(x - y) \end{bmatrix}.$$

As expressões gerais dos valores próprios,

$$(3.9) \quad \Lambda_{\pm} = -x - y \pm (x^2 + y^2 - 2xy - 4\rho x^2 + 8\rho xy - 4\rho y^2)^{1/2},$$

mostram que estes não dependem dos valores tomados para a e b mas apenas de ρ . Seja

$$C \equiv \left(\frac{(8.48 + 0.4\rho)^2}{16(4\rho - 1)} + \left(A + \frac{B}{4} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Designe as expressões

$$1 \pm 2 \left(A + \frac{B}{4} - C \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{10} + A + \frac{B}{4} - C \right)^{1/2} \pm \frac{1}{2}$$

por $G_{\pm}$ e $H_{\pm}$, respectivamente. Designe ainda as expressões

$$1 \pm 2 \left(A + \frac{B}{4} + C \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{10} + A + \frac{B}{4} + C \right)^{1/2} \pm \frac{1}{2}$$

por $J_{\pm}$ e $K_{\pm}$, respectivamente. Considere os pontos fixos

$$P'_1(x_{-,-}, y_{+,-}), \quad P'_2(x_{+,+}, y_{+,+}), \quad P'_3(x_{-,+}, y_{-,+}) \quad \text{e} \quad P'_4(x_{+,-}, y_{-,-})$$

para as variações paramétricas em que estes existem, P_1 e P_3 para $\rho < 1/4$ e P_2 e P_4 para $\rho \neq 1/4$. Os valores próprios para cada um destes pontos, obtidos de (3.9) são os que constam da Tabela 3.1.

Pontos fixos	Valores Próprios
$P_1(-G_+/2, H_-)$	$\frac{G_+}{2} - H_- \pm \left[(1 - 4\rho) \left[\left(H_- + \frac{G_+}{4} \right) G_+ + H_-^2 \right] \right]^{1/2}$
$P_2(-J_-/2, K_-)$	$\frac{J_-}{2} - K_- \pm \left[(1 - 4\rho) \left[\left(\frac{J_-}{4} + K_- \right) J_- + K_-^2 \right] \right]^{1/2}$
$P_3(J_+/2, -K_+)$	$K_+ + \frac{J_+}{2} \pm \left[(1 - 4\rho) \left[\left(\frac{J_+}{4} - K_+ \right) J_+ + K_+^2 \right] \right]^{1/2}$
$P_4(-G_-/2, -H_+)$	$H_+ + \frac{G_-}{2} \pm \left[(4\rho - 1) \left[\left(H_+ - \frac{G_-}{4} \right) G_- - H_+^2 \right] \right]^{1/2}$

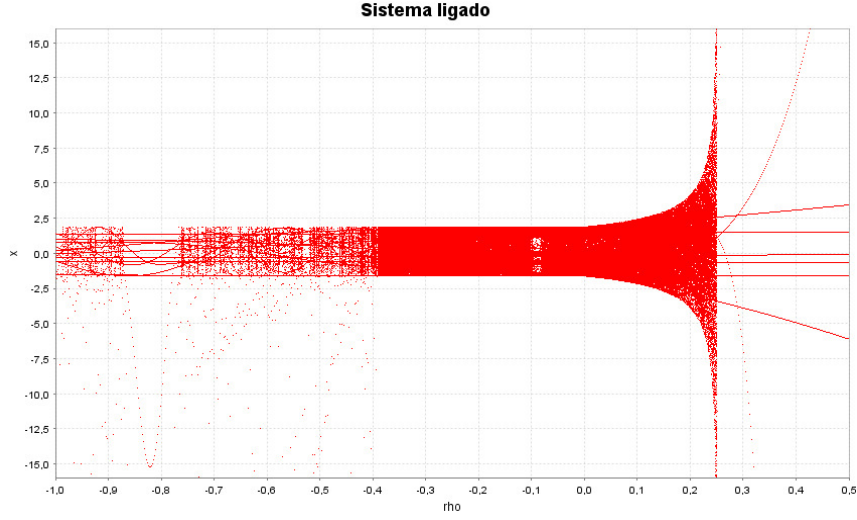


Figura 3.2: Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.5) para $\rho \in [-1.0, 0.5]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$

Tabela 3.1: Valores próprios relativos aos pontos fixos do sistema ligado

A partir dos pontos fixos e valores próprios da Tabela 3.1, substituindo para diferentes valores de ρ , obtem-se toda a dinâmica do sistema ligado (3.5). O diagrama de bifurcação (Fig. 3.2) permite visualizar o comportamento global do sistema (3.5) quando o parâmetro ρ varia. São visíveis janelas de regularidade (órbitas periódicas estáveis) assim como regiões de comportamento quase-periódico e de comportamento caótico.

3.1.2 Estabilidade local da sincronização

A diferença $y - x$ para o sistema ligado (3.5) evolui pela equação às diferenças

$$y_{n+1} - x_{n+1} = b - a + x_n^2 - y_n^2$$

que não depende da força de ligação ρ .

Com vista a estudar a estabilidade transversal do atrator caótico $\mathcal{A}$ do sistema ligado (3.5), considere novas variáveis

$$(3.10) \quad u = \frac{1}{2}(x + y) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{2}(y - x)$$

que definem, respectivamente, a direcção de sincronização e a direcção transversal a esta.

Obtem-se então $x = (u - v) / 2$ e $y = (u + v) / 2$ e (3.5) é reescrito como

$$\begin{cases} u_{n+1} = a + b - \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2) + 2\rho v_n^2 \\ v_{n+1} = b - a - u_n v_n. \end{cases}$$

Para $a = 1.87$ e $b = 1.97$ tem-se o sistema transversal

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3.84 - 0.5 (u_n^2 + v_n^2) + 2\rho v_n^2 \\ v_{n+1} = 0.1 - u_n v_n. \end{cases}$$

Os pontos fixos do sistema transversal, as soluções de

$$\begin{cases} 3.84 - 0.5 (u^2 + v^2) + 2\rho v^2 = u \\ 0.1 - uv = v, \end{cases}$$

são $P'_1(u, v)$ de coordenadas

$$v = \left[\frac{4.34}{1 - 4\rho} + \left(\frac{18.8356}{(1 - 4\rho)^2} + \frac{0.01}{4\rho - 1} \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{10v} - 1,$$

e $P'_2(-0.1/v - 1, -v)$ (obtido das mesmas coordenadas), que estão definidos como números reais para $\rho > 1/4$ e para $-470.64 \leq \rho < 1/4$. Para $\rho = 1/4$ os pontos fixos são $(-3.9461, -0.3394)$ e $(1.9461, 0.3394)$.

A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(u, v) = \begin{bmatrix} -u & -v + 4\rho v \\ -v & -u \end{bmatrix}$$

da transformação bidimensional

$$\mathbf{G}(u, v) = \left(3.84 - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) + 2\rho v^2, 0.1 - uv \right),$$

definida pelo sistema transversal, tem por valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = -u \pm \sqrt{v^2 (1 - 4\rho)}.$$

Se $\rho < 1/4$ os valores próprios são números reais. O ponto fixo $P'_1(u, v)$ é instável pois a condição

$$|\Lambda_+| = \left| -u - \sqrt{v^2 (1 - 4\rho)} \right| < 1,$$

equivalente a

$$0 < 0.1/v + \sqrt{v^2 (1 - 4\rho)} < 2,$$

é impossível. De facto, a desigualdade

$$0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} > 0,$$

equivalente a $\sqrt{1-4\rho} > -0.1/(|v|v) = -0.1/v^2$ ($v > 0$) nunca é verificada. Assim, pelo menos um dos valores próprios relativos tem módulo superior ou igual a 1. O ponto fixo $P'_2(-0.1/v - 1, -v)$ é instável pois a condição

$$|\Lambda_+| = \left| -u + \sqrt{v^2(1-4\rho)} \right| < 1,$$

equivalente a

$$-2 < \frac{1}{10v} + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 0,$$

tem $0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 0$ como condição impossível ($v > 0$). Como tal, pelo menos um dos valores próprios tem módulo superior ou igual a 1. Se $\rho > 1/4$ os valores próprios são números complexos. Para qualquer um dos pontos fixos a expressão $v^2(1-4\rho)$ traduz-se em $4.34 + (18.8256 + 0.04\rho)^{1/2}$. Dado que $\rho > 1/4$ tem-se

$$\sqrt{v^2(1-4\rho)} = \sqrt{4.34 + (18.8256 + 0.04\rho)^{1/2}} > 2.9461.$$

Para $P'_1(u, v)$ a condição

$$|\Lambda_+| = \left| -u - \sqrt{v^2(1-4\rho)} \right| < 1,$$

equivalente a

$$0 < 0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 2,$$

é impossível. De facto a desigualdade $0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 2$ nunca é verificada ($v > 0$).

Para $P'_2(-0.1/v - 1, -v)$ a condição

$$|\Lambda_+| = \left| -u + \sqrt{v^2(1-4\rho)} \right| < 1,$$

equivalente a

$$-2 < 0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 0,$$

é impossível. De facto a desigualdade $0.1/v + \sqrt{v^2(1-4\rho)} < 0$ nunca é verificada ($v > 0$). Assim, pelo menos um dos valores próprios relativos a cada ponto fixo tem módulo superior ou igual a 1.

A Tabela 3.2 apresenta os pontos fixos do sistema transversal, P'_1 e P'_2 , e os respectivos valores próprios para o parâmetro de controle $\rho = -470.64$ e $\rho = 0.25$.

$P'_i(u, v), \Lambda_{\pm}^{P'_i}$	$\rho = -470.64$	$\rho = 0.25$
$P'_1(0.1/v - 1, v)$	(1.0832, 0.4800)	(1.9799, 0)
$P'_2(-0.1/v - 1, -v)$	(-3.0832, -0.4800)	(-3.9799, 0)
$\Lambda_+^{P'_1}$	3.2567	-1.9799
$\Lambda_-^{P'_1}$	-5.4232	-1.9799
$\Lambda_+^{P'_2}$	7.4232	3.9799
$\Lambda_-^{P'_2}$	-1.2567	3.9799

Tabela 3.2: Pontos fixos $P'_i(u, v)$ e valores próprios $\Lambda_{\pm}^{P'_i}$ para $i = 1, 2$

A não existência de pontos fixos estáveis no sistema transversal implica que não é esperada sincronização localmente estável dos sistemas pela ligação em (3.5).

Por outro lado, o sinal do expoente de Lyapunov transversal determina a estabilidade da sincronização. Se $\lambda_v < 0$ as oscilações síncronas são transversalmente estáveis e se $\lambda_v > 0$ as oscilações síncronas são transversalmente instáveis. Verifica-se que o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é positivo (Fig. 3.3). Para obtenção da Figura 3.3 tomaram-se $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$. Como tal não é alcançada sincronização estável para estas forças de ligação.

3.1.3 Abordagem computacional

Considere no sistema ligado (3.5) os parâmetros de controle $a = 1.87$ e $b = 1.97$.

A abordagem computacional efectuada para os diferentes valores de ρ , em passo de uma décima, a partir de condições iniciais $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$ ($N = 2000$ iterações), mostra que não é alcançada sincronização. Observa-se ainda que, além da não existirem valores de ρ para os quais a diferença $y - x$ entre as variáveis tende para 0, esta diferença não fica sequer restringida a um intervalo de amplitude inferior a 1. Como tal, também não é alcançada sincronização prática no sentido de Kapitaniak.

No entanto, sempre que $\rho \in [-0.39, 0.24]$ a diferença $y - x$ fica restringida a um intervalo limitado (considerando o passo de uma centésima). Tem-se então a nota seguinte.

Nota 1 Para cada $\rho \in [-0.39, 0.24]$ existe um intervalo limitado $I_e(\rho)$ de variação da diferença $y - x$. Não é alcançada sincronização prática pois a amplitude do intervalo

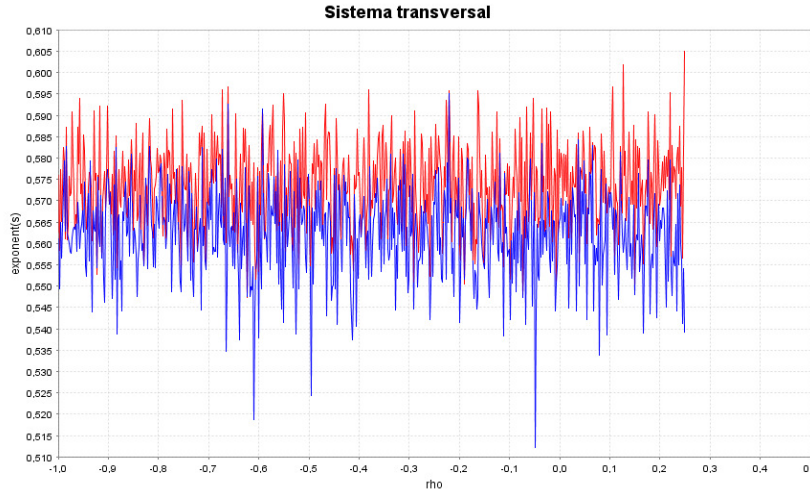


Figura 3.3: Exponentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ para $\rho \in [-1.0, 0.5]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$

$I_e(\rho)$, que aumenta quando ρ aumenta, é superior a 1 (entre 4.59 e 36.78) para todo o $\rho \in [-0.39, 0.24]$. Se $\rho = -0.39$ então a diferença $y - x$ varia no intervalo $I_e(-0.39) =]-2.40, 2.19[$ de menor amplitude, 4.59, mas não há evidência de estabilização (Fig. 3.4 a,b).

Em $\rho = -0.40$ e $\rho = 0.25$ a diferença $y - x$ explode para infinito.

Considere o gráfico dos expoentes de Lyapunov de (3.5) em função de ρ obtido com as condições iniciais acima indicadas e $N = 500$ iterações (Fig. 3.5). Os expoentes de Lyapunov de um sistema são uma medida dinâmica de caos que mede a separação das órbitas de condições iniciais próximas quando este evolui. Observa-se a existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, característico de comportamento caótico. Além disso, considerando ρ a tomar valores num intervalo que contem $[-0.39, 0.24]$, o gráfico apenas apresenta valores (significativos) para ρ neste intervalo. Isto confirma o estabelecido na Nota 1, o intervalo de valores de ρ para o qual existe um intervalo limitado $I_e(\rho)$ de variação da diferença $y - x$.

O estabelecido na Nota 1 também é evidenciado pelo diagrama de bifurcação em função de ρ (Fig. 3.2) para as mesmas condições iniciais e número de iterações. Observa-se uma mudança significativa no diagrama quando os valores de ρ se situam no intervalo $[-0.39, 0.24]$.

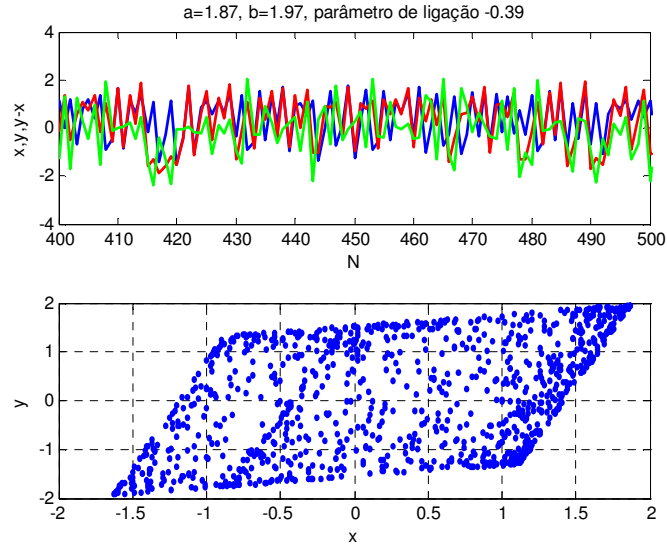


Figura 3.4: Ligação bidireccional em (3.5): (a) séries temporais, (b) atrator caótico

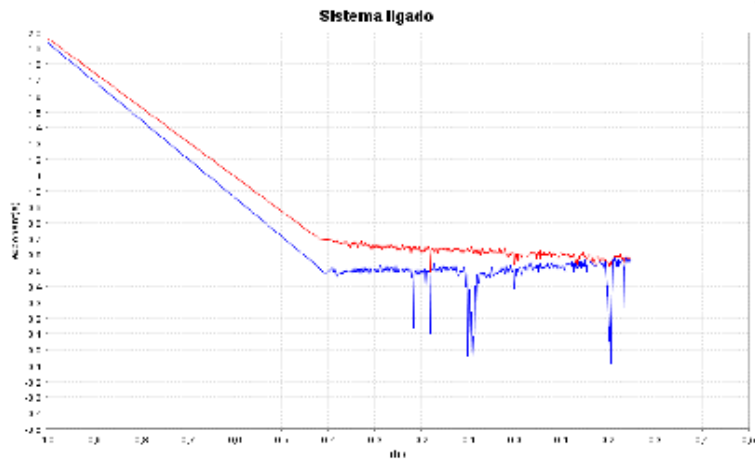


Figura 3.5: Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.5) versus ρ para $\rho \in [-1.0, 0.5] \supset [-0.39, 0.24]$ com $a = 1.87$ e $b = 1.97$

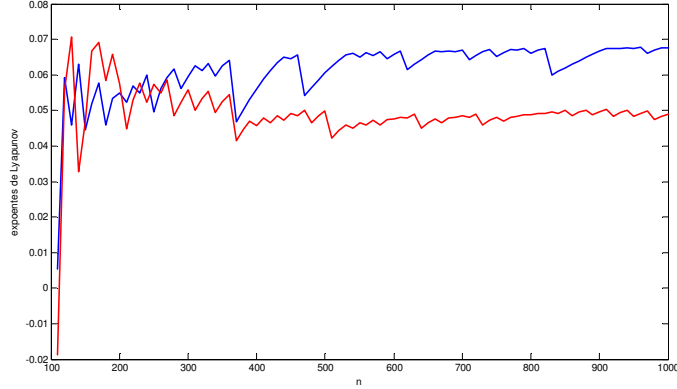


Figura 3.6: Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.5) para $a = 1.87$, $b = 1.97$ e $\rho = -0.39$

3.1.4 Sincronização por controle de caos

Considere em (3.5) os parâmetros de controle $a = 1.87$ e $b = 1.97$. Conforme a Nota 1, para $\rho = -0.39$ é obtido o intervalo $I_e(-0.39) =]-2.40, 2.19[$ de variação da diferença $y - x$ de amplitude minimal. Como se pode visualizar pela Figura 3.4a, as séries temporais de (3.5) revelam comportamento caótico para os valores paramétricos em causa. Para reforçar esta observação, consideram-se os expoentes de Lyapunov para o atrator caótico $\mathcal{A}$ de (Fig. 3.4b) com $\rho = -0.39$, e confirma-se que se tornam positivos a partir de certo número de iterações (Fig. 3.6).

Fixados os valores paramétricos acima indicados, aplique-se então a (3.5) uma adaptação da técnica de controle colocação dos pólos desenvolvida por Romeiras *et al.* [72], que estende o método de controle de caos OGY [51], com o objectivo de diminuir a diferença $y - x$ e obter sincronização. A dependência sensível às condições iniciais que caracteriza os sistemas caóticos permite que tal seja possível sem alterar a natureza do sistema controlado (3.5). Considera-se a estabilização de um ponto fixo instável mergulhado no atrator caótico $\mathcal{A}$, aplicando pequenas perturbações temporais adequadamente escolhidas num parâmetro acessível do sistema ligado (3.5), de modo que a órbita caótica correspondente a esse ponto seja convertida numa órbita estável contida em $\mathcal{A}$ (Fig. 3.4b).

Apresentam-se na Tabela 3.3 os pontos fixos de (3.5), e os respectivos valores próprios,

quando $\rho = -0.39$.

P_i	Λ_1	Λ_2
$P_1 (-1.3933, 0.4476)$	3.8913	-2.0000
$P_2 (0.9558, 0.9898)$	-1.8913	-2.0000
$P_3 (-1.9558, -1.9898)$	4.0000	3.8913
$P_4 (0.3933, -1.4476)$	3.9999	-1.8913

Tabela 3.3: Pontos fixos P_i , $i = 1, \dots, 4$, e respectivos valores próprios

Todos os pontos fixos são instáveis dado que os respectivos valores próprios têm módulo superior a 1.

Considere no procedimento de controle a estabilização do ponto fixo instável P_2 de coordenadas $(x_*, y_*) = (0.9558, 0.9898)$. Dos quatro pontos fixos, apenas P_3 não é significativo por não conduzir ao atractor caótico $\mathcal{A}$ (Fig. 3.4b). Como parâmetro de controle de caos, usa-se a força de ligação ρ , considerando que esta é acessível a pequenos ajustes externos, embora restringida a tomar valores num intervalo de pequena amplitude δ em torno de $\rho_0 = -0.39$,

$$|\rho - \rho_0| = |\rho + 0.39| < \delta, \quad \delta > 0.$$

Como se expõe de seguida, é possível encontrar uma lei de controle *feedback* local estabilizadora, definida numa vizinhança V da órbita estável desejada, considerando a aproximação de primeira ordem de (3.5) na órbita do ponto fixo instável P_2 escolhido. Logo que a órbita de P_2 esteja na vizinhança V , o que é garantido pela natureza ergódica da dinâmica caótica de (3.5), é aplicada essa lei com o objectivo de a dirigir para uma órbita estável.

A transformação $\mathbf{F}$ definida em (3.6) pode ser aproximada na vizinhança do ponto fixo P_2 pela transformação linear

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} - x_* \\ y_{n+1} - y_* \end{bmatrix} \simeq D\mathbf{F}(x_*, y_*) \cdot \begin{bmatrix} x_n - x_* \\ y_n - y_* \end{bmatrix} + \mathbf{A} \cdot [\rho - \rho_0]$$

onde $\mathbf{A}$ é a matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$ relativamente ao parâmetro de controle ρ também calculada no ponto P_2 e para o valor nominal -0.39 . Tem-se então

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} - 0.9558 \\ y_{n+1} - 0.9898 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} -1.8852 & -0.0264 \\ 0.0264 & -2.0061 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n - 0.9558 \\ y_n - 0.9898 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0011 \end{bmatrix} \cdot [\rho - \rho_0].$$

Há que verificar se o sistema é controlável. Um sistema dinâmico de dimensão n é controlável se existe uma matriz $\mathbf{H}$ de ordem $1 \times n$ tal que $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$ tem valores próprios arbitrários em função de $\mathbf{H}$. Tal é possível se $\text{rank}(\mathbf{C}) = n$ com

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{A} : D\mathbf{F}(x_*, y_*) \cdot \mathbf{A} : [D\mathbf{F}(x_*, y_*)]^2 \cdot \mathbf{A} : \dots : [D\mathbf{F}(x_*, y_*)]^{n-1} \cdot \mathbf{A} \right].$$

A matriz $\mathbf{C}$ diz-se a matriz de controlabilidade. Neste caso tem-se

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A} : D\mathbf{F}(x_*, y_*) \cdot \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0.0011 & -0.0022 \\ 0.0011 & -0.0022 \end{bmatrix}$$

de característica 2, logo o sistema é controlável.

Assumindo uma lei de controle *feedback* linear para o parâmetro ρ da forma

$$(3.11) \quad [\rho - \rho_0] = -\mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix} x_n - x_* \\ y_n - y_* \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{H} \equiv \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix}$ de ordem 1×2 , então a transformação linear vem dada por

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} - x_* \\ y_{n+1} - y_* \end{bmatrix} \simeq [D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}] \cdot \begin{bmatrix} x_n - x_* \\ y_n - y_* \end{bmatrix}.$$

Sendo

$$\mathbf{A}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0011 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0011h_1 & 0.0011h_2 \\ 0.0011h_1 & 0.0011h_2 \end{bmatrix},$$

tem-se então

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_{n+1} - 0.9558 \\ y_{n+1} - 0.9898 \end{bmatrix} \\ & \simeq \begin{bmatrix} -1.8852 - 0.0011h_1 & -0.0264 - 0.0011h_2 \\ 0.0264 - 0.0011h_1 & -2.0061 - 0.0011h_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n - 0.9558 \\ y_n - 0.9898 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isto mostra que o ponto fixo é estável desde que a matriz $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$ seja assintoticamente estável, ou seja, desde que todos os seus valores próprios tenham módulo inferior a 1. Os valores próprios $\Lambda'_{1,2}$ da matriz $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$ dizem-se os pólos regulares e o problema de colocar estes pólos na localização desejada, escolhendo a matriz $\mathbf{H}$ a partir das matrizes $D\mathbf{F}(x_*, y_*)$ e $\mathbf{A}$ dadas, diz-se o problema de colocação dos pólos. Se a matriz de controlabilidade $\mathbf{C}$ tem característica 2 então este problema tem uma solução única. A solução é dada por

$$(3.12) \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}^{-1}$$

onde β_1 e β_2 são os coeficientes do polinómio característico de $D\mathbf{F}(x_*, y_*)$, α_1 e α_2 são os coeficientes do polinómio característico desejado de $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$ e $\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{W}$ com

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De

$$\begin{aligned} \text{Det}[D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \Lambda \mathbf{I}_2] &= \Lambda^2 + \beta_1 \Lambda + \beta_2 \\ &= \Lambda^2 + 3.8913\Lambda + 3.7827 \end{aligned}$$

obtem-se

$$\beta_1 = -(\Lambda_1 + \Lambda_2) = 3.8913 \quad \text{e} \quad \beta_2 = \Lambda_1 \Lambda_2 = 3.7827,$$

onde Λ_1 e Λ_2 são os valores próprios da matriz $D\mathbf{F}(x_*, y_*)$. Como tal

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3.8913 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, de

$$\text{Det}[D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H} - \Lambda' \mathbf{I}_2] = (\Lambda')^2 + \alpha_1 \Lambda' + \alpha_2$$

tem-se

$$\alpha_1 = -(\Lambda'_1 + \Lambda'_2) \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \Lambda'_1 \Lambda'_2,$$

onde Λ'_1 e Λ'_2 são os valores próprios da matriz $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$.

Dado que a inversa de

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0.0011 & -0.0022 \\ 0.0011 & -0.0022 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.8913 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0022 & 0.0011 \\ 0.0022 & 0.0011 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -11903.2868 & -12779.9197 \\ -24431.8230 & 25299.5280 \end{bmatrix}.$$

a equação (3.12) vem como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Lambda'_1 \Lambda'_2 - 3.7827 & -\Lambda'_1 - \Lambda'_2 - 3.8913 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11903.2868 & -12779.9197 \\ -24431.8230 & 25299.5280 \end{bmatrix}.$$

Como tal os elementos h_1 e h_2 da matriz $\mathbf{H}$ são

$$h_1 = -11903.2868\Lambda'_1\Lambda'_2 + 24431.8230(\Lambda'_1 + \Lambda'_2) + 140100.1318$$

e

$$h_2 = -12779.9197\Lambda'_1\Lambda'_2 - 25299.5280(\Lambda'_1 + \Lambda'_2) - 50106.7117.$$

Visto que o sistema ligado (3.5) é não-linear, a aplicação de controle apenas é bem sucedida numa vizinhança V suficientemente pequena em torno do ponto fixo P_2 . Designe-se por $\mathbf{B}$ a matriz produto de $\mathbf{H}$ pela transposta de $\begin{bmatrix} x_{n+1} - x_* & y_{n+1} - y_* \end{bmatrix}$. Atendendo ao desvio máximo δ permitido a partir de $\rho_0 = -0.39$ e à equação (3.11), tem-se

$$S_{\mathbf{H}} = \{(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \mathbf{B} \leq \delta\}$$

como o domínio no qual se aplica (ao qual está restringido) o controle. O domínio $S_{\mathbf{H}}$ define uma faixa, de largura $2\delta/\det \mathbf{B}$, de pontos (x_n, y_n) para os quais se activa a lei de controle (3.11), enquanto para pontos (x_n, y_n) fora de $S_{\mathbf{H}}$ o parâmetro de controle ρ mantém o valor nominal ρ_0 .

Qualquer escolha de pólos regulares no interior do círculo unitário serve os objectivos de controle. Embora existam muitas escolhas possíveis da matriz $\mathbf{H}$, é razoável escolher $\mathbf{H}$ de tal modo que todos os valores próprios Λ'_1 e Λ'_2 de $D\mathbf{F}(x_*, y_*) - \mathbf{A}\mathbf{H}$ sejam nulos. Desse modo, o objectivo é alcançado pelo menos após N iterações e é obtida uma órbita periódica estável fora da evolução caótica da dinâmica.

Escolha-se então a matriz $\mathbf{H}$ que verifica $\Lambda'_1 = \Lambda'_2 = 0$. Tem-se $\Lambda'_1 + \Lambda'_2 = 0$ e $\Lambda'_1\Lambda'_2 = 0$ pelo que

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140100.1318 & -50106.7117 \end{bmatrix}.$$

Para estes valores de h_1 e h_2 fica garantida a estabilização da órbita caótica. Esta estabilização é equivalente à obtenção de sincronização prática do sistema ligado (3.5), a qual não é imediata sem controle de caos (Fig. 3.4 a,b).

3.2 Caso particular da ligação entre transformações idênticas

Considere no sistema ligado (3.5) o caso particular em que os parâmetros de controle satisfazem $a = b$,

$$(3.13) \quad \begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = a - y_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2. \end{cases}$$

Pretende-se estabelecer a comparação desta ligação de sistemas idênticos, onde há simetria, com a ligação anterior com ausência desta.

O sistema corresponde à equação às diferenças $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$, onde $\mathbf{F}$ é a transformação bidimensional definida em (3.6) com $a = b$,

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(a - x^2 + \rho(x - y)^2, a - y^2 + \rho(x - y)^2 \right).$$

3.2.1 Análise da dinâmica do sistema ligado

Considere $a > a^* \simeq 1.565$. Os pontos fixos do sistema ligado (3.13), as soluções de $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$, são

$$(3.14) \quad P_1(x_1, y_1) = \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + a \right)^{1/2}, -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + a \right)^{1/2} \right)$$

e

$$(3.15) \quad P_2(x_2, y_2) = \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + a \right)^{1/2}, -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + a \right)^{1/2} \right)$$

sobre a diagonal principal $x = y$ e, para $\rho \neq 1/4$, também

$$P_3(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{a + \rho}{4\rho - 1} \right)^{1/2}, -\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{a + \rho}{4\rho - 1} \right)^{1/2} \right)$$

e

$$P_4(x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \frac{a + \rho}{4\rho - 1} \right)^{1/2}, -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{a + \rho}{4\rho - 1} \right)^{1/2} \right).$$

Nota-se que as coordenadas de cada ponto fixo P_i , $i = 1, 2, 3$, verificam $x_{i+1} = -x_i - 1$ e $y_{i+1} = -y_i - 1$. Os pontos P_1 e P_2 , que não dependem do parâmetro de ligação ρ , estão bem definidos como números reais dado que $a \geq -1/4$. Os pontos P_3 e P_4 estão bem definidos como números reais para $\rho < 1/4$ visto que $a \geq -1/4$ (também para $\rho > 1/4$ quando $a \leq -1/4$). Por exemplo, para $a = 1.97 > -1/4$ e $\rho = -338.29 < 1/4$ os pontos fixos são

$$P_1(0.9899, 0.9899), \quad P_2(-1.9899, -1.9899) \\ P_3(-0.4595, -0.5404) \quad \text{e} \quad P_4(-0.5404, -0.4595).$$

Continuam válidas as expressões em (3.9) para os valores próprios da matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$. No entanto, o cálculo a partir de (3.8) de $D\mathbf{F}(P_1)$ e $D\mathbf{F}(P_2)$,

$$\begin{bmatrix} 1 - \sqrt{1 + 4a} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{1 + 4a} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 + 4a} & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{1 + 4a} \end{bmatrix},$$

respectivamente, permite obter de imediato a expressão dos valores próprios respectivos. O ponto fixo P_1 é sempre instável para os valores de a em estudo, pois o valor próprio real (note que $a \geq -1/4$) $1 - \sqrt{1 + 4a}$, de multiplicidade algébrica 2, tem módulo inferior a 1 apenas para $-1/4 < a < 3/4$. O ponto fixo P_2 é sempre instável, pois o valor próprio real $1 + \sqrt{1 + 4a}$, de multiplicidade algébrica 2, tem módulo superior ou igual a 1 para todo $a \geq -1/4$. Para os pontos fixos P_3 e P_4 tem-se

$$D\mathbf{F}(P_3) = \begin{bmatrix} 1 + (2\rho - 1)\sqrt{1 - A} & -2\rho\sqrt{1 - A} \\ 2\rho\sqrt{1 - A} & 1 - (2\rho - 1)\sqrt{1 - A} \end{bmatrix}$$

e

$$D\mathbf{F}(P_4) = \begin{bmatrix} 1 - (2\rho - 1)\sqrt{1 - A} & 2\rho\sqrt{1 - A} \\ -2\rho\sqrt{1 - A} & 1 + (2\rho - 1)\sqrt{1 - A} \end{bmatrix}$$

respectivamente, em que $A \equiv 4(a + \rho)/(4\rho - 1)$. As duas matrizes têm os mesmos valores próprios, os números reais (note que $a \geq -1/4$ e $\rho < 1/4$)

$$\Lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{(1 - 4\rho)(1 - A)}.$$

Dado que o valor próprio Λ_+ tem módulo superior ou igual a 1, os pontos fixos P_3 e P_4 são sempre instáveis. Conclui-se assim que o sistema ligado não possui pontos fixos atractores.

Segue-se o diagrama de bifurcação (Fig. 3.7) de (3.13) para $\rho \in [-350, 10]$ com $a = 1.97$, que evidencia o comportamento caótico do sistema ligado.

3.2.2 Estabilidade local da sincronização

Seja $a > a^* \simeq 1.565$. A evolução da diferença $y - x$ para o sistema ligado (3.13) é descrita pela equação às diferenças

$$y_{n+1} - x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2$$

que não depende da força de ligação ρ . A equação $y_{n+1} - x_{n+1} = 0$ é equivalente a

$$(3.16) \quad y_n = x_n \quad \vee \quad y_n = -x_n,$$

Tomando condições iniciais x_0 e y_0 que verifiquem uma das condições (3.16), obtem-se sincronização assintótica para uma ampla variação dos parâmetros de ligação.

Conforme mostra a análise da diferença $y - x$ entre as variáveis, e é confirmado pelas simulações computacionais que se relatam em secção posterior, é válida a proposição seguinte.

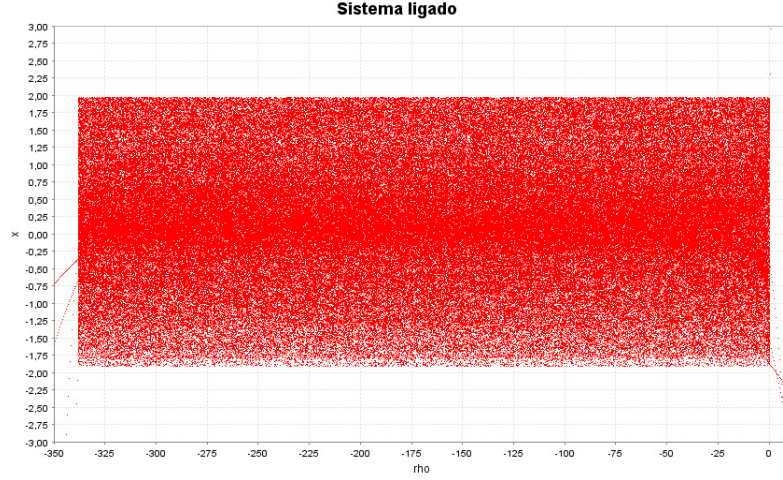


Figura 3.7: Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.13) para $\rho \in [-350, 10]$ com $a = 1.97$

Proposição 3.2.1 *Fixados um valor de a e condições iniciais x_0 e y_0 tais que $y_0 = -x_0$, existe um intervalo $I(a, x_0, y_0)$ de valores de ρ para os quais é alcançada sincronização assintótica estável em (3.13).*

Considere a equação às diferenças $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$ correspondente ao sistema ligado (3.13). Esta equação é $\mathbf{T}$ -invariante relativamente à transformação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{T}(x, y) = (y, x)$,

$$\mathbf{T}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}(x_n, y_n)).$$

A transformação $\mathbf{T}$ revela a existência de simetria na ligação em (3.13). Como tal, é possível considerar o subespaço invariante da equação $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$ dado por

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\},$$

designado por subespaço $\mathbf{T}$ -invariante, e o seu subespaço $\mathbf{T}$ -invariante transversal.

Para analisar o comportamento das soluções no subespaço $\mathbf{T}$ -invariante $\mathcal{M}$ e no subespaço transversal a $\mathcal{M}$, considere as variáveis (3.10) que definem a direcção de sincronização u que caracteriza $\mathcal{M}$ e a direcção v transversal a esta. Nesta mudança de variáveis são válidas as relações $x = (u - v)/2$ e $y = (u + v)/2$ e (3.13) é reescrito como

$$(3.17) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2a - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + 2\rho v_n^2 \\ v_{n+1} = -u_n v_n. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema de equações

$$(3.18) \quad \begin{cases} 2a - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + 2\rho v^2 = u \\ -uv = v \end{cases}$$

obtem-se os pontos fixos do sistema transversal (3.17). Obtem-se da segunda equação de (3.18) que $(u+1)v = 0$. A anulação de v corresponde à sincronização entre as variáveis x e y , embora a trajectória se situe na direcção de sincronização u . Tem-se então os pontos fixos sincronizados ($v = 0$)

$$P'_1(u_1, v_1) = (-1 + \sqrt{1+4a}, 0) \quad \text{e} \quad P'_2(u_2, v_2) = (-1 - \sqrt{1+4a}, 0)$$

definidos como números reais para qualquer valor de ρ (note que $a \geq -1/4$). Nota-se que o sistema transversal (3.17) tem ainda os pontos fixos

$$P'_3(u_3, v_3) = \left(-1, \sqrt{(1+4a)/(1-4\rho)}\right)$$

e

$$P'_4(u_4, v_4) = \left(1, -\sqrt{(1+4a)/(1-4\rho)}\right)$$

para $\rho < 1/4$ visto que $a \geq -1/4$ e (também para $\rho > 1/4$ quando $a \leq -1/4$).

A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(u, v) = \begin{bmatrix} -u & -v + 4\rho v \\ -v & -u \end{bmatrix}$$

da transformação bidimensional

$$\mathbf{H}(u, v) = \left(2a - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + 2\rho v^2, -uv\right),$$

definida por (3.17), tem por valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = -u \pm \sqrt{v^2(1-4\rho)}.$$

No entanto, num ponto fixo sincronizado tem-se

$$\mathbf{J}(u, 0) = \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix}$$

com um único valor próprio de multiplicidade algébrica 2, o número real $-u$. O ponto fixo P'_2 é sempre instável pois o valor próprio $1 + \sqrt{1+4a}$ de $\mathbf{J}(u_2, 0)$ verifica $|1 + \sqrt{1+4a}| \geq 1$ para todo $a \geq -1/4$. A matriz $\mathbf{J}(u_1, 0)$ tem $1 - \sqrt{1+4a}$ como valor próprio e o seu módulo é inferior a 1 apenas quando $-1/4 < a < 3/4$. Como tal o ponto fixo P'_1 é sempre instável para os valores de a em estudo.

Observação 2 A direcção u de u_1 mantém-se estável para $-1/4 < a < 3/4$. O sistema transversal (3.17) tem então um ponto fixo estável para $a \in]-1/4, 3/4[$, e qualquer que seja a força de ligação ρ , na vizinhança do qual é esperada sincronização idêntica dos sistemas. Nota-se que neste intervalo de variação de a , as transformações componentes do sistema ligado (3.13) são periódicas. Assim, é obtida sincronização assintótica periódica no sistema ligado (3.13), para qualquer força de ligação ρ , sempre que a toma valores no intervalo $]-1/4, 3/4[$ (Fig. 3.8 a-d). A Figura 3.8(a-d) mostra as simulações efectuadas com $N = 500$ iterações e força de ligação $\rho = 0.01$, para $a = -0.24$ e $a = 0.74$, a partir de condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$. Nota-se que o sistema ligado (3.13) tem comportamento periódico quando $a = -0.24$.

A Tabela 3.4 apresenta os pontos fixos ² para estes parâmetros de controle.

P_i	$a = -0.24$	$a = 0.74$
$P_1(x_1, y_1)$	$(-0.4000, -0.4000)$	$(0.4949, 0.4949)$
$P_2(x_2, y_2)$	$(-0.6000, -0.6000)$	$(-1.4949, -1.4949)$
$P_3(x_3, y_3)$	$(-0.3979, -0.6020)$	$(0.5155, -1.5155)$
$P_4(x_4, y_4)$	$(-0.6020, -0.3979)$	$(-1.5155, 0.5155)$

Tabela 3.4: Pontos fixos P_i de (3.13), $i = 1, \dots, 4$ para $a = -0.24$ e $a = 0.74$

Para $a = -0.24$ e $a = 0.74$ o sistema ligado (3.13) estabiliza no ponto fixo estável P_1 (tem-se o valor próprio 0.8000 quando $a = -0.24$, e o valor próprio -0.9899 quando $a = 0.74$) sobre a diagonal principal, embora possua ainda os pontos fixos instáveis P_i , $i = 1, 2, 3$.

Em $a = 3/4$ o ponto fixo P_1' sofre uma bifurcação de duplicação de período dado que $\Lambda_+ = -1$. Por esta bifurcação o ponto fixo P_1' torna-se instável na direcção transversal v (tipo sela). Este ponto sela sofre ainda bifurcações numa cascata de duplicação de período e, para valores de a suficientemente grandes, é obtido caos sincronizado instável mergulhado em caos assíncrono.

Por outro lado, o estudo dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.17) confirma o exposto. Para $-1/4 < a < 3/4$ o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é negativo (Fig. 3.9). Para obtenção da Figura 3.9 tomaram-se $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$. Sendo $\lambda_v < 0$ as oscilações síncronas são transversalmente estáveis, ou seja, é alcançada sincronização estável. Quando as oscilações caóticas são síncronas, o vector

²Nota-se que, para $a = -0.24$, os pontos fixos do sistema transversal são $P_1' = (-1.2000, 0)$, $P_2' = (-0.8000, 0)$, $P_3' = (-1, 0.2041)$ e $P_4' = (-1, -0.2041)$, pois $a \geq -1/4$ e ρ é menor do que $1/4$. Para $a = 0.74$ os pontos fixos do sistema transversal são $P_1' = (-2.9899, 0)$, $P_2' = (0.9899, 0)$, $P_3' = (-1, 2.0310)$ e $P_4' = (-1, -2.0310)$, pois $a \geq -1/4$ e ρ é menor do que $1/4$.

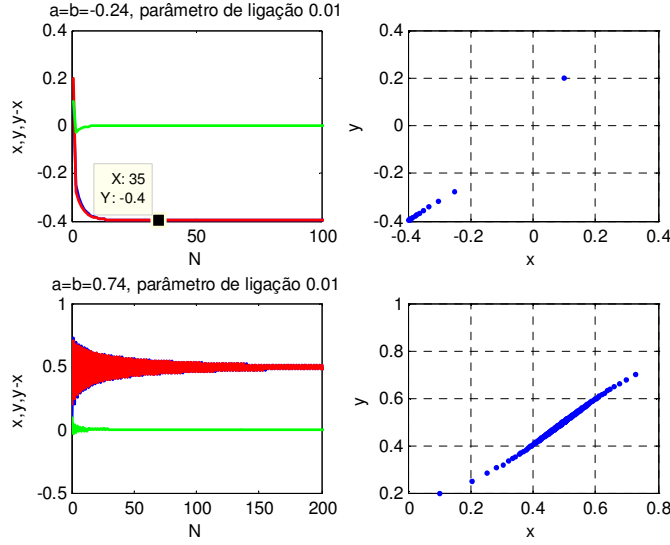


Figura 3.8: Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização

próprio do expoente de Lyapunov tangencial λ_u é tangente ao subespaço simétrico $x = y$. Sendo $\lambda_u < 0$ as oscilações são periódicas.

Se o parâmetro de controle a toma valores que correspondem a comportamento caótico, o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é positivo após um certo número de iterações (do sistema transversal (3.17)) (Fig. 3.10). A Figura 3.10 foi obtida com $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$. Sendo $\lambda_v > 0$ as oscilações síncronas não são transversalmente estáveis e não é alcançada sincronização estável.

3.2.3 Abordagem computacional

Em primeiro lugar são apresentados alguns gráficos que ilustram o estabelecido na Proposição 3.2.1 por análise da diferença $y - x$ entre as variáveis x e y . Para tal foram efectuadas simulações computacionais com $N = 500$ iterações a partir de condições iniciais diferentes considerando ρ em passo de uma centésima. Fixando $a = 1.97$, é alcançada sincronização assintótica estável quando $\rho \in I(1.97, 0.1, -0.1) = [-98.74, 0.74]$ (Fig. 3.12 a-b) sempre que $x_0 = 0.1$ e $y_0 = -0.1$. Para valores de ρ fora deste intervalo, observa-se explosão para infinito.

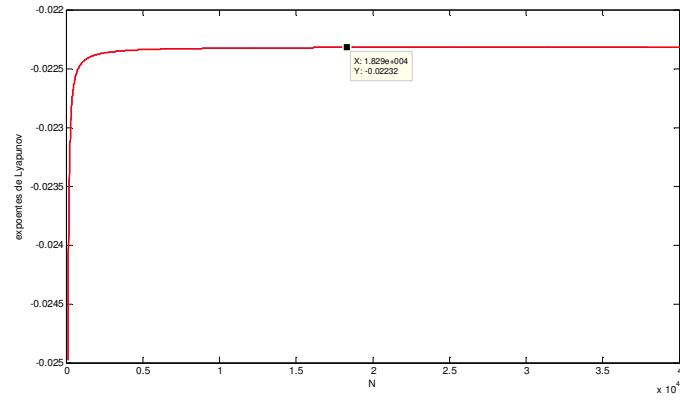


Figura 3.9: Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.17) para $\rho = 0.01$ e $a = -0.24$

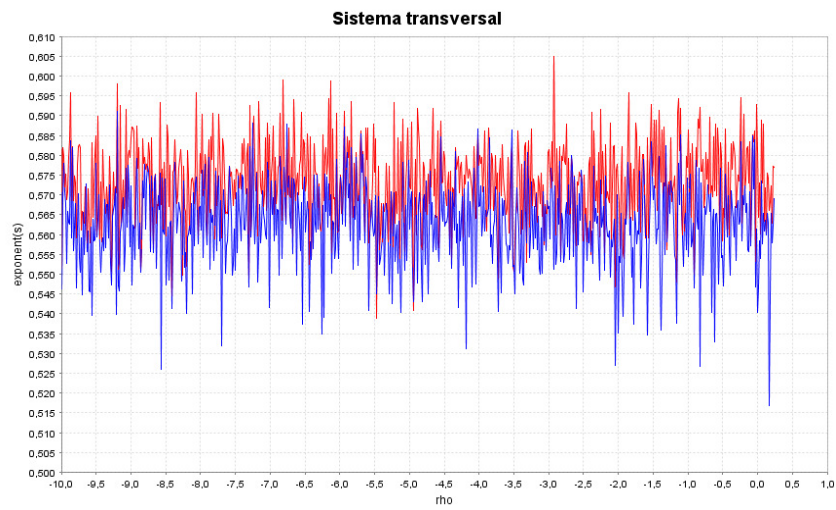


Figura 3.10: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.17) versus ρ para $\rho \in [-10, 1]$ e $a = 1.97$

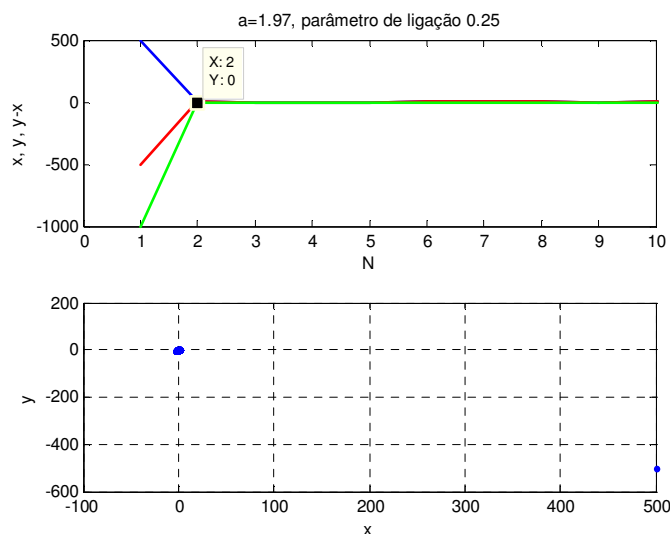


Figura 3.11: Ligação bidireccional em (3.13): (a) séries temporais, (b) atrator caótico

Considerando condições iniciais diferentes $x_0 = 0.11$ e $y_0 = -0.11$ tem-se, para $a = 1.97$, o intervalo $I(1.97, 0.11, -0.11) = [-81.56, 0.66] \subset [-98.74, 0.74]$. Quando se aumenta a diferença entre as condições iniciais x_0 e $y_0 = -x_0$, obtêm-se intervalos $I(1.97, x_0, -x_0)$ de valores de ρ de menor amplitude. Na Tabela 3.5 são apresentados estes intervalos para alguns valores de x_0 .

x_0	0.2	0.7	0.8	9.9
$I(1.97, x_0, -x_0)$	$[-24.49, 0.37]$	$[-1.77, 0.26]$	$[-1.29, 0.25]$	$[0.24, 0.25]$

Tabela 3.5: Intervalos $I(1.97, x_0, -x_0)$ para diferentes valores de x_0 .

Para $x_0 > 0.7$, considerando o passo de uma décima, todos os intervalos $I(1.97, x_0, -x_0)$ têm como extremo superior o valor $\rho = 0.25$. Para qualquer valor $x_0 > 9.9$, considerando o passo de uma décima, apenas é obtida sincronização para $\rho = 0.25$ (considerando o passo de uma centésima), ou seja, tem-se $I(1.97, x_0, -x_0) = \{0.25\}$. A Figura 3.11 mostra os resultados de sincronização obtidos para $x_0 = 500$. Pelo exposto, conclui-se que está garantida a sincronização dos sistemas para $\rho = 1/4$ quaisquer que sejam as condições iniciais simétricas, que distem entre si um valor tão elevado quanto se queira. Não foi possível, por enquanto, encontrar uma explicação analítica para a obtenção de sincronização localmente estável para qualquer valor de x_0 quando ρ toma o valor $1/4$.

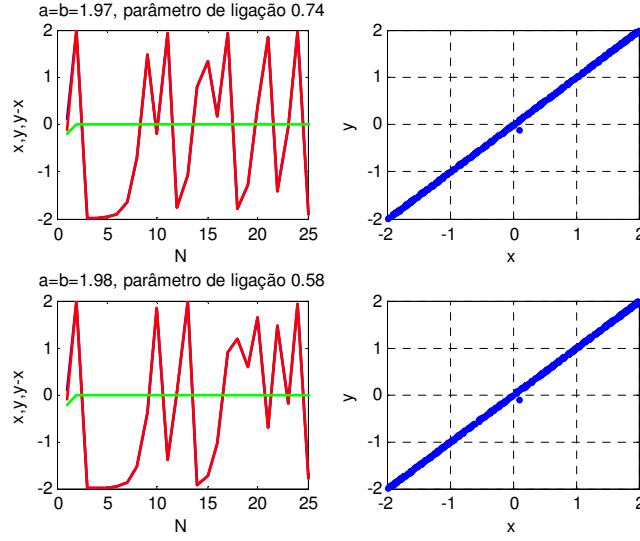


Figura 3.12: Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização

Uma pequena alteração do valor de a traduz-se em alteração do intervalo $I(a, 0.1, -0.1)$. De facto, considerando $a = 1.98$ tem-se $I(1.98, 0.1, -0.1) = [-99.08, 0.58]$ (Fig. 3.12 c-d)

O estudo da estabilidade local da sincronização apenas conduziu a conclusões em sincronização periódica. Apresenta-se de seguida o estudo efectuado tomando $a = 1.97$ no sistema ligado (3.13), um valor paramétrico que conduz a comportamento caótico nas transformações.

As simulações efectuadas com $N = 2000$ iterações a partir de condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$ mostram que, embora o sistema ligado (3.13) seja simétrico, também neste caso não são encontrados valores de ρ para os quais a diferença $y - x$ tende para 0. No entanto, para cada $\rho \in [-338.29, 0.24]$ esta diferença fica restringida a um intervalo limitado (considerando o passo de uma centésima). A nota seguinte estabelece o intervalo I_K de valores de ρ para os quais a diferença $y - x$ fica restringida a um intervalo de amplitude inferior a 1.

Nota 3 Para cada $\rho \in [-338.29, 0.24]$ existe um intervalo limitado $I_e(\rho)$ no qual varia a diferença $y - x$. A amplitude do intervalo $I_e(\rho)$, entre 0.22 e 38.80, aumenta quando ρ varia de -338.29 a 0.24 . Para $\rho \in I_K = [-338.29, -14.77]$ a amplitude de $I_e(\rho)$ é inferior a 1 sendo, portanto, alcançada sincronização prática para valores de ρ neste intervalo (Fig.

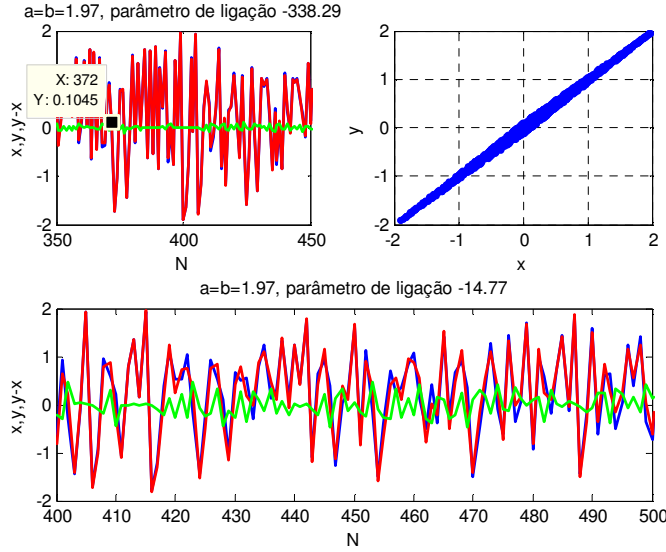


Figura 3.13: Ligação bidireccional em (3.13): (a,c) séries temporais, (b) atrator caótico

3.13 a-c). Se $\rho = -338.29$ então o erro de sincronização $e = y - x$ varia no intervalo $I_e(-0.39) =]-0.11, 0.11[$ de menor amplitude em torno de 0, 0.22 (Fig. 3.13 a,b).

Em $\rho = -338.30$ e $\rho = 0.25$ a diferença $y - x$ explode para infinito. Nota-se que, embora a ligação em (3.13) seja simétrica, a amplitude do intervalo $I_e(0.24) =]-19.41, 19.39[$ é superior à obtida acima para transformações não-idênticas (com $a = 1.87$ e $b = 1.97$ tem-se $I_e(0.24) =]-18.50, 18.28[$). No entanto, a amplitude de $I_e(-0.39)$ é inferior à obtida na ligação assimétrica (3.5).

A Tabela 3.6 apresenta o intervalo $I_e(\rho)$, de amplitude inferior a 1, para alguns valores de ρ .

ρ	-311.03	-300	-100	-20
$I_e(\rho)$	$] -0.11, 0.11[$	$] -0.12, 0.12[$	$] -0.20, 0.20[$	$] -0.44, 0.43[$

Tabela 3.6: Intervalos $I_e(\rho)$ de amplitude de inferior a 1

As variações para ρ expostas na Nota 3 são evidenciadas pelo diagrama de bifurcação (Fig. 3.7) e pelo gráfico dos expoentes de Lyapunov em função de ρ (Fig. 3.14) em que se considera $\rho \in [-350, 10] \supset [-338.29, 0.24]$ com $N = 500$ iterações. Estas Figuras confirmam a natureza caótica de (3.13).

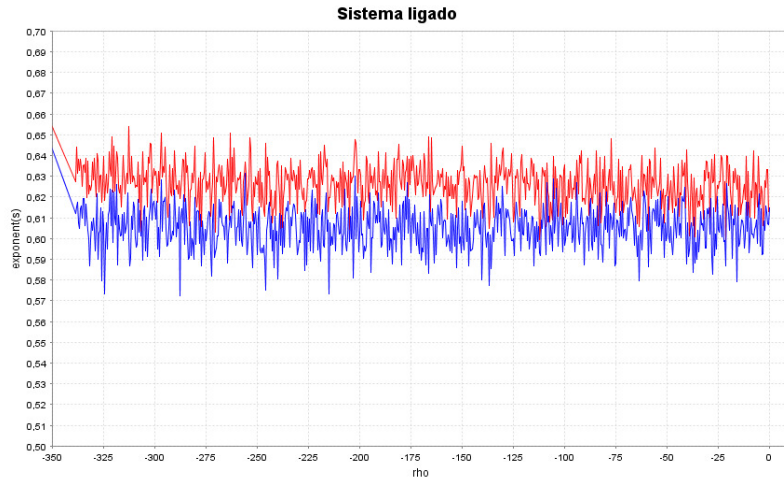


Figura 3.14: Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.13) versus ρ para $\rho \in [-350, 10] \supset [-338.29, 0.24]$ e $a = 1.97$

3.2.4 Aplicação de controle de caos

Segue-se um método para construção de um controlador que estabilize a dinâmica caótica do sistema sincronizado pela ligação em (3.13). Este método usa as propriedades dos subespaços invariantes garantidos pela simetria de (3.13) e conta com a equação variacional

$$u_n = u_0 + \delta_n \quad \wedge \quad v_n = v_0 + \xi_n$$

para o sistema (3.18) que caracteriza os pontos fixos sincronizados $(u, 0)$.

A dinâmica em torno de um ponto fixo $(u_0, 0)$ no subespaço invariante $\mathcal{M}$ pode ser descrita pelas equações às diferenças

$$(3.19) \quad \delta_{n+1} = -u_0 \delta_n$$

e

$$(3.20) \quad \xi_{n+1} = -u_0 \xi_n,$$

obtidas da matriz Jacobiana $\mathbf{J}(u_0, 0)$ pela relação

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+1} \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_0 & 0 \\ 0 & -u_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Se o ponto fixo (u_0, v_0) é instável para a direcção u , a equação (3.20) deve ser uma equação às diferenças instável. Para mudar esta estabilidade de caos sincronizado mergulhado no atractor caótico assíncronico, interessa obter um controlador que estabilize

apenas a equação (3.20) e mantenha livre a equação (3.19). Tal pode ser conseguido por um método análogo ao método OGY [51] sobre o princípio do controlador, o que constitui uma redução do problema da sincronização à estabilização para a origem da equação às diferenças unidimensional (3.20). Este método é conceptualmente diferente e mais geral pois suprime a dinâmica dos subespaços invariantes instáveis.

Estando o parâmetro ρ presente no lado direito do sistema (3.17), aplica-se o controle da equação às diferenças (3.20) na origem por pequenas perturbações do parâmetro ρ . Contudo a segunda equação do sistema (3.17) mostra que qualquer *feedback* das perturbações de parâmetro para ρ serão anuladas na direcção u , ou seja, o sistema (3.17) não é controlável pelo parâmetro original ρ . Introduce-se então um novo parâmetro ω às equações do sistema original (3.13),

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2 - \omega \\ y_{n+1} = a - y_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2 + \omega. \end{cases}$$

Pela mudança de variáveis (3.10) obtem-se então

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2a - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + 2\rho v_n^2 \\ v_{n+1} = 2\omega - u_n v_n. \end{cases}$$

Designando $2a - (u^2 + v^2) / \sqrt{2} + 2\rho v^2$ e $2\omega - u_n v_n$ por g_1 e g_2 , respectivamente, as variações para ω são dadas pela matriz das derivadas parciais

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Assumindo que w_n são perturbações de ω , a equação variacional pode ser escrita como

$$(3.21) \quad \begin{bmatrix} \delta_{n+1} \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(u_0, 0) \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \xi_n \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot [w_n].$$

Para a sincronização de caos, aplica-se agora o estado *feedback* apenas à equação (3.20) para estabilizar a origem $\xi_0 = 0$. Define-se então

$$(3.22) \quad [w_n] = \mathbf{C}^T \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \xi_n \end{bmatrix} = c_1 \delta_n + c_2 \xi_n$$

através de um vector de controle $\mathbf{C}^T = (c_1, c_2)$. Como tal a equação (3.21) toma a forma

$$\begin{bmatrix} \delta_{n+1} \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}(u_0, 0) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T] \cdot \begin{bmatrix} \delta_n \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

em que

$$\mathbf{J}(u_0, 0) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -u_0 & 0 \\ 2c_1 & -u_0 + 2c_2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se então

$$\xi_{n+1} = 2c_1\delta_n + (2c_2 - u_0)\xi_n.$$

Escolhendo $c_1 = 0$ e c_2 de valor arbitrário, esta equação pode ser mudada para uma aplicação contracção, $\xi_{n+1} = (2c_2 - u_0)\xi_n$. A sincronização de caos é realizada pela soma do *input* w_n definido por (3.22) com ω , $\omega \rightarrow w_n + \omega$.

Nota-se que, quando é alcançada sincronização, w_n é anulado e o vector de controle (c_1, c_2) é um vector de variáveis dependente de u_0 . Por exemplo, fazendo $2c_2 - u_0 = 0$ obtem-se o vector $(c_1, c_2) = (0, u_0/2)$ que realiza o controle. Nota-se ainda que o campo vectorial perto de $v = 0$ é ortogonal à direcção u . No estado caótico sincrónico o valor de u_0 é errante (v_0 é sempre 0). No caso de um ponto fixo ou periódico sincronizado, u_0 é fixo e (c_1, c_2) torna-se um vector constante. Esta situação é equivalente ao problema de controle de caos para estabilizar uma órbita periódica instável. Para $a = 1.97$ e $\rho = -338.29$ tem-se o ponto fixo instável $P_2(u_2, v_2) = (-3.9799, 0)$. Para $u_0 = -3.9799$ vem $c_2 = u_0/2 = -1.9899$.

3.3 Generalização da ligação a parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2

Considere agora parâmetros de ligação distintos ρ_1 e ρ_2 em (3.5), com obtenção do sistema ligado

$$(3.23) \quad \begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho_1 (x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = b - y_n^2 + \rho_2 (x_n - y_n)^2. \end{cases}$$

Ao contrário do verificado com uso de um só parâmetro de ligação ρ , neste caso a diferença $y - x$, que evolui de acordo com a equação às diferenças

$$y_{n+1} - x_{n+1} = b - a + x_n^2 - y_n^2 + (\rho_2 - \rho_1)(x_n - y_n)^2,$$

depende dos parâmetros de ligação ρ_1 e ρ_2 . De facto, a exposição que se segue revela a existência de pares de valores (ρ_1, ρ_2) para os quais se obtêm resultados de sincronização na ligação em (3.23), não verificados com um único parâmetro ρ em (3.5). A análise do caso particular de transformações idênticas, em que a ligação continua assimétrica, permite observar ainda melhores resultados. É apresentado em primeiro lugar o estudo com $a = b$.

3.3.1 Caso particular de transformações idênticas

Considere a ligação em (3.23) com $a = b$ que conduz ao sistema ligado

$$(3.24) \quad \begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho_1 (x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = a - y_n^2 + \rho_2 (x_n - y_n)^2. \end{cases}$$

Análise da dinâmica do sistema ligado

Seja $a > a^* \simeq 1.565$. O sistema ligado (3.24) corresponde à equação às diferenças $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$, onde $\mathbf{F}$ é a transformação bidimensional definida por (3.6) com parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2 ,

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(a - x^2 + \rho_1 (x - y)^2, a - y^2 + \rho_2 (x - y)^2 \right).$$

Duas das soluções da equação $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ são comuns ao caso da ligação em (3.13) de transformações idênticas com um só parâmetro ρ , os pontos fixos P_1 e P_2 dados por (3.14) e (3.15), respectivamente, situados na diagonal principal $x = y$. Fixado um valor de a , obtêm-se os mesmos pontos fixos P_1 e P_2 qualquer que seja o valor dos parâmetros de ligação ρ_1 e ρ_2 . Sempre que $1 + \rho_1 - \rho_2 \neq 0$ e $(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 \neq 4\rho_1$ o sistema ligado (3.24) tem ainda os pontos fixos $P_3(x_+, y_+)$ e $P_4(x_-, y_-)$ de coordenadas dadas por

$$x_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - \frac{a(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1}{(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 - 4\rho_1} \right)^{1/2}$$

e

$$y_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\rho_1 - \rho_2 - 1}{1 + \rho_1 - \rho_2} \left(\frac{1}{4} - \frac{a(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1}{(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 - 4\rho_1} \right)^{1/2}.$$

Para $1 + \rho_1 - \rho_2 = 0$ os pontos fixos de (3.24) são soluções de equações em potência de x , desde x^0 até x^4 e com quocientes de polinômios, equações de resolução difícil. Para $(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 = 4\rho_1$ a obtenção dos pontos fixos de (3.24) é ainda mais difícil.

Os pontos fixos P_1 e P_2 estão bem definidos como números reais sempre que $a \geq -1/4$. Quanto aos pontos fixos P_3 e P_4 , há que exigir a condição

$$\frac{1}{4} - \frac{a(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 + \rho_1}{(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 - 4\rho_1} \geq 0.$$

Esta desigualdade é verdadeira para $(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 > \rho_1$ sempre que $a \geq -1/4$ e para $(1 + \rho_1 - \rho_2)^2 < \rho_1$ sempre que $a \leq -1/4$. Se $1 + \rho_1 - \rho_2 = 0$ tem-se $\rho_2 = 1 + \rho_1$ e (3.24), que pode ser visto a um só parâmetro

$$\begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 + \rho_1 (x_n - y_n)^2 \\ y_{n+1} = a - 2x_n y_n + y_n^2 + \rho_1 (x_n - y_n)^2 \end{cases},$$

possui ainda os pontos fixos

$$P_3(x_3, y_3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \left(\frac{-1-4a}{4\rho_1} \right)^{1/2} \right)$$

e

$$P_4(x_4, y_4) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \left(\frac{-1-4a}{4\rho_1} \right)^{1/2} \right).$$

Estes pontos fixos $P_3(x_3, y_3)$ e $P_4(x_4, y_4)$ estão bem definidos como números reais para $\rho_1 < 0$ sempre que $a \geq -1/4$ e para $\rho_1 > 0$ sempre que $a \leq -1/4$.

As expressões gerais dos valores próprios da matriz Jacobiana

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 2\rho_1(x-y) - 2x & 2\rho_1(y-x) \\ 2\rho_2(x-y) & -2y - 2\rho_2(x-y) \end{bmatrix}$$

de (3.24) são

$$\Lambda_{\pm} = -x - y + (\rho_1 - \rho_2)(x - y) \pm \sqrt{(x - y)^2 [(\rho_1 - \rho_2)^2 - 2(\rho_1 + \rho_2) + 1]}.$$

A Tabela 3.7 apresenta os pontos fixos e respectivos valores próprios para $a = 1.97$ e os pares $(\rho_1, \rho_2) = (-394.90, -391.90)$ e $(\rho_1, \rho_2) = (415.60, 457.38)$ de parâmetros de ligação.

$P_i, \Lambda_+^{P_i}, \Lambda_-^{P_i}$	$(\rho_1, \rho_2) = (-394.90, -391.90)$	$(\rho_1, \rho_2) = (415.60, 457.38)$
P_1	(0.9899, 0.9899)	(0.9899, 0.9899)
P_2	(-1.9899, -1.9899)	(-1.9899, -1.9899)
P_3	(-0.4251, -0.3502)	(77.3985, 81.2189)
P_4	(-0.5748, -0.6497)	(-78.3985, -82.2189)
$\Lambda_+^{P_1}, \Lambda_-^{P_1}$	-1.9662, -1.9935	-1.9662, -1.9935
$\Lambda_+^{P_2}, \Lambda_-^{P_2}$	3.9943, 3.9655	3.9943, 3.9655
$\Lambda_+^{P_3}, \Lambda_-^{P_3}$	3.9799, -1.9799	4.2031, -2.2031
$\Lambda_+^{P_4}, \Lambda_-^{P_4}$	3.9799, -1.9799	3.5612, -1.5612

Tabela 3.7: Pontos fixos P_i , $i = 1, \dots, 4$, e valores próprios para $a = 1.97$

Para $(\rho_1, \rho_2) = (-394.90, -391.90)$, os pontos fixos P_3 e P_4 têm valores próprios comuns. Pelo módulo dos valores próprios, conclui-se que todos os pontos fixos são instáveis.

A representação dos expoentes de Lyapunov de (3.24) em função de ρ_2 , fixando $a = 1.97$ e $\rho_1 = 0.9$, mostra que estes são positivos e que, portanto, o comportamento do sistema é caótico qualquer que seja o valor tomado para ρ_2 (Fig. 3.15).

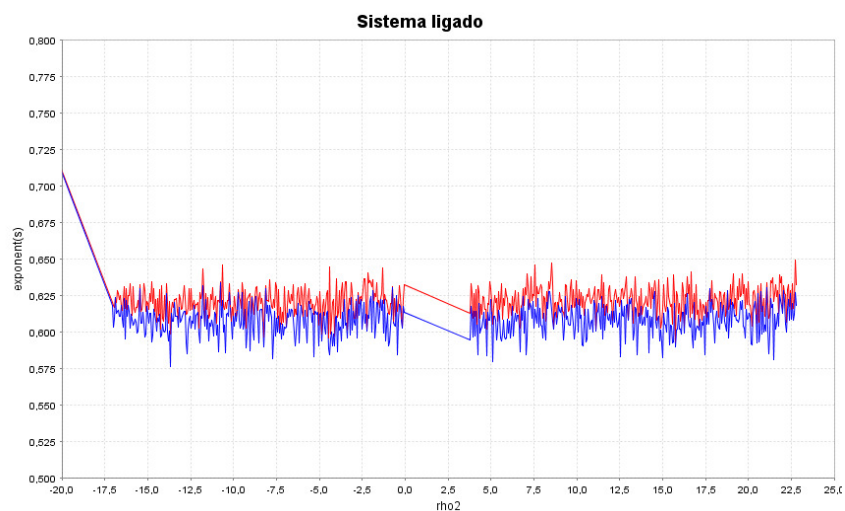


Figura 3.15: Expoentes de Lyapunov do sistema ligado (3.24) versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-20, 25]$ com $a = 1.97$ e $\rho_1 = 0.9$

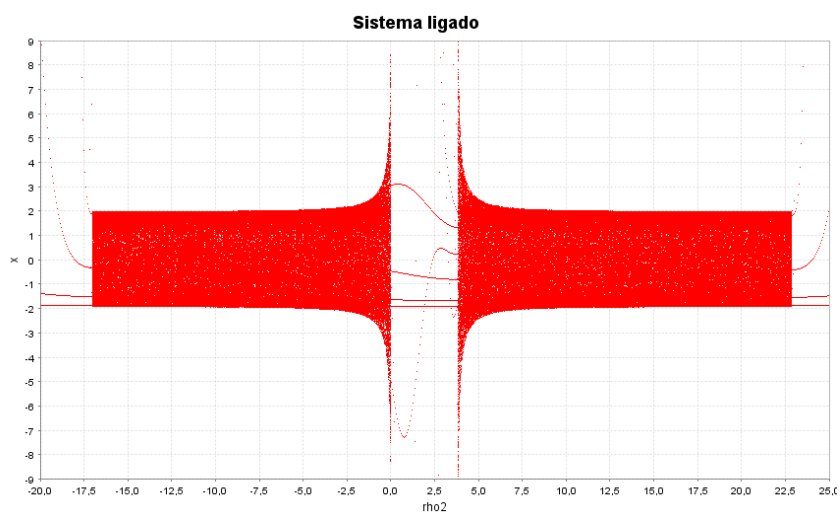


Figura 3.16: Diagram de bifurcação do sistema ligado (3.24) em função de ρ_2 para $a = 1.97$ e $\rho_1 = 0.9$

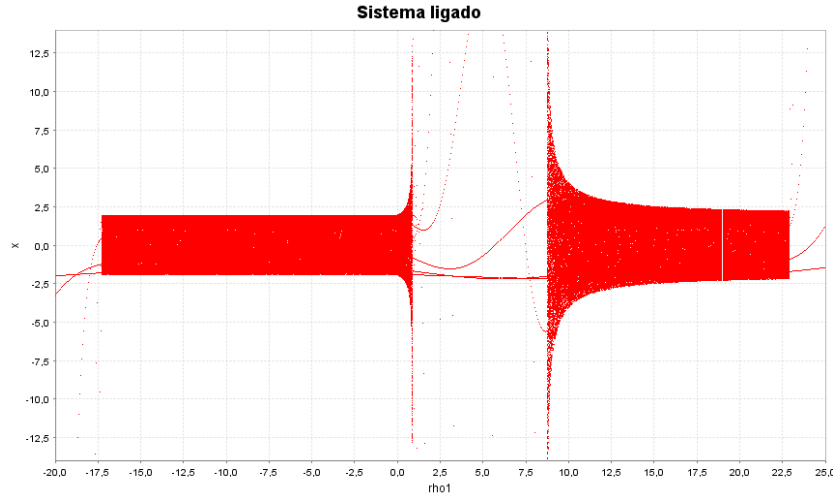


Figura 3.17: Diagram de bifurcação do sistema ligado (3.24) em função de ρ_1 para $a = 1.97$ e $\rho_2 = 3.8$

Considere $a = 1.97$ e o par $(\rho_1, \rho_2) = (0.9, 3.8)$. Os diagramas de bifurcação de (3.24) em função de ρ_2 (Fig. 3.16), fixando $\rho_1 = 0.9$, ou em função de ρ_1 (Fig. 3.17), fixando $\rho_2 = 3.8$, mostram a existência de duas regiões onde o comportamento do sistema ligado é caótico. Para $\rho_1 = 0.9$ e $\rho_2 \in]0, 3.81[$ não é observado qualquer atrator dada a explosão do sistema (3.24) para infinito quando $\rho_2 \simeq 0$ e $\rho_2 \simeq 3.81$. O comportamento é análogo para $\rho_2 = 3.8$ quando $\rho_1 \in]0.87, 8.7[$.

Estabilidade local da sincronização

Considere $a > a^* \simeq 1.565$. A diferença $y - x$ para o sistema ligado (3.24) evolui pela equação às diferenças

$$y_{n+1} - x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 - (\rho_1 - \rho_2)(x_n - y_n)^2.$$

A equação $y_{n+1} - x_{n+1} = 0$ é equivalente a

$$[x_n + y_n + (\rho_2 - \rho_1)(x_n - y_n)](x_n - y_n) = 0,$$

ou ainda,

$$[(1 - \rho_1 + \rho_2)x_n + (1 - \rho_2 + \rho_1)y_n](x_n - y_n) = 0.$$

Tem-se então

$$(3.25) \quad (\rho_2 - \rho_1 + 1)x_n = (\rho_2 - \rho_1 - 1)y_n \quad \vee \quad x_n = y_n.$$

Conforme mostra a análise da diferença $y - x$ entre as variáveis, e é confirmado pelas simulações computacionais que se relatam em secção posterior, é válida a proposição seguinte.

Proposição 3.3.1 *Fixados um valor de a e condições iniciais x_0 e y_0 , existe uma sequência de intervalos $I_i(a, x_0, y_0)$, com $i = 1, \dots, l$, de valores de ρ_1 tais que é alcançada sincronização assintótica estável ou sincronização prática em (3.24) para cada par (ρ_1, ρ_2) de parâmetros de ligação que verifiquem (a relação)*

$$(3.26) \quad (\rho_2 - \rho_1 + 1)x_0 = (\rho_2 - \rho_1 - 1)y_0 \quad \wedge \quad \rho_1 \in I_i(a, x_0, y_0)$$

para certo i . Sendo $I(a, x_0, y_0) = \bigcup_{i=1}^l I_i(a, x_0, y_0)$, existem ainda intervalos $I_K(a, x_0, y_0) \subset I(a, x_0, y_0)$ com o mesmo extremo inferior que $I(a, x_0, y_0)$ e $I_A(a, x_0, y_0) \subset I(a, x_0, y_0)$ com o mesmo extremo superior que $I(a, x_0, y_0)$ para os quais ocorre, respectivamente, sincronização prática no sentido de Kapitaniak e sincronização assintótica estável. Para $\rho_1 \in I(a, x_0, y_0) \setminus I_K(a, x_0, y_0) \cup I_A(a, x_0, y_0)$ pode ocorrer qualquer um dos tipos de sincronização numa alternância (aparentemente) irregular.

Considerando as variáveis (3.10) que definem a direcção de sincronização u que caracteriza o subespaço

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

e a direcção v transversal a esta, o sistema (3.24) é reescrito como

$$(3.27) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2a - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + (\rho_1 + \rho_2)v_n^2 \\ v_{n+1} = -u_nv_n + (\rho_2 - \rho_1)v_n^2. \end{cases}$$

No cálculo dos pontos fixos do sistema transversal tem-se

$$v[(\rho_2 - \rho_1)v - 1 - u] = 0.$$

A anulação de v corresponde à sincronização entre as variáveis x e y , embora a trajectória se situe na direcção de sincronização u . O sistema transversal (3.27) tem então, para $a \geq -1/4$, os pontos fixos sincronizados ($v = 0$)

$$P'_1(u_1, v_1) = (-1 - \sqrt{1 + 4a}, 0) \quad \text{e} \quad P'_2(u_2, v_2) = (-1 + \sqrt{1 + 4a}, 0),$$

os já encontrados para a ligação em (3.13) de transformações idênticas com um só parâmetro ρ , e ainda os pontos fixos

$$P'_3(u_3, v_3) = \left(-1 + \left(1 + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1 - 1} \right) \sqrt{1 + 4a}, \frac{\sqrt{1 + 4a}}{\rho_2 - \rho_1 - 1} \right)$$

e

$$P'_4(u_4, v_4) = \left(-1 - \left(1 + \frac{1}{\rho_2 - \rho_1 - 1} \right) \sqrt{1 + 4a}, \frac{\sqrt{1 + 4a}}{\rho_1 - \rho_2 + 1} \right)$$

sempre que $\rho_2 - \rho_1 - 1 \neq 0$. Para $\rho_2 = \rho_1 + 1$, (3.13) tem como pontos fixos, além de $P'_1(u_1, v_1)$ e $P'_2(u_2, v_2)$, também

$$P'_3(u_3, v_3) = \left(-1 + \sqrt{\frac{-1 - a}{4\rho_1}}, \sqrt{\frac{-1 - a}{4\rho_1}} \right)$$

e

$$P'_4(u_4, v_4) = \left(-1 - \sqrt{\frac{-1 - a}{4\rho_1}}, -\sqrt{\frac{-1 - a}{4\rho_1}} \right).$$

Estes pontos fixos $P'_3(u_3, v_3)$ e $P'_4(u_4, v_4)$ estão bem definidos como números reais para $\rho_1 < 0$ sempre que $a \geq -1$ (nota-se que $a > a^* \simeq 1.565 > -1$).

A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(u, v) = \begin{bmatrix} -u & -v + 2(\rho_1 + \rho_2)v \\ -v & -u + 2(\rho_2 - \rho_1)v \end{bmatrix}$$

da transformação bidimensional

$$\mathbf{K}(u, v) = \left(2a - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + (\rho_1 + \rho_2)v^2, (\rho_2 - \rho_1)v^2 - uv \right),$$

definida por (3.27), tem por valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = (\rho_2 - \rho_1)v - u \pm |v| \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)^2 + 1 - 2(\rho_1 + \rho_2)}.$$

No entanto, num ponto fixo sincronizado tem-se

$$\mathbf{J}(u, 0) = \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix}$$

com um único valor próprio de multiplicidade algébrica 2, o número real $-u$. O ponto fixo P'_1 é sempre instável pois o valor próprio $1 + \sqrt{1 + 4a}$ de $\mathbf{J}(u_1, 0)$ verifica $|1 + \sqrt{1 + 4a}| \geq 1$ para todo $a \geq -1/4$. A matriz $\mathbf{J}(u_2, 0)$ tem $1 - \sqrt{1 + 4a}$ como valor próprio e o seu módulo é inferior a 1 apenas quando $-1/4 < a < 3/4$. Como tal o ponto fixo P'_2 também é instável para os valores de a em estudo.

Observação 4 A direcção u de u_2 mantém-se estável para $-1/4 < a < 3/4$. O sistema transversal (3.17) tem então um ponto fixo estável para $a \in]-1/4, 3/4[$, e quaisquer que sejam as forças de ligação ρ_1 e ρ_2 , na vizinhança do qual é esperada sincronização idêntica dos sistemas. Nota-se que neste intervalo de variação de a , as transformações componentes do sistema ligado (3.24) são periódicas. É obtida sincronização assintótica periódica no sistema ligado (3.24), para quaisquer forças de ligação ρ_1 e ρ_2 , sempre que a toma valores no intervalo $]-1/4, 3/4[$ (Fig. 3.18 a-d). A Figura 3.18(a-d) mostra as simulações efectuadas com $N = 500$ iterações e forças de ligação $\rho_1 = -0.01$ e $\rho_2 = 0.02$, para $a = -0.24$ e $a = 0.74$, a partir de condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$. Nota-se que o sistema ligado (3.24) tem comportamento periódico quando $a = -0.24$.

A Tabela 3.8 apresenta os pontos fixos ³ para estes parâmetros de controle.

P_i	$a = -0.24$	$a = 0.74$
$P_1(x_1, y_1)$	$(-0.4000, -0.4000)$	$(0.4949, 0.4949)$
$P_2(x_2, y_2)$	$(-0.6000, -0.6000)$	$(-1.4949, -1.4949)$
$P_3(x_3, y_3)$	$(-0.4020, -0.6039)$	$(0.4744, -1.5347)$
$P_4(x_4, y_4)$	$(-0.5979, -0.3960)$	$(-1.4744, 0.5347)$

Tabela 3.8: Pontos fixos P_i de (3.13), $i = 1, \dots, 4$ para $a = -0.24$ e $a = 0.74$

Para $a = -0.24$ e $a = 0.74$ o sistema ligado (3.13) estabiliza no ponto fixo estável P_1 (tem-se o valor próprio 0.8000 quando $a = -0.24$, e o valor próprio -0.9899 quando $a = 0.74$) sobre a diagonal principal, embora possua ainda os pontos fixos instáveis P_i , $i = 1, 2, 3$.

Em $a = 3/4$ o ponto fixo P'_2 sofre uma bifurcação de duplicação de período dado que $\Lambda_+ = -1$. Por esta bifurcação o ponto fixo P'_2 torna-se instável na direcção transversal v (tipo sela). Este ponto sela sofre ainda bifurcações numa cascata de duplicação de período e, para valores de a suficientemente grandes, é obtido caos sincronizado instável mergulhado em caos assíncronico.

Por outro lado, estudo dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) confirma o exposto. Para $-1/4 < a < 3/4$ o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é negativo (Fig. 3.19). Para obtenção da Figura 3.19 tomaram-se $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$. Sendo $\lambda_v < 0$ as oscilações síncronas são transversalmente estáveis, ou seja, é alcançada sincronização estável. Quando as oscilações caóticas são síncronas, o vector

³Nota-se que, para $a = -0.24$, os pontos fixos do sistema transversal são $P'_1 = (-1.2000, 0)$, $P'_2 = (-0.8000, 0)$, $P'_3 = (-1, 0.2041)$ e $P'_4 = (-1, -0.2041)$, pois $a \geq -1/4$ e ρ é menor do que $1/4$. Para $a = 0.74$ os pontos fixos do sistema transversal são $P'_1 = (-2.9899, 0)$, $P'_2 = (0.9899, 0)$, $P'_3 = (-1, 2.0310)$ e $P'_4 = (-1, -2.0310)$, pois $a \geq -1/4$ e ρ é menor do que $1/4$.

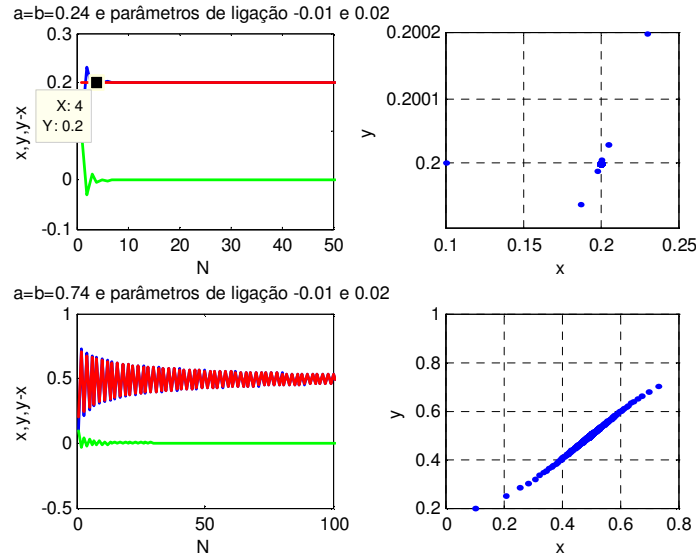


Figura 3.18: Ligação bidireccional em (3.24): (a,c) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização

próprio do expoente de Lyapunov tangencial λ_u é tangente ao subespaço simétrico $x = y$. Sendo $\lambda_u < 0$ as oscilações são periódicas.

Se o parâmetro de controle a toma valores que correspondem a comportamento caótico, o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é positivo após um certo número de iterações (do sistema transversal). De facto, considerando $a = 1.97$ tem-se (3.27) dado por

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3.94 - 0.5(u_n^2 + v_n^2) + (\rho_1 + \rho_2)v_n^2 \\ v_{n+1} = -u_nv_n + (\rho_2 - \rho_1)v_n^2 \end{cases}.$$

Para $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$ são obtidas as Figuras 3.20 e 3.21. Sendo $\lambda_v > 0$ as oscilações sincrónicas não são transversalmente estáveis e não é alcançada sincronização estável.

Abordagem computacional

Em primeiro lugar são apresentados alguns gráficos que ilustram o estabelecido na Proposição 3.3.1 por análise da diferença $y - x$ entre as variáveis. Para tal foram efectuadas simulações computacionais com $N = 1000$ iterações a partir de condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$ considerando ρ_1 e ρ_2 em passo de uma centésima. Para

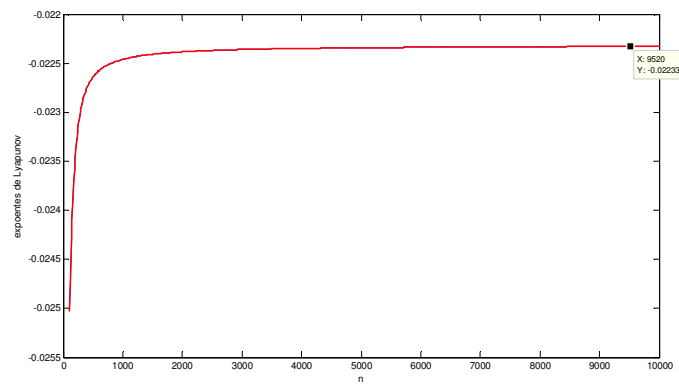


Figura 3.19: Evolução dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) para $a = -0.24$, $\rho_1 = -0.01$ e $\rho_2 = 0.02$

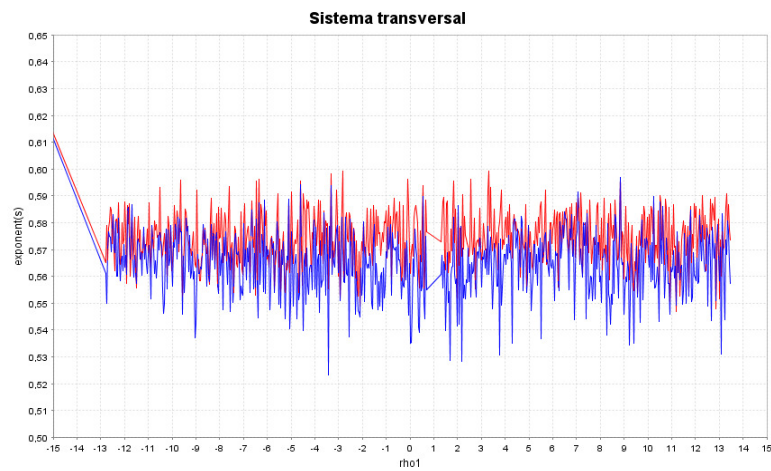


Figura 3.20: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ_1 para $\rho_1 \in [-15, 15]$ com $a = 1.97$ e $\rho_2 = 0.02$

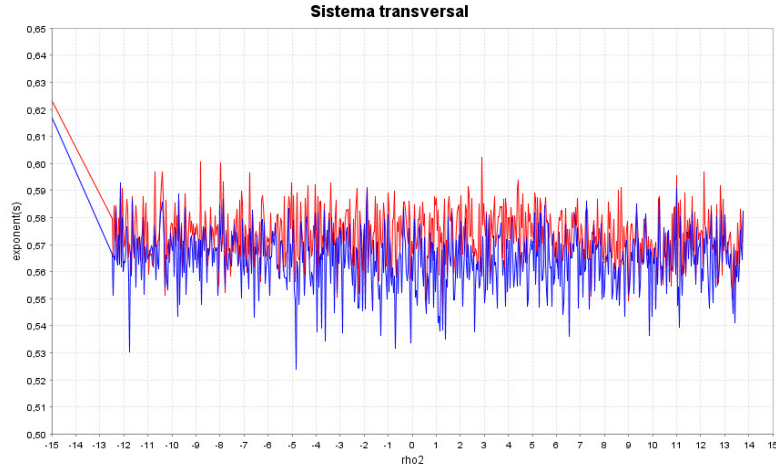


Figura 3.21: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-15, 15]$ com $a = 1.97$ e $\rho_1 = -0.01$

estas condições iniciais a relação (3.26) traduz-se em $\rho_2 = \rho_1 + 3$. Fixando $a = 1.97$, para cada par $(\rho_1, \rho_1 + 3)$ com $\rho_1 \in [-394.99, 2.99]$ é alcançada sincronização assintótica estável ou sincronização prática, excepto em valores isolados de que é exemplo $\rho_1 = -12.58$ (e $\rho_2 = -9.58$) (Fig. 3.22 a-f). Para $\rho_1 \in [-394.99, -380.18]$ a sincronização é sempre prática. Para valores de ρ_1 superiores a -380.18 , existem pequenos intervalos onde ocorre sincronização assintótica intercalados com outros onde a sincronização é apenas prática. Na verdade, mantendo o valor de a , pequenas variações na força de ligação ρ_1 (e consequentemente em ρ_2) provocam alternância entre sincronização prática e sincronização assintótica (Fig. 3.23 a-f). Nota-se que para $\rho_1 \in [-338.91, -338.93]$ apenas é alcançada sincronização prática.

Também, mantendo as forças de ligação ρ_1 e ρ_2 mas considerando uma pequena alteração do valor de a ocorre a mesma alternância (Fig. 3.23 a-f e 3.24 a-f).

Segue-se uma descrição mais alargada dos possíveis pares de valores (ρ_1, ρ_2) que conduzem a intervalos limitados da diferença $y - x$ ou mesmo a sincronização. As simulações computacionais foram efectuadas com $N = 2000$ iterações.

Considere valores de ρ_1 não-negativos em passo de uma décima. As simulações computacionais efectuadas mostram que, para cada valor de ρ_1 tomado, é possível determinar dois intervalos de valores de ρ_2 para os quais a diferença $y - x$ é limitada. Designem-se esses intervalos por $I^1(\rho_1)$ e $I^2(\rho_1)$. Sejam $I_{e,\min}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ os intervalos de va-

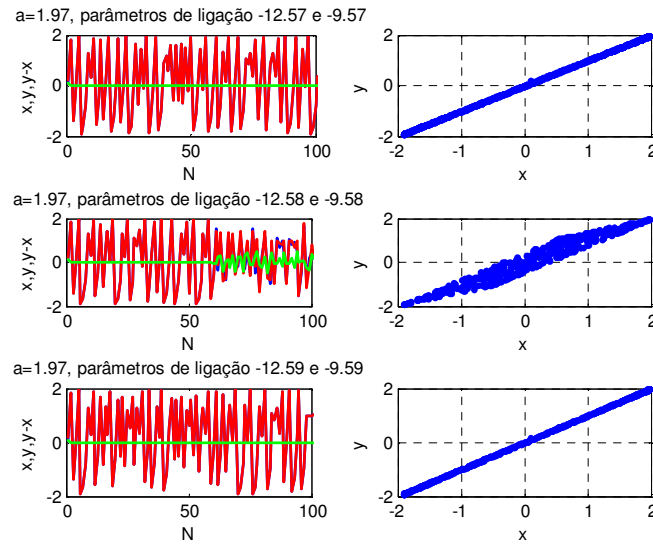


Figura 3.22: Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b,f) hiperplanos de sincronização, (d) atrator caótico

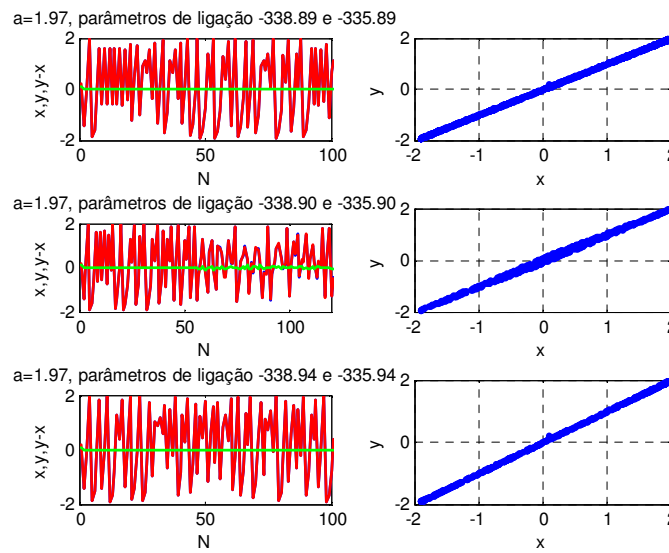


Figura 3.23: Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b,f) hiperplanos de sincronização, (d) atrator caótico

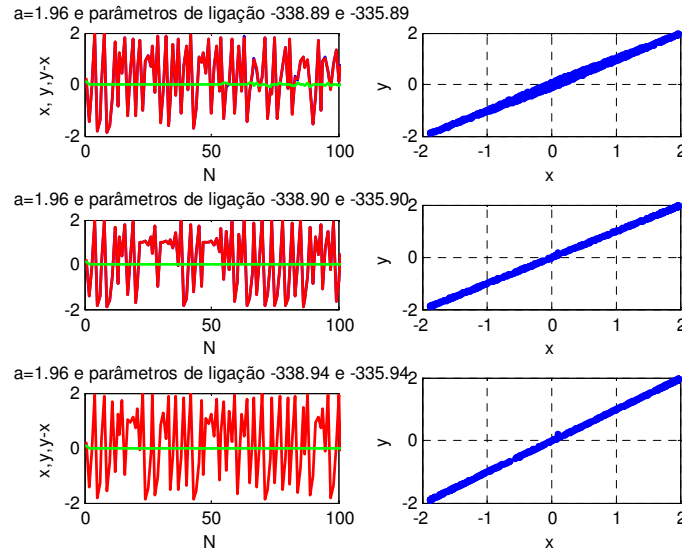


Figura 3.24: Ligação bidireccional em (3.24): (a,c,e) séries temporais, (b) atrator caótico, (d,f) hiperplanos de sincronização

riação da diferença $y - x$ para, respectivamente, os extremos inferior e superior de cada um dos intervalos $I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$. Para $\rho_2 \notin I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, a diferença $y - x$ explode para infinito (considerando o passo de uma centésima). A Tabela 3.9 resume o estudo efectuado para $\rho_1 = 0.1n$, com $n = 0, \dots, 5$.

ρ_1	$I^1(\rho_1)$	$I^2(\rho_1)$	$I_{e,\max}^1(\rho_1)$	$I_{e,\min}^2(\rho_1)$
0	$[-17.89, 0.99]$	$[1.01, 21.89]$	$]-388.0, 387.9[$	$]-387.3, 387.0[$
0.1	$[-17.80, 0.46]$	$[1.74, 22.00]$	$]-39.42, 39.56[$	$]-39.54, 39.58[$
0.2	$[-17.71, 0.30]$	$[2.10, 22.10]$	$]-38.75, 38.80[$	$]-38.67, 38.75[$
0.3	$[-17.61, 0.20]$	$[2.40, 22.21]$	$]-38.63, 38.69[$	$]-38.70, 38.68[$
0.4	$[-17.52, 0.13]$	$[2.67, 22.31]$	$]-34.17, 34.13[$	$]-33.94, 34.09[$
0.5	$[-17.42, 0.08]$	$[2.92, 22.42]$	$]-30.20, 30.22[$	$]-30.19, 30.14[$

Tabela 3.9: Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\min}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$

Quando ρ_1 aumenta de 0 até 0.5 verifica-se que a amplitude dos sucessivos intervalos $I^1(\rho_1)$ e $I^2(\rho_1)$ aos quais corresponde limitação de $y - x$ diminui de 18.88 até 17.5 e de 20.88 até 19.5, respectivamente.

Para todos estes valores de ρ_1 obtêm-se os intervalos $I_{e,\min}^1(\rho_1) =]-0.21, 0.21[$ e $I_{e,\max}^2(\rho_1) =]-0.19, 0.19[$, ambos de amplitude inferior a 1. Assim, para cada valor de ρ_1 considerado, existem intervalos fechados $I_K^1(\rho_1)$ e $I_K^2(\rho_1)$ contidos em $I^1(\rho_1)$ e $I^2(\rho_1)$, respectivamente, de valores de ρ_2 para os quais ocorre sincronização prática em (3.24) no sentido de Kapitaniak. Fixado um valor de ρ_1 , a diferentes valores ρ_2 e ρ_2' no intervalo $I^1(\rho_1) \cup I^2(\rho_1)$ correspondem diferentes intervalos de variação da diferença $y - x$. No entanto, existem intervalos fechados $I_K^i(\rho_1) \subseteq I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, de valores de ρ_2 para os quais os correspondentes intervalos de variação de $y - x$ têm amplitude inferior a 1. Aos intervalos $I_K^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, pertencem os valores de ρ_2 para os quais se obtém sincronização prática em (3.24) com o par de parâmetros de ligação (ρ_1, ρ_2) . Um dos valores do intervalo $I_K^1(\rho_1)$ é o valor mínimo de ρ_2 em $I^1(\rho_1)$ dado que o intervalo $I_{e,\min}^1(\rho_1) =]-0.21, 0.21[$ tem amplitude $0.42 < 1$ e um dos valores do intervalo $I_K^2(\rho_1)$ é o valor máximo de ρ_2 em $I^2(\rho_1)$ dado que o intervalo $I_{e,\max}^2(\rho_1) =]-0.19, 0.19[$ tem amplitude $0.38 < 1$. Por exemplo, para $\rho_1 = 0.1$ tem-se $I_K^1(0.1) = [-17.80, -6.68]$ e $I_K^2(0.1) = [8.88, 22.00]$ e para $\rho_1 = 0.2$ tem-se $I_K^1(0.2) = [-17.71, -6.61]$ e $I_K^2(0.2) = [9.02, 22.10]$. A nota seguinte estabelece a existência de sincronização prática observada.

Nota 5 Para cada $\rho_1 \in [0, 339.1]$ existem intervalos $I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, de valores de ρ_2 , onde a diferença $y - x$ é limitada. Quando ρ_1 aumenta a amplitudes dos intervalos $I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, diminui. Cada um dos intervalos $I^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$, contém um intervalo fechado $I_K^i(\rho_1)$ de valores de ρ_2 para os quais é atingida sincronização prática em (3.24). O extremo inferior (superior) do intervalo $I^1(\rho_1)$ ($I^2(\rho_1)$) é o extremo superior (inferior) do intervalo $I_K^1(\rho_1)$ ($I_K^2(\rho_1)$).

A Tabela 3.10 apresenta os resultados obtidos para alguns valores de ρ_1 .

ρ_1	$I^1(\rho_1)$	$I^2(\rho_1)$	$I_{e,\max}^1(\rho_1)$	$I_{e,\min}^2(\rho_1)$
0.9	$[-17.04, 0.00]$	$[3.80, 22.84]$	$] -38.80, 38.80[$	$] -38.82, 38.82[$
1.0	$[-16.95, -0.01]$	$[4.00, 22.94]$	$] -19.27, 19.27[$	— — —
2.0	$[-16.00, 0.17]$	$[5.83, 23.99]$	$] -41.11, 41.10[$	$] -40.94, 40.81[$
3.0	$[-15.05, 0.53]$	$[7.47, 25.04]$	$] -19.19, 19.10[$	$] -19.19, 19.15[$
10.0	$[-17.52, 0.13]$	$[2.67, 22.31]$	$] -34.17, 34.13[$	$] -33.94, 34.09[$
20.0	$[-17.42, 0.08]$	$[2.92, 22.42]$	$] -30.20, 30.22[$	$] -30.19, 30.14[$

Tabela 3.10: Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\min}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$

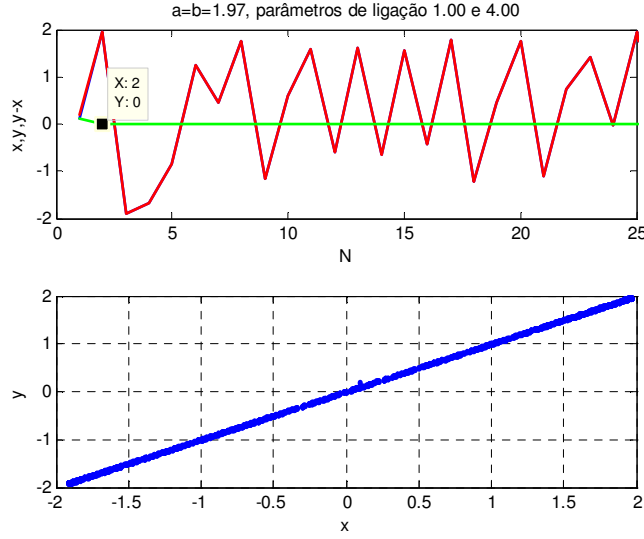


Figura 3.25: Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) hiperplano de sincronização

Os intervalos $I^1(0.9)$ e $I^2(0.9)$ são visíveis na Figura 3.15 dado o traçado bem distinto que se verifica quando $\rho_2 \in]0.00, 3.80[$. Tem-se $I_{e,\min}^1(0.9) = I_{e,\min}^1(1.0) =]-0.21, 0.21[$ enquanto

$$I_{e,\min}^1(2) = I_{e,\min}^1(3) =]-0.22, 0.21[$$

e $I_{e,\min}^1(10) = I_{e,\min}^1(20) =]-0.22, 0.22[$. Quanto a $I_{e,\max}^2(\rho_1)$, tem-se

$$I_{e,\max}^2(0.9) = I_{e,\max}^2(1) = I_{e,\max}^2(2) =]-0.19, 0.19[$$

enquanto $I_{e,\max}^2(3) = I_{e,\max}^2(10) =]-0.19, 0.20[$ e $I_{e,\max}^2(20) =]-0.19, 0.20[$.

Quanto à variação de $y - x$ obtida no extremo inferior do intervalo $I^2(1)$, $\rho_2 = 4.00$, verifica-se que $y - x = 0$ a partir da segunda iterada (Fig. 3.25 a,b) embora para $\rho_2 = 4.01$ se tenha $y - x \in]-19.24, 19.23[$. Esta situação está de acordo com a Proposição 3.3.1. Considere a transformação bidimensional $\mathbf{F}$ já definida por (3.24). Para $\rho_1 = 1$ e $\rho_2 = 4$ os pontos fixos de $\mathbf{F}$ são $P_1(-1.9899, -1.9899)$ e $P_2(0.9899, 0.9899)$, sobre a diagonal principal. Os pontos fixos P_1 e P_2 são instáveis estão associados aos valores próprios

$$\Lambda^{P_1} = 3.9799 + 0.0003i \quad \text{e} \quad \Lambda^{P_2} = -1.9799 + 0.0001i,$$

de multiplicidade algébrica 2, com módulos $3.9799 > 1$ e $1.9799 > 1$, respectivamente.

Os resultados observados para valores de ρ_1 elevados mas inferiores a 360 (Tabelas 3.11 e 3.12) são análogos aos observados para valores positivos de ρ_1 inferiores.

ρ_1	$I^1(\rho_1)$	$I^2(\rho_1)$	$I_{e,\max}^1(\rho_1)$	$I_{e,\min}^2(\rho_1)$
139.0	[113.75, 116.42]	[163.58, 167.55]	]−30.25, 30.30[	]−30.31, 30.17[
139.5	[114.22, 116.87]	[164.13, 168.07]	]−6.32, 6.32[	]−6.30, 6.31[
139.9	[114.60, 117.24]	[164.56, 168.49]	]−8.76, 8.76[	]−8.78, 8.76[

Tabela 3.11: Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\min}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$

ρ_1	$I^1(\rho_1)$	$I^2(\rho_1)$	$I_{e,\max}^1(\rho_1)$	$I_{e,\min}^2(\rho_1)$
240.0	[209.41, 210.01]	[271.99, 273.38]	]−6.24, 6.28[	]−6.20, 6.27[
280.0	[247.29, 247.53]	[314.47, 315.29]	]−7.89, 7.90[	]−7.89, 7.91[
320.0	[285.17, 285.22]	[356.78, 357.21]	]−8.50, 8.50[	]−8.48, 8.49[
399.1	[303.26, 303.26]	[376.93, 377.22]	]−17.55, 17.55[	]−17.53, 17.54[

Tabela 3.12: Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\min}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$

A amplitude de cada um dos intervalos $I^1(320)$ e $I^2(320)$ já é muito reduzida, 0.05 e 0.43, respectivamente. Para $\rho_1 = 339.2$ existe apenas um valor de ρ_2 para o qual ocorre limitação de $y - x$, $\rho_2 = 303.36$ com $y - x \in]-6.22, 6.24[$, e é ainda encontrado o intervalo $I^2(339.2) = [377.32, 377.04]$ de amplitude 0.28. Tem-se $I_{e,\min}^2(339.2) =]-6.23, 6.21[$ e $I_{e,\max}^2(339.2) =]-0.85, 0.85[$. A Tabela 3.13 apresenta alguns resultados para $\rho_1 > 339.2$.

ρ_1	$I^2(\rho_1)$	$I_{e,\min}^2(\rho_1)$	$I_{e,\max}^2(\rho_1)$
360.0	[398.95, 399.12]	]−8.56, 8.57[	]−1.07, 1.07[
400.0	[441.01, 441.03]	]−4.33, 4.34[	]−2.50, 2.50[
410.0	[451.50, 451.51]	]−7.76, 7.76[	]−3.77, 3.77[
415.5	[457.27, 457.28]	]−8.84, 8.83[	]−3.87, 3.86[

Tabela 3.13: Intervalos $I^i(\rho_1)$, $I_{e,\max}^i(\rho_1)$ e $I_{e,\min}^i(\rho_1)$, $i = 1, 2$

Para $\rho_1 = 415.6$ (não existe um intervalo $I^2(\rho_1)$ mas) apenas existe um valor de ρ_2 para o qual ocorre limitação de $y - x$, $\rho_2 = 457.38$ com $y - x \in]-4.96, 4.97[$ (Fig. 3.26 a,b). Para $\rho_1 = 420.7$ não é encontrado qualquer valor de ρ_2 para o qual ocorra limitação da diferença $y - x$. É então possível estabelecer as notas seguintes.

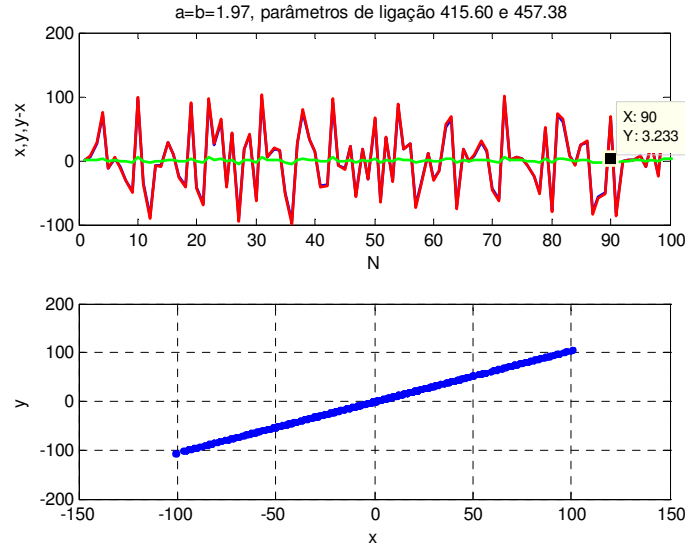


Figura 3.26: Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) atrator caótico

Nota 6 Para cada $\rho_1 \in [339.2, 415.5]$ existe um único intervalo $I^2(\rho_1)$ de valores de ρ_2 , onde a diferença $y - x$ é limitada. Quando ρ_1 aumenta a amplitudes do intervalo $I^2(\rho_1)$ diminui. Para alguns valores de ρ_1 no intervalo $[339.2, 415.5]$ existe um intervalo fechado $I_K^2(\rho_1)$ contido em $I^2(\rho_1)$ para o qual é atingida sincronização prática em (3.24). Nesse caso o extremo inferior (superior) do intervalo $I^1(\rho_1)$ ($I^2(\rho_1)$) é o extremo superior (inferior) do intervalo $I_K^1(\rho_1)$ ($I_K^2(\rho_1)$).

Nota 7 Para cada $\rho_1 \in [415.6, 420.6]$ existe um único valor de ρ_2 para o qual a diferença $y - x$ é limitada. Quando ρ_1 aumenta ρ_2 aumenta. No entanto, não é obtida sincronização prática em (3.24).

Considere agora valores de ρ_1 negativos em passo de uma décima. Para $\rho_1 = -0.1$ já não se observa a existência de dois intervalos distintos onde é limitada a variação da diferença $y - x$. Existe apenas um intervalo onde esta diferença é limitada, a saber, $I(-0.1) = [-17.99, 21.79]$ com $I_{e,\min}(-0.1) =]-0.21, 0.21[$ e $I_{e,\max}(-0.1) =]-0.19, 0.19[$, ambos de amplitude inferior a 1. Em $\rho_2 = 0.94 \in [-17.99, 21.79]$ são obtidos os valores de $y - x$ mais afastados da origem pois $y - x \in]-6.12, 6.13[$. A Tabela 3.14 apresenta os

resultados obtidos para $\rho_1 = -0.1 - 0.1n$ com $n = 1, \dots, 4$.

ρ_1	$I(\rho_1)$	amplitude $I(\rho_1)$
-0.2	$[-18.08, 21.69]$	39.77
-0.3	$[-18.18, 21.58]$	39.76
-0.4	$[-18.27, 21.48]$	39.75
-0.5	$[-18.84, 20.85]$	39.74

Tabela 3.14: Intervalos $I(\rho_1)$ e respectiva amplitude

Para todos estes valores de ρ_1 tem-se ainda $I_{e,\min}(\rho_1) =]-0.21, 0.21[$ e $I_{e,\max}(\rho_1) =]-0.19, 0.19[$. A diminuição progressiva da amplitude de $I(\rho_1)$ na razão de 0.01 por cada diminuição de 0.1 em ρ_1 mantém-se para valores inferiores de ρ_1 . A Tabela 3.15 apresenta resultados para $\rho_1 = -10 - 10n$ com $n = 0, \dots, 3$.

ρ_1	$I(\rho_1)$	amplitude $I(\rho_1)$	$I_{e,\min}(\rho_1)$	$I_{e,\max}(\rho_1)$
-10.0	$[-27.37, 11.42]$	38.79	$] -0.21, 0.20[$	$] -0.19, 0.19[$
-20.0	$[-36.84, 0.94]$	37.78	$] -0.20, 0.20[$	$] -0.18, 0.18[$
-30.0	$[-46.31, -9.54]$	36.77	$] -0.20, 0.19[$	$] -0.18, 0.18[$
-40.0	$[-55.78, -20.02]$	35.76	$] -0.19, 0.19[$	$] -0.17, 0.18[$

Tabela 3.15: Intervalos $I(\rho_1)$, $I_{e,\min}(\rho_1)$ e $I_{e,\max}(\rho_1)$ e amplitude de $I(\rho_1)$

O estudo efectuado para valores de ρ_1 inferiores a -40 revela resultados análogos aos obtidos para os valores anteriores (Tabela 3.16).

ρ_1	$I(\rho_1)$	ampl. $I(\rho_1)$	$I_{e,\min}(\rho_1)$	$I_{e,\max}(\rho_1)$
-300.0	$[-302.02, -292.46]$	9.56	$] -0.12, 0.12[$	$] -0.11, 0.12[$
-390.0	$[-387.26, -386.77]$	0.49	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$
-394.0	$[-391.05, -390.96]$	0.09	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$
-394.5	$[-391.52, -391.48]$	0.04	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$
-394.6	$[-391.62, -391.59]$	0.03	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$
-394.7	$[-391.71, -391.69]$	0.02	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$
-394.8	$[-391.81, -391.80]$	0.01	$] -0.10, 0.11[$	$] -0.10, 0.11[$

Tabela 3.16: Intervalos $I(\rho_1)$, $I_{e,\min}(\rho_1)$ e $I_{e,\max}(\rho_1)$ e amplitude de $I(\rho_1)$

É então possível estabelecer a nota seguinte.

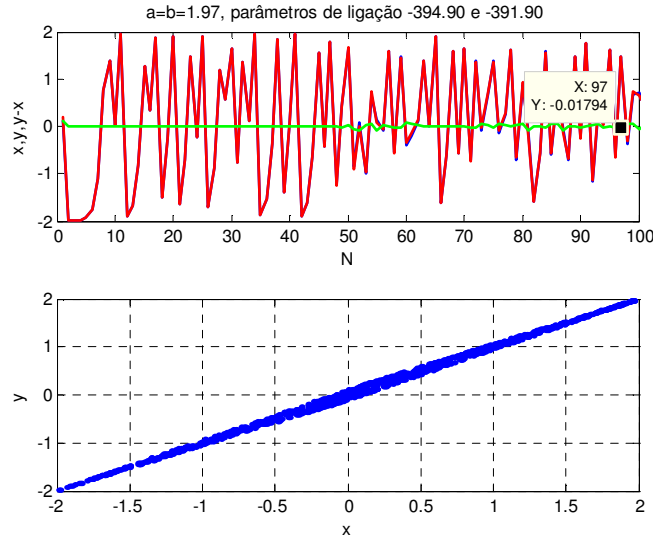


Figura 3.27: Ligação bidireccional em (3.24): (a) séries temporais, (b) atrator caótico

Nota 8 Para cada $\rho_1 \in [-394.8, -0.1]$ existe um único intervalo $I(\rho_1)$ de valores de ρ_2 , de amplitude que varia de 39.78 a 0.01, onde a diferença $y - x$ é limitada. Para $\rho_1 \in [-15.0, -0.1]$ o intervalo $I(\rho_1)$ contém dois intervalos fechados $I_K(\rho_1)$ e $I'_K(\rho_1)$ de valores de ρ_2 para os quais é atingida sincronização prática em (3.24). O extremo inferior (superior) do intervalo $I(\rho_1)$ é o extremo inferior (superior) do intervalo $I_K(\rho_1)$ ($I_K^2(\rho_1)$). Para $\rho_1 \in [-394.0, -15.1]$ é atingida sincronização prática para todos os valores ρ_2 do intervalo $I(\rho_1)$.

É então possível estabelecer a nota seguinte, um caso particular do estabelecido na Proposição 3.3.1.

Nota 9 Para $\rho_1 = -394.90$ existe um único valor de ρ_2 para o qual a diferença $y - x$ é limitada, $\rho_2 = -391.90$. Tem-se $y - x \in]-0.10, 0.11[$ logo é alcançada sincronização prática em (3.24) (Fig. 3.27 a,b).

Para $\rho_1 = -395.00$ não é encontrado qualquer valor de ρ_2 para o qual ocorra limitação da diferença $y - x$.

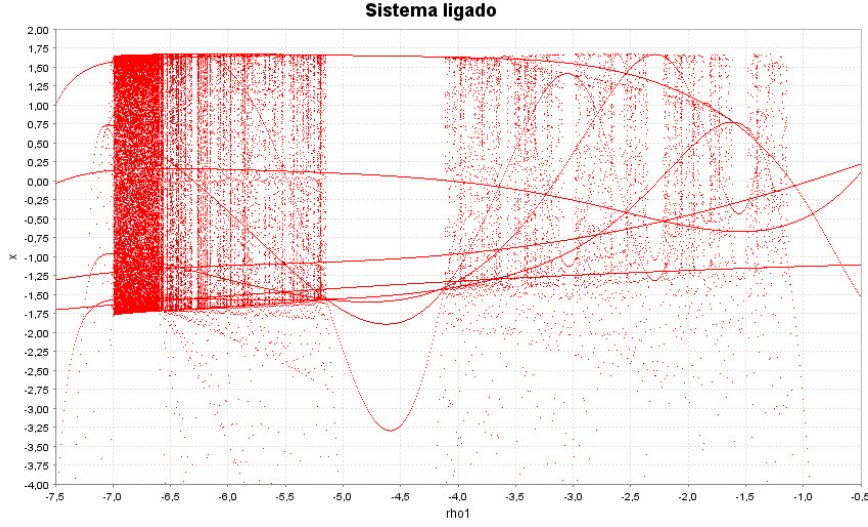


Figura 3.28: Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.23) para $\rho_1 \in [-7.5, -0.5]$ com $\rho_2 = -0.7$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$

3.3.2 Transformações não-idênticas e dois parâmetros ρ_1 e ρ_2

Análise da dinâmica do sistema ligado

O sistema ligado (3.23) corresponde à equação às diferenças $(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{F}(x_n, y_n)$, onde $\mathbf{F}$ é a transformação bidimensional definida por (3.6) com parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2 ,

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(a - x^2 + \rho_1 (x - y)^2, b - y^2 + \rho_2 (x - y)^2 \right).$$

Dado que $a \neq b$ e $\rho_1 \neq \rho_2$, esta ligação é a que apresenta o mais elevado grau de assimetria de entre as consideradas.

Considere fixados os valores paramétricos distintos $a = 1.67$ e $b = 1.97$, ambos de valor superior a $a^* \simeq 1.565$. Seguem-se os diagramas de bifurcação obtidos em função de ρ_1 (Fig. 3.28), fixando $\rho_2 = -0.70$, e em função de ρ_2 (Fig. 3.29), fixando $\rho_1 = -7.00$, onde é visível uma região de caos.

Estabilidade local da sincronização

A equação geral de anulação da diferença $y - x$ entre as variáveis

$$y_{n+1} - x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow b - a + [x_n + y_n + (\rho_2 - \rho_1)(x_n - y_n)](x_n - y_n) = 0$$

não permite obter uma relação que garanta a sincronização do sistema ligado (3.23).

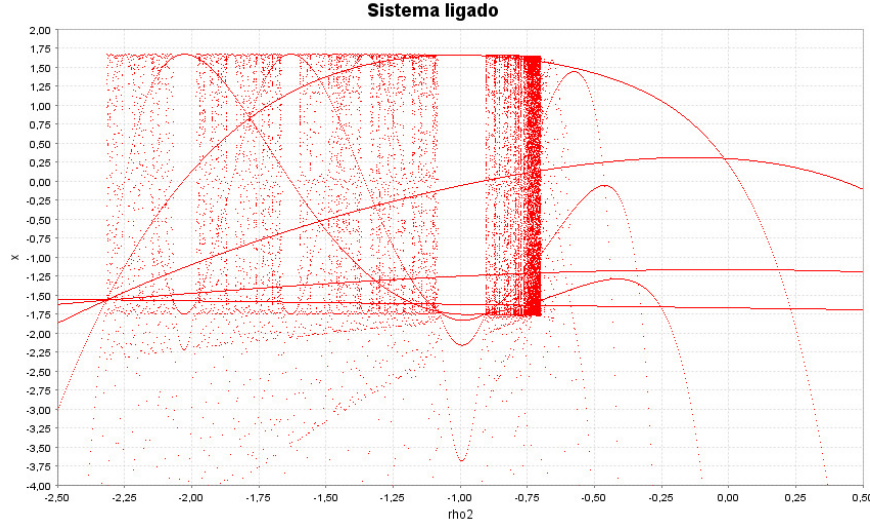


Figura 3.29: Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.23) para $\rho_2 \in [-2.5, 0.5]$ com $\rho_1 = -7.00$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$

Para o estudo da estabilidade transversal do atrator caótico $\mathcal{A}$ de (3.23), considere as variáveis (3.10). O sistema ligado (3.23) é então reescrito como

$$\begin{cases} u_{n+1} = a + b - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + (\rho_1 + \rho_2)v_n^2 \\ v_{n+1} = b - a - u_nv_n + (\rho_2 - \rho_1)v_n^2. \end{cases}$$

Para $a = 1.67$ e $b = 1.97$, que conduzem a comportamento caótico das transformações, tem-se o sistema transversal

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3.64 - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + (\rho_1 + \rho_2)v_n^2 \\ v_{n+1} = 0.3 - u_nv_n + (\rho_2 - \rho_1)v_n^2. \end{cases}$$

Os pontos fixos do sistema transversal, as soluções de

$$\begin{cases} 3.64 - 0.5(u^2 + v^2) + (\rho_1 + \rho_2)v^2 = u \\ 0.3 - uv + (\rho_2 - \rho_1)v^2 = v, \end{cases}$$

são $P'_1(u_+, v_+)$ e $P'_2(u_-, v_-)$ de coordenadas

$$v_{\pm} = \left[\frac{0.6(\rho_2 - \rho_1) - 8.28}{2A} \pm \left(\frac{(8.28 - 0.6(\rho_2 - \rho_1))^2}{4A^2} + \frac{0.09}{A} \right)^{1/2} \right]^{1/2}$$

e

$$u_{\pm} = \frac{3}{10v_{\pm}} + (\rho_2 - \rho_1) v_{\pm} - 1,$$

e $P'_3(-0.3/v_+ - (\rho_2 - \rho_1) v_+ - 1, -v_+)$ e $P'_4(-0.3/v_- - (\rho_2 - \rho_1) v_- - 1, -v_-)$ (obtido das mesmas coordenadas), em que $A \equiv 2(\rho_1 + \rho_2) - 1 - (\rho_2 - \rho_1)^2 \neq 0$. Os pontos $P'_1(u_+, v_+)$ e $P'_3(-0.3/v_+ - (\rho_2 - \rho_1) v_+ - 1, -v_+)$ estão definidos como números reais sempre que $A > 0$ ou $A < -(63.8888 - 4.6296(\rho_2 - \rho_1))^2 < 0$. Os pontos fixos $P'_2(u_-, v_-)$ e $P'_4(-0.3/v_- - (\rho_2 - \rho_1) v_- - 1, -v_-)$ estão definidos como números reais sempre que $A < -(63.8888 - 4.6296(\rho_2 - \rho_1))^2 < 0$ e $\rho_2 - \rho_1 < 13.8$. Se $2(\rho_1 + \rho_2) - 1 - (\rho_2 - \rho_1)^2 = 0$ os pontos fixos do sistema transversal são

$$(3.28) \quad P'_1(u, v) = \left(\frac{3}{10} \sqrt{\frac{B}{0.045}} - 1 + (\rho_2 - \rho_1) \sqrt{\frac{0.045}{B}}, \sqrt{\frac{0.045}{B}} \right)$$

e

$$(3.29) \quad P'_2(u, v) = \left(-\frac{3}{10} \sqrt{\frac{B}{0.045}} - 1 - (\rho_2 - \rho_1) \sqrt{\frac{0.045}{B}}, -\sqrt{\frac{0.045}{B}} \right)$$

onde $B \equiv 4.14 - 0.3(\rho_2 - \rho_1)$. Neste caso os pontos fixos estão bem definidos como números reais para $\rho_2 < \rho_1 + 13.8$.

A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(u, v) = \begin{bmatrix} -u & -v + 2(\rho_1 + \rho_2)v \\ -v & -u + 2(\rho_2 - \rho_1)v \end{bmatrix}$$

da transformação bidimensional

$$\mathbf{L}(u, v) = (3.64 - 0.5(u^2 + v^2) + (\rho_1 + \rho_2)v^2, 0.3 - uv + (\rho_2 - \rho_1)v^2),$$

definida pelo sistema transversal, tem por valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = \rho_2 - \rho_1 - 2u \pm \sqrt{v^2 [1 - 2(\rho_1 + \rho_2)] + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_1 - 2u + 2uv)}.$$

A Tabela 3.17 apresenta os pontos fixos P'_1 , P'_2 , P'_3 e P'_4 do sistema transversal, e os respectivos valores próprios para os pares de parâmetros de controle $(\rho_1, \rho_2) = (-7.00, -0.70)$ e $(\rho_1, \rho_2) = (9.53, 16.70)$. Note que para $(\rho_1, \rho_2) = (9.53, 16.70)$ os pontos fixos são dados por (3.28) e (3.29).

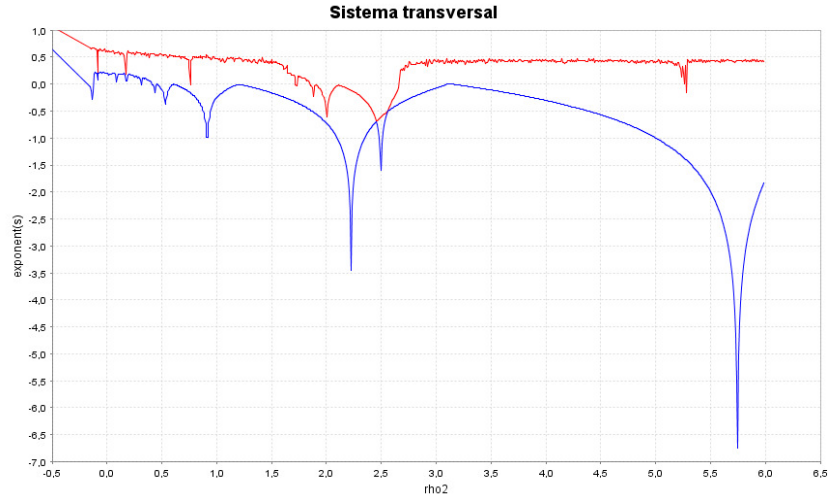


Figura 3.30: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ_2 para $\rho_2 \in [-0.5, 6.5]$ com $\rho_1 = 9.53$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$

P'_i e $\Lambda_{\pm}^{P'_i}$	$(\rho_1, \rho_2) = (-7.00, -0.70)$	$(\rho_1, \rho_2) = (9.53, 16.70)$
P'_1	(1.7671, 0.1948)	(2.0730, 0.1503)
P'_2	(1.7544, 0.2055)	não definido
P'_3	(-3.7671, -0.1948)	(-4.0730, -0.1503)
P'_4	(-3.7544, -0.2055)	não definido
$\Lambda_{+}^{P'_1}, \Lambda_{-}^{P'_1}$	7.49700, -1.9656	8.0225, -1.9749
$\Lambda_{+}^{P'_2}, \Lambda_{-}^{P'_2}$	7.5682, -1.9860	não definido
$\Lambda_{+}^{P'_3}, \Lambda_{-}^{P'_3}$	23.6846, 3.9840	26.1530, 4.4793
$\Lambda_{+}^{P'_4}, \Lambda_{-}^{P'_4}$	23.6787, 3.9391	não definido

Tabela 3.17: Pontos fixos P'_i e valores próprios $\Lambda_{\pm}^{P'_i}$ para $i = 1, \dots, 4$

Tomando condições iniciais $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$ e $\rho_1 = 9.53$, verifica-se que o expoente de Lyapunov transversal λ_v , assim como o tangencial λ_u , é positivo para alguns intervalos de valores de ρ_2 e negativos noutros (Fig. 3.30). Como tal apenas é alcançada sincronização estável para alguns valores das forças de ligação. Para as mesmas condições iniciais, tomando $\rho_1 = -7$ obtêm-se conclusões análogas (Fig. 3.31)

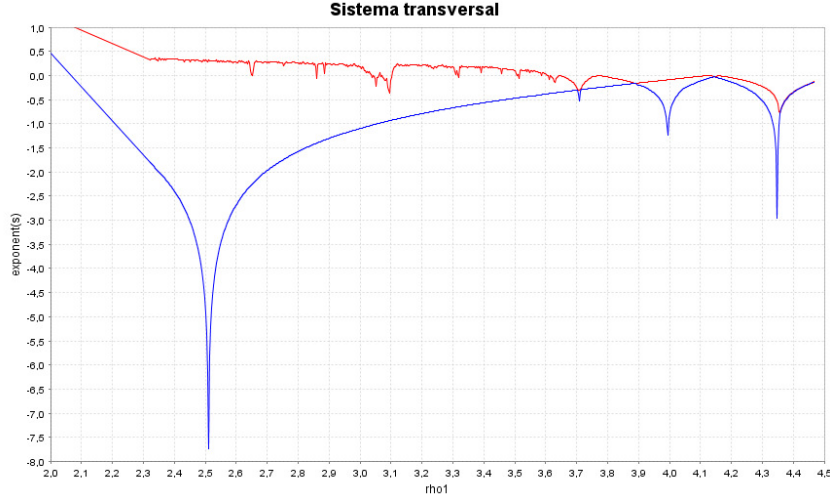


Figura 3.31: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal versus ρ_1 para $\rho_1 \in [2, 4.5]$ com $\rho_2 = -7$, $a = 1.67$ e $b = 1.97$

Abordagem computacional

No estudo computacional da ligação em (3.23), que se resume em seguida, foram tomados $a = 1.67$ e $b = 1.97$ e efectuadas $N = 2000$ iterações a partir de condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$.

Considere valores de ρ_2 não-positivos em passo de uma décima. Para cada valor de ρ_2 no intervalo $[-0.7, 0]$ é possível determinar um intervalo $I(\rho_2)$ de valores de ρ_1 para o qual é limitada a diferença $y - x$ entre as variáveis. Para $\rho_1 \notin I(\rho_2)$ a diferença $y - x$ explode para infinito (considerando o passo de uma centésima).

Sejam $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ os intervalos de variação da diferença $y - x$ para, respectivamente, os extremos inferior e superior do intervalo $I(\rho_2)$. As Tabelas 3.18 e 3.19 resumem o estudo efectuado para $\rho_2 = -0.7 + 0.1n$, $n = 1, \dots, 7$, quando a amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ é, respectivamente, inferior ou superior a 1.

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$
-0.7	$[-7.00, -6.60]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -0.27, 0.33[$
-0.6	$[-6.91, -5.50]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -0.36, 0.32[$
-0.5	$[-6.82, -4.40]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -0.47, 0.33[$

Tabela 3.18: Intervalos $I(\rho_2)$ com amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ inferior a 1

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$
-0.4	$[-6.74, -3.30]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -0.65, 0.41[$
-0.3	$[-6.65, -2.20]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -0.99, 0.67[$
-0.2	$[-6.56, -1.10]$	$] -0.21, 0.34[$	$] -1.61, 1.20[$
-0.1	$[-6.48, 0]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -3.34, 2.84[$
0	$[-6.39, 1.10]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -39.69, 39.08[$

Tabela 3.19: Intervalos $I(\rho_2)$ com amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ superior a 1

Quando ρ_2 aumenta de -0.7 até 0 verifica-se que a amplitude dos sucessivos intervalos $I(\rho_2)$ aumenta de 0.4 até 7.49 e os sucessivos extremos superiores de $I(\rho_2)$ distam entre si de 1.1 , $\max I(\rho_2 + 0.1) = 1.1 + \max I(\rho_2)$. Para $\rho_2 = -0.8$ a diferença $y - x$ explode para infinito para qualquer valor de ρ_1 tomado (considerando o passo de uma centésima).

Fixado um valor de ρ_2 no intervalo $[-0.7, 0]$, a diferentes valores ρ_1 e ρ'_1 no intervalo $I(\rho_2)$ correspondem diferentes intervalos de variação da diferença $y - x$. No entanto, existe um intervalo fechado $I_K(\rho_2) \subseteq I(\rho_2)$ de valores de ρ_1 para o qual os correspondentes intervalos de variação de $y - x$ têm amplitude inferior a 1 . Ao intervalo $I_K(\rho_2)$ pertencem os valores de ρ_1 para os quais se obtém sincronização prática em (3.23) com o par de parâmetros de ligação (ρ_1, ρ_2) . Um dos valores do intervalo $I_K(\rho_2)$ é o valor mínimo de ρ_1 em $I(\rho_2)$: se $-0.7 \leq \rho_2 \leq -0.2$ o erro de sincronização $e = y - x$ varia no intervalo $I_{e,\min}(\rho_2) =]-0.21, 0.34[$ de amplitude $0.55 < 1$ e, se $-0.1 \leq \rho_2 \leq 0$, e varia no intervalo $I_{e,\min}(\rho_2) =]-0.20, 0.34[$ de amplitude $0.54 < 1$. Além disso, para $\rho_2 = -0.7 + 0.1n$, com $n = 1, \dots, 4$, tem-se mesmo $I_K(\rho_2) = I(\rho_2)$ enquanto para $\rho_2 = -0.2$ e $\rho_2 = -0.1$ o intervalo $I_K(\rho_2)$ está estritamente contido em $I(\rho_2)$, $I_K(-0.2) = [-6.56, -3.81] \subset [-6.56, -1.10]$ e $I_K(-0.1) = [-6.84, -3.15] \subset [-6.48, 0]$. A nota seguinte estabelece a existência da sincronização prática observada.

Nota 10 Para cada $\rho_2 \in [-0.7, 0]$ existe um intervalo fechado $I_K(\rho_2) \subseteq I(\rho_2)$ de valores de ρ_1 para o qual é atingida sincronização prática em (3.23). A amplitude do intervalo $I(\rho_2)$ aumenta quando ρ_2 aumenta.

A amplitude do intervalo $I_{e,\max}(\rho_2)$ aumenta de 0.6 a 6.18 quando ρ_2 varia de -0.7 a -0.1 . A Figura 3.32 (a-d) ilustra os resultados obtidos para $\rho_2 = -0.7$. São obtidas as menores variações do erro de sincronização com o par de parâmetros de ligação $(\rho_1, \rho_2) = (-7.00, -0.70)$, conforme estabelece a nota seguinte.

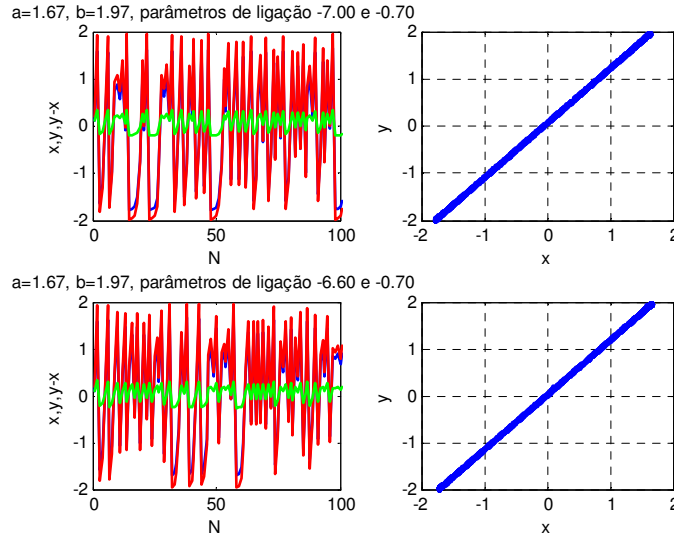


Figura 3.32: Ligação bidireccional em (3.23): (a,c) séries temporais, (b,d) atractores caóticos

Nota 11 Se $\rho_1 = -7.00$ e $\rho_2 = -0.70$ é atingida sincronização prática em (3.23) com a menor variação do erro de sincronização, pois e varia no intervalo $I_{e,\min}(-0.7) =]-0.21, 0.34[$ de amplitude minimal 0.55.

Considere agora valores de ρ_2 positivos. Para $\rho_2 = 0.1$ tem-se $I(0.1) = [-6.30, 0.46]$ de amplitude 6.76 inferior à amplitude 7.49 obtida para $\rho_2 = 0$. Na verdade, o aumento progressivo da amplitude de $I(\rho_2)$ verificada para $\rho_2 \leq 0$ dá lugar, para $\rho_2 > 0$, a uma progressiva diminuição. A nota seguinte estabelece a existência de sincronização prática em (3.23) para $\rho_2 > 0$.

Nota 12 Para cada $\rho_2 \in [0.1, 59.5]$ existe um intervalo fechado $I_K(\rho_2) \subseteq I(\rho_2)$ de valores de ρ_1 para o qual é atingida sincronização prática em (3.23). A amplitude do intervalo $I(\rho_2)$ diminui quando ρ_2 aumenta.

A Tabela 3.20 resume o estudo efectuado para $\rho_2 = 0.1n$, $n = 1, \dots, 9$. Da última coluna consta o maior valor de ρ_1 no intervalo $I(\rho_2)$ para o qual se obtem um intervalo

de variação de $y - x$ com amplitude inferior a 1, ou seja, o extremo superior de $I_K(\rho_2)$.

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$
0.1	$[-6.30, 0.46]$	$] -0.20, 0.33[$	$] -36.11, 35.47[$	-2.99
0.2	$[-6.22, 0.30]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -33.83, 33.41[$	-2.95
0.3	$[-6.13, 0.20]$	$] -0.20, 0.33[$	$] -32.77, 32.29[$	-2.92
0.4	$[-6.04, 0.13]$	$] -0.20, 0.33[$	$] -28.12, 27.63[$	-2.77
0.5	$[-5.96, 0.08]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -24.34, 23.89[$	-2.71
0.6	$[-5.87, 0.05]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -60.61, 59.96[$	-2.63
0.7	$[-5.78, 0.02]$	$] -0.20, 0.34[$	$] -19.92, 19.46[$	-2.61
0.8	$[-5.70, 0.01]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -45.43, 44.97[$	-2.56
0.9	$[-5.61, 0]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -28.50, 28.12[$	-2.42

Tabela 3.20: Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$

Tem-se $I_{e,\max}(0.1) =] -36.11, 35.47[\subset] -39.69, 39.08[= I_{e,\max}(0)$ e, conforme é evidenciado pela quarta coluna, continua a inverter-se a tendência de aumento da diferença $y - x$ com ρ_2 verificada para $-0.7 \leq \rho_2 < 0$: para $0 \leq \rho_2 \leq 0.5$ a amplitude do intervalo $I_{e,\max}(\rho_2)$ diminui quando ρ_2 aumenta. Esta é a primeira evidência numérica para a possibilidade de obter sincronização prática em (3.23) quando $\rho_2 > 0$. Conforme se expõe de seguida existem pares de parâmetros de ligação (ρ_1, ρ_2) para os quais é também alcançada sincronização assintótica. Embora, em $\rho_2 = 0.6$ e $\rho_2 = 0.8$ se observe um aumento da amplitude do intervalo $I_{e,\max}(\rho_2)$, volta a observar-se a diminuição da amplitude de $I_{e,\max}(\rho_2)$ para alguns valores de ρ_2 superiores a 0.9. Além disso, para valores de ρ_2 superiores a 1 o $\max I_K(\rho_2)$ aumenta ou mantém-se, contrariamente ao verificado para os anteriores valores de ρ_2 . Nota-se no entanto que a amplitude dos intervalos $I(\rho_2)$ e $I_K(\rho_2)$ continua a diminuir. Prosseguindo com valores de ρ_2 superiores a 0.9, apresenta-se a Tabela 3.21 com os valores obtidos para $\rho_2 = 0.9 + 0.1n$, com $n = 1, \dots, 7$.

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$
1.0	$[-5.53, -0.01]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -13.93, 14.09[$	-2.31
1.1	$[-5.44, 0]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -27.59, 26.91[$	-2.24
1.2	$[-5.35, 0]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -13.65, 13.25[$	-2.21
1.3	$[-5.27, 0.01]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -12.76, 12.29[$	-2.10
1.4	$[-5.18, 0.03]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -20.23, 19.88[$	-2.01
1.5	$[-5.09, 0.05]$	$] -0.19, 0.34[$	$] -51.51, 51.14[$	-1.95

Tabela 3.21: Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$

O estudo efectuado para valores superiores de ρ_2 , confirma a tendência de resultados verificada para $\rho_2 = 1.2 + 0.1n$, $n = 1, \dots, 4$: o aumento progressivo tanto de $\max I(\rho_2)$ como de $\min I(\rho_2)$, a diminuição da amplitude de $I(\rho_2)$ e o aumento do valor máximo de $I_K(\rho_2)$.

A partir de $\rho_2 = 2.4$ começa então a tornar-se mais evidente a diminuição da amplitude do intervalo $I_{e,\max}(\rho_2)$. As Tabelas 3.22 e 3.23 apresentam os resultados obtidos para $\rho_2 = 2.4 + 0.1n$, $n = 1, \dots, 7$, e $\rho_2 = 3.5 + 0.1n$, $n = 1, \dots, 7$.

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$
2.5	$[-4.23, 0.33]$	$] -0.17, 0.34[$	$] -5.63, 6.45[$	-1.26
2.6	$[-4.14, 0.37]$	$] -0.17, 0.34[$	$] -6.66, 7.44[$	-1.19
2.7	$[-4.05, 0.41]$	$] -0.17, 0.34[$	$] -7.34, 8.22[$	-1.11
2.8	$[-3.97, 0.45]$	$] -0.17, 0.34[$	$] -7.40, 8.11[$	-1.01
2.9	$[-3.88, 0.49]$	$] -0.17, 0.34[$	$] -6.27, 6.94[$	-0.91
3.0	$[-3.80, 0.53]$	$] -0.16, 0.34[$	$] -4.92, 5.55[$	-0.82
3.1	$[-3.71, 0.57]$	$] -0.16, 0.34[$	$] -3.80, 4.39[$	-0.74

Tabela 3.22: Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$I_{e,\max}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$
3.6	$[-3.28, 0.80]$	$] -0.16, 0.34[$	$] -2.19, 1.37[$	-0.34
3.7	$[-3.19, 0.85]$	$] -0.16, 0.34[$	$] -2.01, 1.47[$	-0.28
3.8	$[-3.10, 0.90]$	$] -0.16, 0.34[$	$] -1.35, 1.06[$	-0.24
3.9	$[-3.02, 0.95]$	$] -0.15, 0.34[$	$] -1.27, 1.18[$	-0.12
4.0	$[-2.93, 1.00]$	$] -0.15, 0.34[$	$] -2.47, 2.39[$	-0.05
4.1	$[-2.84, 1.05]$	$] -0.15, 0.34[$	$] -0.64, 1.01[$	0.04
4.2	$[-2.76, 1.10]$	$] -0.15, 0.34[$	$] -0.54, 0.78[$	0.11

Tabela 3.23: Intervalos $I(\rho_2)$, $I_{e,\min}(\rho_2)$ e $I_{e,\max}(\rho_2)$ e $\max I_K(\rho_2)$

Para $\rho_2 = 4.3$ tem-se $I(4.3) = [-2.67, 1.16]$. Para $\rho_1 = \max I(4.3) = 1.16$ o sistema ligado (3.23) tem o ponto periódico (x^*, y^*) de período 4 (Fig. 3.33 a,b) cuja órbita

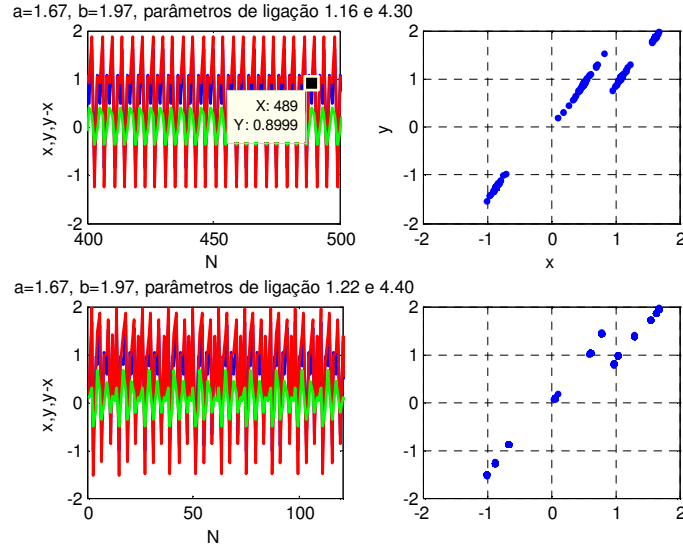


Figura 3.33: Ligação bidireccional em (3.23): (a,c) séries temporais, (b,d) atractores periódicos

$O(x^*, y^*)$ é constituída por

$$\begin{aligned} (x_1^*, y_1^*) &= (-0.8632, -1.235), & (x_2^*, y_2^*) &= (1.085, 1.039) \\ (x_3^*, y_3^*) &= (0.4956, 0.8999) & \text{e} & (x_4^*, y_4^*) &= (1.614, 1.863). \end{aligned}$$

O erro de sincronização oscila entre os valores -0.3718 , -0.046 , 0.4043 e 0.249 .

Para $\rho_2 = 4.4$ tem-se $I(4.4) = [-2.58, 1.22]$. Para $\rho_1 = \max I(4.4) = 1.22$ o sistema ligado (3.23) tem o ponto periódico (x^*, y^*) de período 12 (Fig. 3.33 c,d). O erro de sincronização tem valor minimal -0.504 e valor maximal 0.6685 . Ocorre também comportamento periódico em $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$ para grande número de valores de ρ_2 tomados acima de 4.4. Seguem-se algumas tabelas (Tabelas 3.24 e 3.25) agrupadas pelos valores de ρ_2 acima de 4.4 em que ocorre comportamento periódico em $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$ com o mesmo período. Em alternativa ao intervalo $I_{e,\max}(\rho_2)$, é agora possível indicar nas últimas colunas os valores maximal $\bar{e}(\rho_2)$ e minimal $\underline{e}(\rho_2)$ do erro de sincronização para

$$\rho_1 = \max I(\rho_2).$$

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$	$\underline{e}(\rho_2)$	$\bar{e}(\rho_2)$
4.5	$[-2.50, 1.27]$	$] -0.15, 0.34[$	0.29	-0.3922	0.4255
4.6	$[-2.41, 1.32]$	$] -0.15, 0.35[$	0.36	-0.4125	0.4460
4.7	$[-2.33, 1.38]$	$] -0.14, 0.35[$	0.47	-0.4177	0.4512
4.8	$[-2.24, 1.43]$	$] -0.14, 0.35[$	0.55	-0.4437	0.4774
4.9	$[-2.15, 1.49]$	$] -0.14, 0.35[$	0.63	-0.4498	0.4836
5.0	$[-2.07, 1.54]$	$] -0.14, 0.35[$	0.72	-0.4851	0.5191
5.2	$[-1.89, 1.65]$	$] -0.14, 0.35[$	0.84	-0.5444	0.5787
5.4	$[-1.72, 1.76]$	$] -0.14, 0.35[$	1.02	-0.6431	0.6777
5.5	$[-1.63, 1.81]$	$] -0.14, 0.35[$	1.08	-0.9134	0.9482
5.6	$[-1.55, 1.87]$	$] -0.13, 0.35[$	1.14	-0.8898	0.9248
5.7	$[-1.46, 1.92]$	$] -0.13, 0.35[$	1.24	-0.8012	0.6243
5.8	$[-1.37, 1.98]$	$] -0.13, 0.35[$	1.96	-0.5564	0.3474

Tabela 3.24: Pontos de período 4 para $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_{e,\min}(\rho_2)$	$\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$	$\underline{e}(\rho_2)$	$\bar{e}(\rho_2)$
5.9	$[-1.29, 2.05]$	$] -0.13, 0.35[$	2.03	-0.6132	0.3725
6.0	$[-1.20, 2.12]$	$] -0.13, 0.35[$	2.09	-0.2143	0.2143
6.1	$[-1.11, 2.19]$	$] -0.13, 0.35[$	2.16	-0.2150	0.2150

Tabela 3.25: Pontos de período 2 para $\rho_1 = \max I_K(\rho_2)$

Nota-se que para alguns dos valores de ρ_2 da Tabela 3.23 também se observa comportamento periódico em $\rho_1 = \min I(\rho_2)$: período 12 para $\rho_2 = 4.7$, período 6 para $\rho_2 = 4.8$, período 4 para $\rho_2 = 4.9$ e período 3 para $\rho_2 = 5.0$, $\rho_2 = 5.2$ e $\rho_2 = 5.4$.

Para $\rho_2 = 5.1$ tem-se $I(5.1) = [-1.98, 1.60]$ e, quando $\rho_1 = \max I(5.1) = 1.60$, observa-se comportamento periódico de período 20 com $\bar{e}(5.1) = 0.8381$ e $\underline{e}(5.1) = -0.6374$. Para $\rho_2 = 5.3$ tem-se $I(5.3) = [-1.81, 1.71]$ e, quando $\rho_1 = \max I(5.3) = 1.71$, observa-se comportamento periódico de período 24 com $\bar{e}(5.3) = 0.9840$ e $\underline{e}(5.3) = -0.7463$. Para $\rho_1 = \min I(5.3) = -1.81$ também se observa comportamento periódico de período 3.

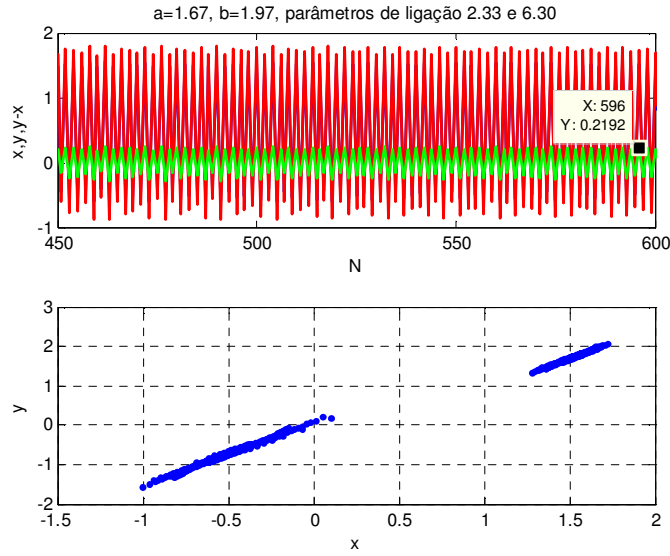


Figura 3.34: Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) atrator periódico

Quando $\rho_2 = 6.3$ obtém-se sincronização prática em (3.23) (Fig. 3.34 a,b) para todos os valores do parâmetro ρ_1 no intervalo $I(\rho_2)$, ou seja, $I_K(\rho_2) = I(\rho_2)$. O mesmo acontece para $\rho_2 > 6.3$.

O estudo computacional para valores de ρ_2 acima de 6.3 revela observações análogas às obtidas para os valores positivos de ρ_2 já descritos.

Em $\rho_2 = 16.7$ obtém-se o primeiro valor de ρ_2 para o qual é alcançada estabilização do erro de sincronização em (3.23) para valores de ρ_1 num intervalo fechado $I_A(\rho_2) \subseteq I_K(\rho_2) = I(\rho_2)$. Tem-se $I(16.7) = [8.05, 9.54]$. Para $\rho_1 = \min I(16.7) = 8.05$ o sistema ligado (3.23) tem um ponto periódico (x^*, y^*) estável de período 4 (Fig. 3.35 a,b) cuja órbita $O(x^*, y^*)$ é constituída por

$$\begin{aligned} (x_1^*, y_1^*) &= (-0.3566, -0.3426), & (x_2^*, y_2^*) &= (1.544, 1.856) \\ (x_3^*, y_3^*) &= (0.06573, 0.1458) & \text{e} & (x_4^*, y_4^*) = (1.717, 2.056). \end{aligned}$$

Como tal o erro de sincronização oscila entre os valores 0.014, 0.312, 0.08007 e 0.339. No entanto, em $\rho_1 = \max I(16.7) = 9.54$, o erro de sincronização estabiliza no valor $\bar{e}(\rho_2) = \underline{e}(\rho_2) = 0.1502$ a partir de um número muito elevado de iterações (Figs. 3.36 obtida para $N = 28000$).

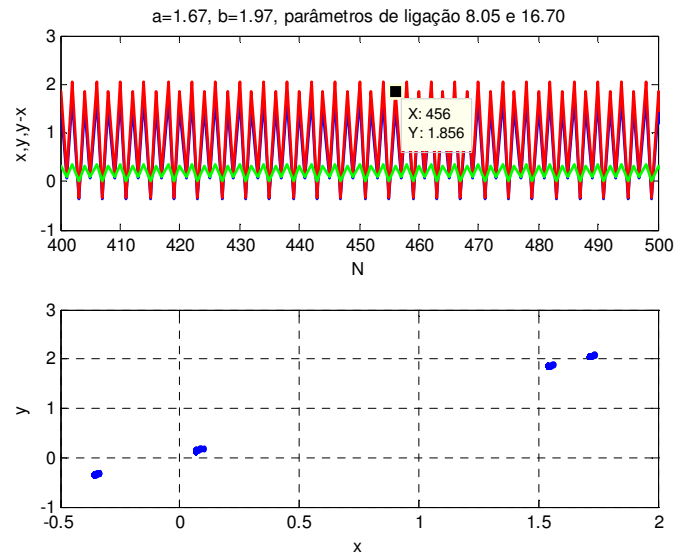


Figura 3.35: Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) atrator periódico

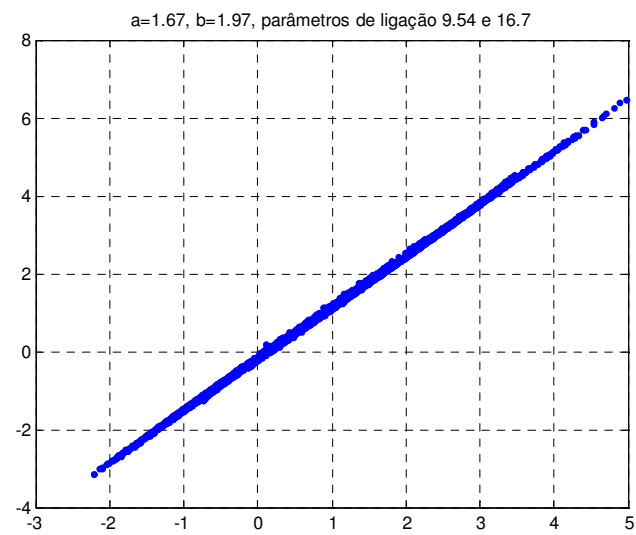


Figura 3.36: Ligação bidireccional em (3.23): hiperplano de sincronização

Seja $\mathbf{F}$ a transformação bidimensional

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(a - x^2 + \rho_1 (x - y)^2, b - y^2 + \rho_2 (x - y)^2 \right)$$

obtida do sistema ligado (3.23). Os pontos fixos de (3.23) são as soluções da equação $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$. Averiguamos a estabilidade local dos pontos fixos pelo estudo dos valores próprios da matriz Jacobiana de $\mathbf{F}$,

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 2\rho_1 (x - y) - 2x & -2\rho_1 (x - y) \\ 2\rho_2 (x - y) & -2y - 2\rho_2 (x - y) \end{bmatrix},$$

calculada em cada um deles. Para $\rho_1 = 9.54$ e $\rho_2 = 16.7$ os pontos fixos encontrados são

$$P_1(-1.9612, -2.1114) \quad \text{e} \quad P_2(0.9612, 1.1114).$$

O ponto fixo P_1 é instável dado que os seus valores próprios, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 2.9972 + 0.0695i$ têm módulo superior a 1,

$$|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = 2.9980.$$

O ponto fixo P_2 é estável dado que os seus valores próprios, $\Lambda_1 = \Lambda_2 = -0.9972 + 0.0695i$ têm módulo inferior a 1,

$$|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = 0.9996.$$

No entanto, $\rho_1 = 9.53$ é o primeiro valor de ρ_1 para o qual é alcançada estabilização do erro de sincronização, embora este estabilize no valor $\bar{e}(\rho_2) = \underline{e}(\rho_2) = 0.1504$, superior a 0.1502 obtido para $\rho_1 = 9.54$. Contudo, a estabilização do erro ocorre a partir de um número menos elevado de iterações que o observado para $\rho_1 = 9.54$ (aproximadamente 2119 iterações).

Em $\rho_2 = 31.0$ encontra-se o primeiro valor inteiro de ρ_2 para o qual é alcançada estabilização do erro de sincronização para todos os valores de ρ_1 no intervalo $I(\rho_2)$, ou seja, para o qual $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$. Tem-se $I(\rho_2) = I_A(\rho_2) = [20.42, 21.55]$ em que o erro estabiliza em $e = 0.283$ com $x = 1.368$ e $y = 1.669$ para $\rho_1 = 20.42$, e estabiliza em $\bar{e}(\rho_2) = \underline{e}(\rho_2) = 0.172$ com $x = 1.099$ e $y = 1.271$ para $\rho_1 = 21.55$.

A nota seguinte estabelece a possibilidade de obter estabilização do erro de sincronização.

Nota 13 Para cada $\rho_2 \in [16.7, 30.9]$ existe um intervalo fechado $I_A(\rho_2) \subset I(\rho_2)$ de valores de ρ_1 para o qual é atingida estabilização do erro de sincronização num valor próximo de 0. Para cada $\rho_2 \in [31.0, 59.4]$ é atingida estabilização do erro de sincronização num valor próximo de 0 para todo o $\rho_1 \in I(\rho_2)$.

A Tabela 3.26 apresenta os resultados obtidos para alguns valores de ρ_2 superiores a 16.7 e inferiores a 31.0 para os quais $I_A(\rho_2) \subset I(\rho_2)$.

ρ_2	$I(\rho_2)$	$I_A(\rho_2)$	$\bar{e}(\rho_2)$	$\underline{e}(\rho_2)$
17.0	[8.31, 9.79]	[9.76, 9.79]	0.1506	0.1512
18.0	[9.18, 10.63]	[10.51, 10.63]	0.1542	0.1518
20.0	[10.91, 12.63]	[12.02, 12.63]	0.1544	0.1609
30.0	[19.55, 20.69]	[19.56, 20.69]	0.1706	0.2737

Tabela 3.26: Intervalos $I_A(\rho_2) \subset I(\rho_2)$ e valores extremos de e

Para os valores de ρ_2 na Tabela 3.26 observa-se comportamento periódico em $\rho_1 = \min I(\rho_2)$: período 4 para $(\rho_1, \rho_2) = (8.31, 17.0)$ com erro a oscilar entre 0.3379, 0.01878, 0.3149 e 0.07486, período 2 para $(\rho_1, \rho_2) = (9.18, 18.0)$, $(\rho_1, \rho_2) = (10.91, 20.0)$ e $(\rho_1, \rho_2) = (19.55, 30.0)$ com erros mínimo e máximo dados, respectivamente, por 0.04583 e 0.3286, 0.06092 e 0.3341 e 0.2701 e 0.299.

A Tabela 3.27 apresenta os resultados obtidos para alguns valores de ρ_2 superiores a 31.0 e inferiores a 59.0, para os quais $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$.

ρ_2	$I(\rho_2) = I_A(\rho_2)$	$e_{\min I(\rho_2)}$	$e_{\max I(\rho_2)}$
32.0	[21.28, 22.34]	0.2954	0.1754
33.0	[22.15, 23.19]	0.2936	0.1771
35.0	[23.88, 24.91]	0.3054	0.18
40.0	[28.20, 29.10]	0.3536	0.1927
50.0	[36.85, 37.26]	0.5229	0.2562
55.0	[41.17, 41.49]	1.122	0.298
58.0	[43.78, 43.87]	0.9891	0.4538
59.0	[44.70, 44.74]	0.5562	0.4682

Tabela 3.27: Intervalos $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$ e valores extremos de e

Para $\rho_2 = 59.0$ tem-se $I(59.0)$ de amplitude muito reduzida, 0.04. O estudo efetuado para $\rho_2 = 59.1$ e $\rho_2 = 59.1$ revela intervalos $I(\rho_2)$ de amplitude 0.003 e 0.002, respectivamente (Tabela 3.28).

ρ_2	$I(\rho_2) = I_A(\rho_2)$	$e_{\min I(\rho_2)}$	$e_{\max I(\rho_2)}$
59.1	[44.80, 44.83]	0.5222	0.4651
59.2	[44.88, 44.90]	0.5426	0.4958

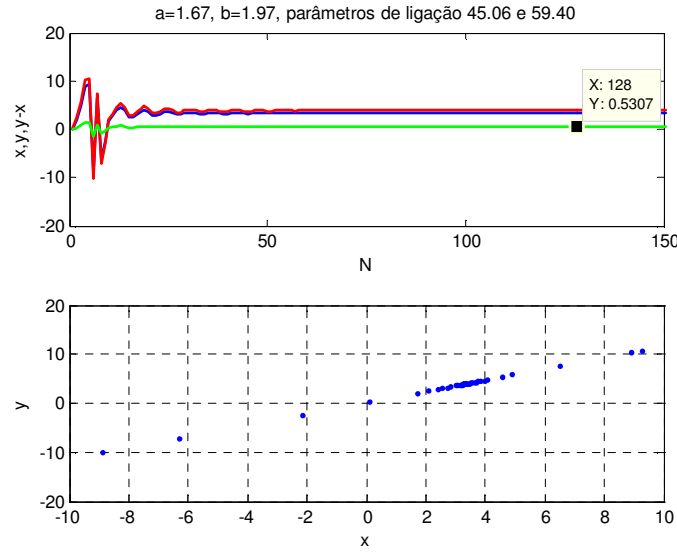


Figura 3.37: Ligação bidireccional em (3.23): (a) séries temporais, (b) hiperplano de sincronização

Tabela 3.28: Intervalos $I_A(\rho_2) = I(\rho_2)$ e valores extremos de e

Para $\rho_2 = 59.3$ e $\rho_2 = 59.4$ existe um único valor de ρ_1 para o qual ocorre estabilização do erro de sincronização, a saber, $\rho_1 = 44.97$ com $e = 0.5365$ e $\rho_1 = 45.06$ com $e = 0.5307$, respectivamente (Fig. 3.37 a,b). Para $\rho_2 = 59.5$ não foi encontrado qualquer valor de ρ_1 para o qual a diferença $y - x$ fosse limitada.

3.4 Generalização da ligação em configuração unidireccional

Considere agora a ligação unidireccional dos sistemas

$$(3.30) \quad \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n; a) \\ y_{n+1} = f(y_n; a) + \rho(x_n - y_n)^2 \end{cases} = \begin{cases} x_{n+1} = a - x_n^2 \\ y_{n+1} = a - y_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2 \end{cases} .$$

Embora o parâmetro de controle das transformações $a - x_n^2$ e $a - y_n^2$ seja o mesmo, a ligação é assimétrica.

3.4.1 Análise da dinâmica do sistema ligado

Considere $a > a^* \simeq 1.565$. Os pontos fixos do sistema ligado (3.30) são as soluções da equação $\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = (x, y)$ para a transformação bidimensional $\tilde{\mathbf{F}}$ definida por

$$\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \left(a - x^2, a - y^2 + \rho(x - y)^2 \right).$$

Denotando $1/4 + a$ por A , os pontos fixos de (3.30) são

$$P_1 \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{A}, -\frac{1}{2} + \sqrt{A} \right) \quad \text{e} \quad P_2 \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{A}, -\frac{1}{2} - \sqrt{A} \right)$$

sobre a diagonal principal e, para $\rho \neq 1$, também

$$P_3 \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{A}, -\frac{1}{2} + \frac{\rho+1}{\rho-1} \sqrt{A} \right) \quad \text{e} \quad P_4 \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{A}, -\frac{1}{2} - \frac{\rho+1}{\rho-1} \sqrt{A} \right)$$

fora da diagonal. Para $\rho = 1$, além dos pontos P_1 e P_2 , $(-1/2, y)$ são também pontos fixos, para qualquer valor real de y e $a = -1/4$. Para os valores de a em estudo, os pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são os únicos pontos fixos de (3.30). Todos estes pontos estão bem definidos como números reais dado que $a \geq -1/4$.

A matriz Jacobiana de $\tilde{\mathbf{F}}$,

$$D\tilde{\mathbf{F}}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 0 \\ 2\rho(x - y) & -2y - 2\rho(x - y) \end{bmatrix},$$

tem por valores próprios

$$\Lambda_1 = -2x \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = -2y - 2\rho(x - y).$$

Os pontos fixos P_1 e P_2 são sempre instável para os valores de a em estudo, pois os respectivos valores próprios reais (note que $a \geq -1/4$), $1 - \sqrt{1 + 4a}$ e $-1 + \sqrt{1 + 4a}$ de multiplicidade algébrica 2, têm módulo inferior a 1 apenas para $-1/4 < a < 3/4$. Os pontos fixos P_3 e P_4 são sempre instável para os valores de a em estudo, pois o valor próprio real $1 - \sqrt{1 + 4a}$ tem módulo inferior a 1 apenas para $-1/4 < a < 3/4$ e o valor próprio real $1 + \sqrt{1 + 4a}$ tem módulo superior ou igual a 1 para todo $a \geq -1/4$. Conclui-se assim que o sistema ligado não possui pontos fixos atractores.

Segue-se o diagrama de bifurcação (Fig. 3.38) de (3.30) para $\rho \in [-400, 400]$ com $a = 1.97$, que evidencia o comportamento caótico.

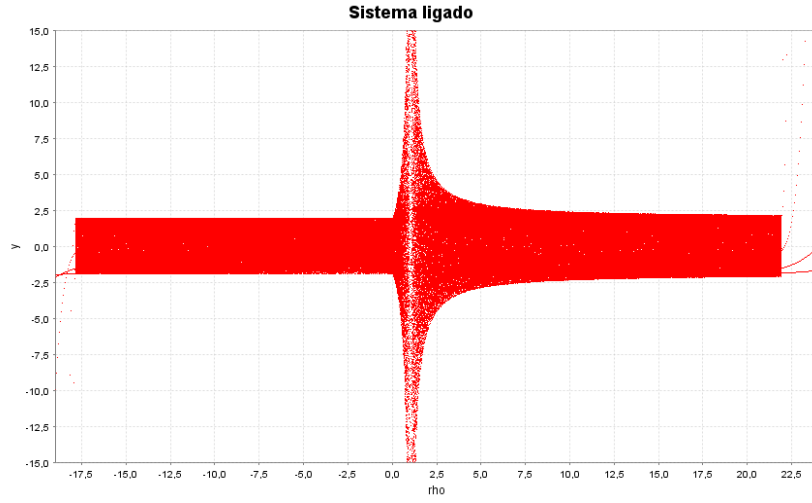


Figura 3.38: Diagrama de bifurcação do sistema ligado (3.30) para $\rho \in [-18, 23]$ com $a = 1.97$

3.4.2 Estabilidade local da sincronização

Seja $a > a^* \simeq 1.565$. A diferença $y - x$ para o sistema ligado (3.30) evolui pela equação às diferenças

$$y_{n+1} - x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + \rho(x_n - y_n)^2.$$

A equação $y_{n+1} - x_{n+1} = 0$ é equivalente a

$$y_n = x_n \quad \vee \quad x_n + y_n + \rho(x_n - y_n) = 0.$$

Conforme mostra a análise da diferença $y - x$ entre as variáveis, e é confirmado pelas simulações computacionais que se relatam em secção posterior, é válida a proposição seguinte.

Proposição 3.4.1 *Fixados um valor de a e condições iniciais x_0 e y_0 , existe um valor de ρ para o qual é alcançada sincronização assintótica estável em (3.30) dado por*

$$\rho = \frac{x_0 + y_0}{y_0 - x_0}.$$

Além disso, para cada valor fixo ρ do parâmetro de ligação, existe um intervalo $I(a, \rho)$ de condições iniciais x_0 para as quais é obtida sincronização assintótica estável sempre que é tomada a condição inicial

$$y_0 = \frac{\rho + 1}{\rho - 1} x_0$$

no sistema resposta, excepto em valores isolados onde existe limitação da diferença $y - x$ mas não é necessariamente alcançada sincronização prática.

Considerando as variáveis (3.10) que definem a direcção de sincronização u que caracteriza o subespaço

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

e a direcção v transversal a esta, o sistema (3.30) é reescrito como

$$(3.31) \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2a - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + \rho v_n^2 \\ v_{n+1} = -u_n v_n + \rho v_n^2. \end{cases}$$

No cálculo dos pontos fixos do sistema transversal tem-se

$$v[\rho v - 1 - u] = 0.$$

A anulação de v corresponde à sincronização entre as variáveis x e y , embora a trajectória se situe na direcção de sincronização u . O sistema transversal (3.31) tem então os pontos fixos sincronizados ($v = 0$)

$$P'_1(u_1, v_1) = (-1 - \sqrt{1 + 4a}, 0) \quad \text{e} \quad P'_2(u_2, v_2) = (-1 + \sqrt{1 + 4a}, 0),$$

os já encontrados para as ligações em (3.13) e (3.24) de transformações idênticas com um só parâmetro ρ ou parâmetros distintos ρ_1 e ρ_2 , e ainda os pontos fixos

$$P'_3(u_3, v_3) = \left(-1 + \left(1 + \frac{1}{\rho - 1} \right) \sqrt{1 + 4a}, \frac{1}{\rho - 1} \sqrt{1 + 4a} \right)$$

e

$$P'_4(u_4, v_4) = \left(-1 - \left(1 + \frac{1}{\rho - 1} \right) \sqrt{1 + 4a}, \frac{1}{1 - \rho} \sqrt{1 + 4a} \right)$$

sempre que $\rho - 1 \neq 0$. Para $\rho = 1$, (3.31) tem como pontos fixos, além dos pontos fixos sincronizados $P'_1(u_1, v_1)$ e $P'_2(u_2, v_2)$, $(v - 1, v)$ são também pontos fixos de (3.31) para $a = -1/4$. Para os valores de a em estudo, os pontos P'_1 , P'_2 , P'_3 e P'_4 são os únicos pontos fixos de (3.31). Todos estes pontos estão bem definidos como números reais dado que $a \geq -1/4$.

A matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(u, v) = \begin{bmatrix} -u & -v + 2\rho v \\ -v & -u + 2\rho v \end{bmatrix}$$

da transformação bidimensional

$$\tilde{\mathbf{K}}(u, v) = \left(2a - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \rho v^2, \rho v^2 - uv \right),$$

definida por (3.31), tem por valores próprios

$$\Lambda_{\pm} = \rho v - u \pm |v| \sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho} = \rho v - u \pm v |\rho - 1|.$$

No entanto, num ponto fixo sincronizado tem-se

$$\mathbf{J}(u, 0) = \begin{bmatrix} -u & 0 \\ 0 & -u \end{bmatrix}$$

com um único valor próprio de multiplicidade algébrica 2, o número real $-u$. O ponto fixo P'_1 é sempre instável pois o valor próprio $1 + \sqrt{1 + 4a}$ de $\mathbf{J}(u_1, 0)$ verifica $|1 + \sqrt{1 + 4a}| \geq 1$ para todo $a \geq -1/4$. A matriz $\mathbf{J}(u_2, 0)$ tem $1 - \sqrt{1 + 4a}$ como valor próprio e o seu módulo é inferior a 1 apenas quando $-1/4 < a < 3/4$. Como tal o ponto fixo P'_2 também é instável para os valores de a em estudo.

A não existência de pontos fixos sincronizados estáveis no sistema transversal implica que não é esperada sincronização localmente estável dos sistemas pela ligação em (3.30).

Observação 14 *A direcção u de u_2 mantém-se estável para $-1/4 < a < 3/4$. O sistema transversal (3.31) tem então um ponto fixo estável para $a \in]-1/4, 3/4[$, e qualquer que seja a força de ligação ρ , na vizinhança do qual é esperada sincronização idêntica dos sistemas. Nota-se que neste intervalo de variação de a , as transformações componentes do sistema ligado (3.30) são periódicas. É obtida sincronização assintótica periódica no sistema ligado (3.30), para quaisquer forças de ligação ρ , sempre que a toma valores no intervalo $] -1/4, 3/4[$.*

Em $a = 3/4$ o ponto fixo P'_2 sofre uma bifurcação de duplicação de período dado que $\Lambda_+ = -1$. Por esta bifurcação o ponto fixo P'_2 torna-se instável na direcção transversal v (tipo sela). Este ponto sela sofre ainda bifurcações numa cascata de duplicação de período e, para valores de a suficientemente grandes, é obtido caos sincronizado instável mergulhado em caos assíncrono.

Por outro lado, estudo dos expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.31) confirma o exposto. Para $-1/4 < a < 3/4$ o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é negativo. Quando as oscilações caóticas são sincrónicas, o vector próprio do expoente de Lyapunov tangencial λ_u é tangente ao subespaço simétrico $x = y$. Sendo $\lambda_u < 0$ as oscilações são periódicas.

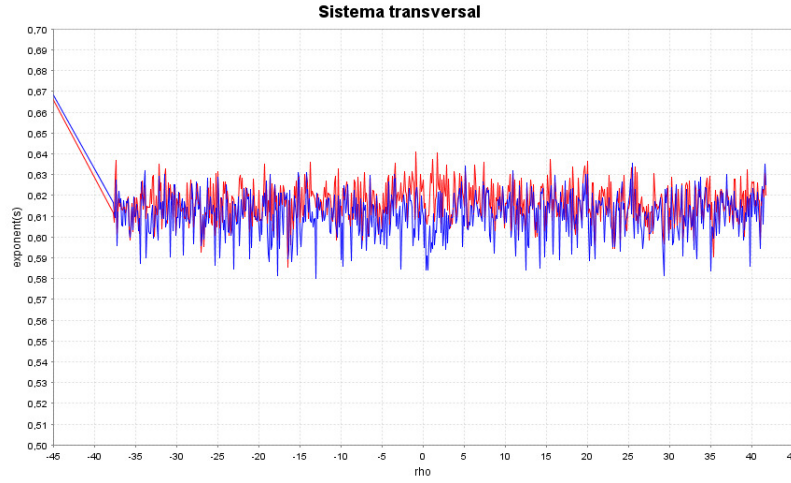


Figura 3.39: Expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.27) versus ρ para $\rho \in [-45, 45]$ com $a = 1.97$

Se o parâmetro de controle a toma valores que correspondem a comportamento caótico, o expoente de Lyapunov transversal, assim como o tangencial, é positivo após um certo número de iterações (do sistema transversal). De facto, considerando $a = 1.97$ tem-se (3.31) dado por

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3.94 - \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2) + \rho v_n^2 \\ v_{n+1} = -u_n v_n + \rho v_n^2. \end{cases}.$$

A Figura 3.39 apresenta os expoentes de Lyapunov do sistema transversal (3.31) para $u_0 = 0.15$ e $v_0 = 0.05$. Sendo $\lambda_v > 0$ as oscilações síncronas não são transversalmente estáveis e não é alcançada sincronização estável.

3.4.3 Abordagem computacional

Seguem-se alguns gráficos que ilustram o estabelecido na Proposição 3.4.1 por análise da diferença $y - x$ entre as variáveis x e y .

Considere o parâmetro de controle $a = 1.97$. Para as condições iniciais diferentes $x_0 = 0.1$ e $y_0 = 0.2$, a relação $x_0 + y_0 + \rho(x_0 - y_0) = 0$ conduz-se a $\rho = 3$. A simulação computacional com $N = 1000$ iterações a partir destas condições iniciais confirma que é alcançada sincronização assintótica estável para este valor de ρ (Fig. 3.40 a,b).

Ainda para $a = 1.97$, considere fixo o valor do parâmetro de ligação em $\rho = 3$. Existe um intervalo $I(1.97, 3) = [-1.5, 1.5]$ de condições iniciais x_0 , considerando o passo de uma

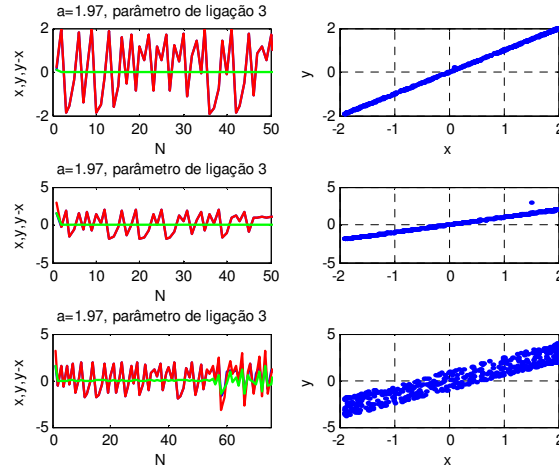


Figura 3.40: Ligação unidireccional em (3.30): (a,c,e) séries temporais, (b,d) hiperplanos de sincronização, (f) atrator caótico

décima, para as quais é obtida sincronização assintótica estável sempre que é tomada a condição inicial $y_0 = 2x_0$ no sistema resposta, excepto em valores isolados, de que é exemplo $x_0 = \pm 1.3$, $x_0 = \pm 1.0$, $x_0 = \pm 0.6$ e $x_0 = \pm 0.2$, onde existe limitação da diferença $y - x$ mas não é alcançada sincronização prática. Também para $x_0 = -1.5 \pm 0.1n$, com $n = 1, \dots, 4$, existe limitação da diferença $y - x$ mas não é alcançada sincronização prática. Para $x_0 > 1.9$ ou $x_0 < -1.9$ observa-se explosão para infinito. Apresentam-se os gráficos obtidos com $x_0 = 1.5$ e $y_0 = 3.0$ (Fig. 3.40 c,d) e com $x_0 = 1.3$ e $y_0 = 2.6$ (Fig. 3.40 e,f).

Uma pequena alteração do valor de a traduz-se em alteração do intervalo $I(a, 3)$. De facto, considerando $a = 1.98$ tem-se $I(1.98, 3) = [-1.4, 1.4]$. Para $x_0 = \pm 1.3$, $x_0 = \pm 1.2$ e $x_0 = \pm 0.3$ existe limitação da diferença $y - x$ mas não é alcançada sincronização prática.

Capítulo 4

Conclusões

Tempo contínuo. A ligação unidireccional por aplicação de sinal de controle como *feedback* negativo deslocado permitiu obter condições suficientes para sincronização globalmente estável entre sistemas de Lorenz idênticos e caóticos, com base na majoração da derivada de uma função de Lyapunov apropriada. Consideramos a substituição completa da variável x_1 pela sua correspondente x_2 em todos os termos não-lineares da resposta e, em dois dos casos, essa substituição foi parcial (em apenas alguns termos não-lineares). Verificamos que a combinação de controle *feedback* negativo com substituição só revela vantagem, a obtenção que uma condição muito simples, quando esta é efectuada em todos os termos não-lineares da resposta. Consideramos também a mesma ligação entre sistemas de Lorenz sem qualquer substituição e, mesmo neste caso, é obtida uma condição que garante sincronização globalmente estável. No entanto, a abordagem com substituição parcial da variável x_1 neste esquema de ligação entre sistemas de Rössler é inconclusiva. O estudo de uma ligação por decomposição activo-passivo entre sistemas de Lorenz idênticos e caóticos, pela mesma abordagem, conduz a uma condição suficiente para sincronização globalmente estável. Com outros dois sinais condutores são igualmente obtidas condições. Entre sistemas de Rössler idênticos e caóticos, quando o controle *feedback* negativo não é deslocado, apenas fica garantida a estabilidade assintótica local do estado caótico síncrono. Concluimos ainda que com outros sinais de controle sem deslocamento não é obtida sincronização assintótica entre estes sistemas, mesmo em casos em que se procede a substituições parciais de variáveis. Em ligação difusiva linear bidireccional total de sistemas de Rössler idênticos e caóticos, estabelecemos a Proposição 2.3.2 onde não é considerada qualquer substituição parcial e a Proposição 2.3.3 onde tal ocorre. Estas Proposições contêm condições suficientes para sincronização globalmente estável. Se a ligação é parcial, não é garantida qualquer condição suficiente.

A Proposição 2.3.1 permitiu obtermos condições suficientes para sincronização globalmente estável pela ligação unidireccional por controle *feedback* negativo e pela ligação difusiva linear bidireccional entre sistemas de Lorenz idênticos e caóticos, em combinação com substituição parcial da variável x_2 por x_1 apenas nos termos não-lineares do sistema resposta. Verificamos que tal não é possível quando esta substituição não é efectuada. Quando consideramos esta ligação entre sistemas de Rössler idênticos e caóticos, não é possível aplicar esta Proposição, efectuando ou não a substituição parcial de variáveis no termo não-linear da resposta. Ainda entre sistemas de Lorenz idênticos e caóticos, a mesma Proposição garante sincronização globalmente estável quando é transmitida como subsistema sinal condutor a componente x_1 do sistema transporte para a resposta. A Proposição 2.3.1 não é aplicável quando são consideradas outras componentes como subsistema sinal condutor entre estes sistemas. No caso de transmissão entre sistemas de Rössler idênticos e caóticos, também esta proposição não é aplicável, quaisquer que sejam as componentes usadas como subsistema sinal condutor.

Em sincronização generalizada, obtemos uma ligação por função de controle entre o sistema de Rössler caótico e o sistema de Rössler hipercaótico. Estes dois sistemas têm dimensões diferentes.

Tempo discreto. A ligação de transformações quadráticas não-idênticas, pela ligação original obtida da família de transformações quadráticas complexas analíticas, não conduz a sincronização assintótica nem prática no sentido de Kapitaniak. Para o valor do parâmetro de ligação ao qual corresponde menor variação da diferença entre as variáveis dinâmicas aplicamos uma técnica de controle de caos. Encontramos uma lei de controle *feedback* linear para o parâmetro de ligação com a qual fica garantida a sincronização prática entre as transformações caóticas. No caso particular de transformações idênticas, obtemos a Proposição 3.2.1 que garante sincronização assintótica estável em determinados intervalos quando as condições iniciais verificam $y_0 = -x_0$. Concluimos ainda que existem intervalos de variação do parâmetro de ligação onde ocorre sincronização prática estável.

A consideração de parâmetros de ligação distintos entre os sistemas permite obter resultados de sincronização não verificados com um único parâmetro. Entre transformações idênticas, estabelecemos a Proposição 3.3.1 que garante sincronização assintótica estável ou sincronização prática estável numa sequência de intervalos de valores de cada um dos parâmetros de ligação, quando estes verificam uma certa relação dependente das condições iniciais estabelecidas. Para um dos parâmetros de ligação, concluimos ainda

que existem intervalos de valores do outro parâmetro para os quais está garantida a sincronização prática. Entre transformações não-idênticas, estabelecemos as variações de um dos parâmetros para as quais existem intervalos de valores do outro parâmetro em que é alcançada sincronização prática. Em configuração unidireccional, obtemos a Proposição 3.4.1 que garante a existência de sincronização assintótica estável para valores do parâmetro de ligação que são função das condições iniciais. Além disso, para cada parâmetro de ligação ρ tomado existe um intervalo de condições iniciais x_0 para as quais é obtida sincronização assintótica estável sempre a outra condição inicial verifica uma certa relação entre x_0 e ρ .

Pretendemos aprofundar o trabalho efectuado aplicando as ligações estudadas em tempo discreto a outras transformações reais unidimensionais. Uma outra generalização da ideia original de Pecora e Carroll é a de sistemas transporte/resposta sincronizados em cascata. Um outro sistema resposta é simplesmente acrescentado na forma de cascata ao esquema original de transporte/resposta de Pecora-Carroll. Uma abordagem deste tipo pode ser analisada no âmbito destas ligações. Também as vantagens ou não de condução esporádica, em vez de substituição completa ou parcial nos termos não-lineares da resposta, podem ser ainda pesquisadas. A consideração de baixo ruído também pode ser um assunto a estudar. Embora o valor da entropia topológica seja, em geral, mais difícil de calcular do que o valor estimado dos expoentes de Lyapunov, consideramos interessante tentar a sua utilização para uma melhor compreensão das ligações estudadas nesta tese.

Bibliografia

- [1] H.D.I. Abarbanel, R. Brown e M.B. Kennel (1991), Lyapunov exponents in chaotic systems: Their importance and their evaluation using observed data, *Int. J. Mod. Phys. Lett. B* **5**, 1347-1375.
- [2] H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov e M.M. Sushchik (1996), Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach, *Phys. Rev. E* **53**, 4528-4535.
- [3] R. L. Adler, A. Konheim e M. McAndrew (1965), Topological entropy, *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** 309-319.
- [4] V.S. Afraimovich, N.N. Verichev e M.I. Rabinovich (1986), Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems, *Radiophys. Quantum Electron.* **29** (9), 795-803.
- [5] J.C. Alexander, I. Kan, J.A. Yorke e Z. You (1992), Riddled basins, *Int. J. Bifur. Chaos* **2** 795-813.
- [6] V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, D.E. Posnov e M.A. Safonova (1991), Forced and mutual synchronization of chaos, *Sov. J. Commun. Technol. Electron.* **36**, 23.
- [7] P. Ashwin, J. Buescu e I. Stewart (1994), Bubbling of attractors and synchronization of oscillators, *Phys. Lett. A* **193**, 126-139.
- [8] P. Ashwin, J. Buescu e I. Stewart (1996), From attractor to chaotic saddle: A tale of transverse instability, *Nonlinearity* **9**, 703-737.
- [9] P. Ashwin e M. Timme (2005), Unstable attractors: existence and robustness in networks of oscillators with delayed pulse coupling, *Nonlinearity* **18**, 2035-2060.
- [10] E. Barreto, P. So, B.J. Gluckman e S.J. Schiff (2000), From generalized synchrony to topological decoherence: Emergent sets in coupled chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* **84** (8), 1689-1692.

- [11] R. Bowen (1971), Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **153**, 401-414.
- [12] R. Brown (1998), Approximating the apping between systems exhibiting generalized synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4835-4838.
- [13] T.L. Carroll e L.M. Pecora (1991), Synchronizing chaotic circuits, *IEEE Trans. Circuits Systems* **38** (4), 453-456.
- [14] R.L. Devaney (1989), An introduction to Chaotic Dynamical Systems, *Addison-Wesley Publ. Co.*, Redwood City.
- [15] M. Ding e E. Ott (1994), Enhancing synchronism of chaotic systems, *Phys. Rev. E* **49** (2), 945-948.
- [16] J.-P. Eckmann e D. Ruelle (1985), Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617-656.
- [17] J.D. Farmer, E. Ott e J.A. Yorke (1983), The dimension of chaotic attractors, *Physica D* **7**, 153-170.
- [18] M.J. Feigenbaum (1978), Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *J. Stat. Phys.* **19**, 25.
- [19] J. Guemez e M.A. Matias (1995), Modified method for synchronizing and cascading chaotic systems, *Phys. Rev. E* **52**, R2145-R2148.
- [20] R. He e P.G. Vaidya (1992), Analysis and synthesis of synchronous periodic and chaotic systems, *Phys. Rev. A* **46** (12), 7387-7392.
- [21] J.F. Heagy, T.L. Carroll e L.M. Pecora (1994), Synchronous chaos in coupled oscillator systems, *Phys. Rev. E* **50**, 1874-1885.
- [22] J.F. Heagy, T.L. Carroll e L.M. Pecora (1995), Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled oscillator systems, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3528-3531.
- [23] B.R. Hunt, E. Ott e J.A. Yorke (1997), Differentiable generalized synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* **55** (4), 4029-4034.
- [24] Ch. Huygens (1673), Horoloquium Oscillatorium, *Apud. F. Muguet*, Paris.

- [25] O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov e V.I. Ponomarenko (2001), Mandelbrot set in coupled logistic maps and in an electronic experiment, *Phys. Rev. E* **64**, R055201-4.
- [26] J.K. John e R.E. Amritkar (1994), Synchronization of unstable orbits using adaptive control, *Phys. Rev. E* **49** (6), 4843-4848.
- [27] L. Junge e U. Parlitz (2001), Synchronization using dynamic coupling, *Phys. Rev. E* **64**, 1-4.
- [28] K. Kaneko (1986), Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices, *Physica D* **23**, 436.
- [29] T. Kapitaniak (1994), Synchronization of chaos using continuous control, *Phys. Rev. E* **50**, 1642-1644.
- [30] T. Kapitaniak e L.O.Chua (1994), Hyperchaotic attractors of unidirectionally coupled Chua's circuits, *Int. J. Bifur. Chaos* **4**, 477-483.
- [31] T. Kapitaniak, M. Sekieta e M. Ogorzalek (1996), Monotone synchronization of chaos, *Int. J. Bifur. Chaos* **6** (1), 211-217.
- [32] T. Kapitaniak, J. Wojewoda e J. Brindley (1996), Synchronization and desynchronization in quasi-hyperbolic chaotic systems, *Phys. Lett. A* **210**, 283-289.
- [33] J.L. Kaplan e J.A. Yorke (1997), Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz, *Comm. Math. Phys.* **67**, 93-108.
- [34] A. Katok e B. Hasselblatt (1995), Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, *Cambridge University Press*, Cambridge, New York.
- [35] L. Kocarev e U. Parlitz (1995), General approach for chaotic synchronization with applications to communication, *Phys. Rev. Lett.* **74** (25), 5028-5031.
- [36] L. Kocarev e U. Parlitz (1996), Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* **76** (11), 1816-1819.
- [37] Y.-C. Lai e C. Grebogy (1993), Synchronization of chaotic trajectories using control, *Phys. Rev. E* **47** (4), 2357-2360.

- [38] Y.-C. Lai (1996), Symmetry-breaking bifurcation with on-off intermittency in chaotic dynamical systems, *Phys. Rev. E* **53**, R4267-4270.
- [39] Y.-C. Lai, C. Grebogy, J.A. Yorke e S.C. Venkataramani (1996), Synchronization of chaotic trajectories using control, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 55-58.
- [40] C. Letelier, P. Dutertre e B. Maheu (1995), Unstable periodic orbits and templates of the Rössler system: toward a systematic topological characterization, *Chaos* **5** (1), 271-282.
- [41] T. Li e J.A. Yorke (1975), Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* **82**, 985-992.
- [42] E.N. Lorenz (1963), Deterministic non-periodic flows, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130-141.
- [43] Yu.L. Maistrenko, V.L. Maistrenko, A. Popovich e E. Mosekilde (1998), Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps, *Phys. Rev. E* **57**, 2713-2724.
- [44] Yu.L. Maistrenko, V.L. Maistrenko, A. Popovich e E. Mosekilde (1998), Role of the absorbing area in chaotic synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1638-1641.
- [45] R.M. May (1976), Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261**, 459-467.
- [46] D. A. Mendes e V. Mendes, Control of chaotic dynamics in an OLG economic model (2005), *Journal of Physics: Conference Series* **23**, 158-181.
- [47] J. Milnor (1985), On the concept of an attractor, *Comm. Math. Phys.* **99**, 177-195.
- [48] Y. Nagai e Y.-C. Lai (1997), Periodic-orbit theory of the blowout bifurcation, *Phys. Rev. E* **56**, 4031-4041.
- [49] H.E. Nusse e J.A. Yorke (1991), A numerical procedure for finding accessible trajectories on basin boundaries, *Nonlinearity* **4**, 1183-1212.
- [50] V.I. Oseledec (1968), A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197-231.
- [51] E. Ott, C. Grebogy e J.A. Yorke (1990), Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* **64** (11), 1196-1199.

- [52] E. Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I. Kan e J.A. Yorke (1993), Scaling behavior of chaotic systems with riddled basins, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4143-4137.
- [53] E. Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I. Kan e J.A. Yorke (1994), The transition to chaotic attractors with riddled basins, *Physica D* **76**, 384-410.
- [54] U. Parlitz, L.O. Chua, L. Kocarev, K.S. Hale e A. Shang (1992), Transmission of digital signals by chaotic synchronization, *Int. J. Bifur. Chaos* **2** (4), 973-977.
- [55] U. Parlitz, L. Kocarev, T. Stojanovski e H. Preckel (1996), Encoding messages using chaotic synchronization, *Phys. Rev. E* **53**, 4351-4361.
- [56] U. Parlitz (1996), Estimating model parameters from time series by autosynchronization, *Phys. Rev. Lett.* **76** (8), 1232-1235.
- [57] U. Parlitz, L. Junge, L. Lauterborn e L. Kocarev (1996), Experimental observation of phase synchronization, *Phys. Rev. E* **54**, 2115-2117.
- [58] L.M. Pecora e T.L. Carroll (1990), Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* **64** (8), 821-824.
- [59] L.M. Pecora e T.L. Carroll (1991), Driving systems with chaotic signals, *Phys. Rev. A* **44** (4), 2374-2383.
- [60] L.M. Pecora, T.L. Carroll e J.F. Heagy (1995), Statistics for mathematical properties of maps between time-series embeddings, *Phys. Rev. E* **52** (2), 3420-3439.
- [61] L.M. Pecora, T.L. Carroll, G.A. Johnson, D.J. Mar e J.F. Heagy (1997), Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications, *Chaos* **7** (4), 520-543.
- [62] A.S. Pikovsky (1984), On the interaction of strange attractors, *Z. Physik B* **55** (2), 149-154.
- [63] A.S. Pikovsky (1984), Synchronization and stochastization of the ensemble of auto-generators by external noise, *Radiophys. Quant. Electron.* **27** (5), 576-581.
- [64] A.S. Pikovsky e C. Grassberger (1991), Symmetry-breaking bifurcation for coupled chaotic attractors, *J. Phys. A* **24**, 4587-4597.

- [65] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths (1996), Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators, *Europhys. Lett.* **34** (3), 165-170.
- [66] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths (2001), Synchronization – A Universal Concept in Nonlinear Sciences, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- [67] N. Platt, E.A. Spiegel e C. Tresser (1993), On-off intermittency – A mechanism for bursting, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 279-282.
- [68] K. Pyragas (1992), Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A* **170** (6), 421-428.
- [69] K. Pyragas (1993), Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems, *Phys. Lett. A* **181**, 203-210.
- [70] K. Pyragas (1996), Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* **54**, R4508-11.
- [71] M.I. Rabinovich e D.I. Trubetskov (1989), Oscillations and Waves in Linear and Nonlinear Systems, *Kluwer*, Dordrecht.
- [72] F.J. Romeiras, C. Grebogi, O.E. Ott e W.P. Dayawansa (1992), Controlling chaotic dynamical systems, *Phys. D* **58**, 165-192.
- [73] M. Rosenblum, A. Pikovsky e J. Kurths (1996), Phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804-1807.
- [74] O.E. Rössler (1976), An equation for continuous chaos, *Phys. Rev. A* **57** (5), 397-398.
- [75] O.E. Rössler (1979), An equation for hyperchaos, *Phys. Lett. A* **71**, 155-157.
- [76] D. Ruelle (1989), Chaotic Evolution and Strange Attractors, *Cambridge University Press*, Cambridge, New York.
- [77] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring e H.D.I. Abarbanel (1995), Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* **51** (2), 980-994.
- [78] A. N. Sharkovskii (1964), Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself, *Ukrainian Math. J.* **16**, 61-71.

- [79] S. Smale (1965), Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton University Press, Princeton, 63-80.
- [80] P. So, E. Barreto, K. Josić, E. Sander e S. Schiff (2002), Limits to the experimental detection of nonlinear synchrony, *Phys. Rev. E* **65** (4), R46225-46229.
- [81] J.C. Sommerer e E. Ott (1993), A physical system with qualitatively uncertain dynamics, *Nature* **365**, 136-140.
- [82] J.C. Sommerer e E. Ott (1994), Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency, *Phys. Lett. A* **188**, 39-47.
- [83] M. de Sousa Vieira, A.J. Lichtenberg e M.A. Lieberman (1992), Synchronization of regular and chaotic systems, *Phys. Rev. A* **46**, 7359-7362.
- [84] A. Stefański (2000), Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts, *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 2443-2451.
- [85] A. Stefański e T. Kapitaniak (2003), Estimation of the dominant Lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization, *Chaos, Solitons and Fractals* **15**, 233-244.
- [86] A. Stefański e T. Kapitaniak (2003), Synchronization of two chaotic oscillators via a negative feedback mechanism, *Int. J. Solids Structures* **40**, 5175-5185.
- [87] E.F. Stone (1992), Frequency entrainment of a phase coherent attractor, *Phys. Lett. A* **163** 367-374.
- [88] M. Timme, F. Wolf e T. Geisel (2003), Unstable attractors induce perpetual synchronization and desynchronization, *Chaos* **13**, 377-387.
- [89] S.C. Venkataramani, B. Hunt e E. Ott (1996), The bubbling transition, *Phys. Rev. E* **54**, 1346-1360.
- [90] T. Yamada e H. Fujisaka (1983), Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, *Prog. Theoret. Phys.* **69** (1), 32-47.
- [91] T. Yamada e H. Fujisaka (1983), Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. II, *Prog. Theoret. Phys.* **70** (5), 1240-1248.

- [92] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney e J.A. Vastano (1985), Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **16**, 285-317.
- [93] C.W. Wu e L.O. Chua (1994), A unified framework for synchronization and control of dynamical systems, *Int. J. Bifur. Chaos* **4** (4), 979-998.
- [94] A. Wolf (1984), Quantifying chaos with Lyapunov exponents, *Nonlinear Scientific Theory and Applications*, Manchester University Press, Manchester.