Diapositivos das aulas de Circuitos para Comunicações

nuno.garrido@iscte.pt

ISCTE-IUL, Fev 2014

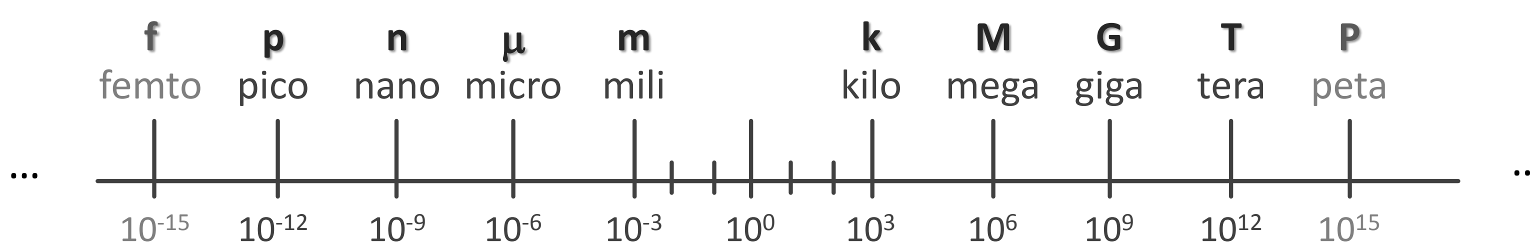
ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Sistema internacional (SI):

- Unidades básicas (7):
  metro (**m**), quilograma (**kg**), segundo (**s**),
  ampere (**A**), kelvin (**K**),
  mol (**mol**), candela (**cd**)

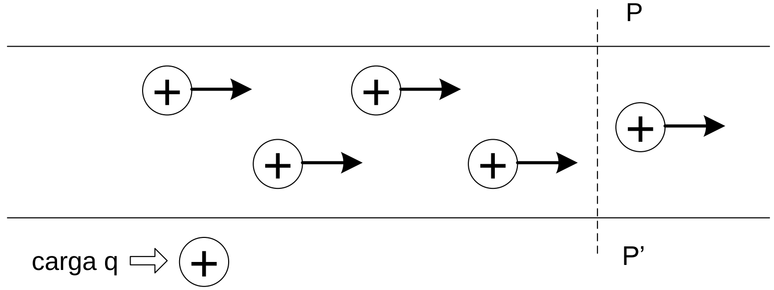
- Unidades derivadas
  volt (**V**), ohm (**Ω**), watt (**W**), joule (**J**), tesla (**T**), weber (**Wb**),
  farad (**F**), henry (**H**), newton (**N**), coulomb (**C**), pascal (**Pa**),
  hertz (**Hz**), radiano (**rad**), esterradiano (**sr**), lúmen (**lm**), lux (**lx**) …

- Prefixos – factores multiplicativos



Corrente eléctrica [*i*]

- Definição: fluxo de cargas positivas num dado sentido



$$i = \frac{\Delta q \text{ (que passa em P'P)}}{\Delta t \text{ (tempo que demora)}}$$

Ordens de grandeza

- neurónios: 10^{-12} a 10^{-14} (A) ~ 1pA a 0.01pA
- circuitos integrados de memória: ~ 0.1μA (DC)
- aparelhos electrónicos: ~ 100mA a 15A (DC)
- motor eléctrico industrial: ~ 1kA = 1000A (AC)
- raio eléctrico (trovão): ~ 10^5 A = 100kA = 0.1MA

- Unidades

- carga, coulomb [C]

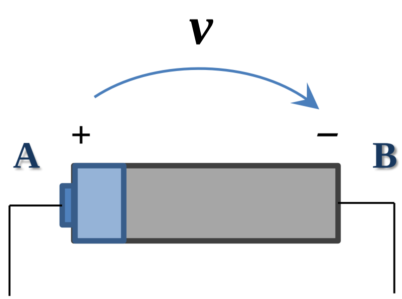
- tempo, segundo [s]

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Rightarrow i = \frac{dq}{dt}$$

ampere [A] = [C]/[s]

Tensão eléctrica [v]

- Definição: tensão ou diferença de potencial eléctrico entre dois pontos de um circuito. Mede a força que uma carga eléctrica experimenta no meio de um campo eléctrico.



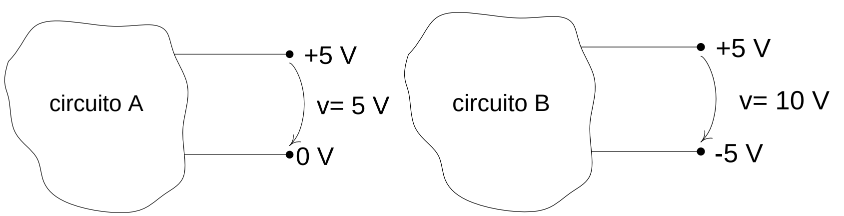
Ordens de grandeza

- antena de um receptor de rádio: ~10^{-7} V= 0.1μV
- alimentação de um circuito integrado: 1V a 5V (DC)
- bateria automóvel: 12V (DC)
- rede eléctrica doméstica: 220V (AC)
- rede de distribuição de alta tensão: 10^6 V = 1MV
- raio eléctrico: 10^8 V = 100MV

- Unidades

  - energia, joule [J]
  - carga, coulomb [C]

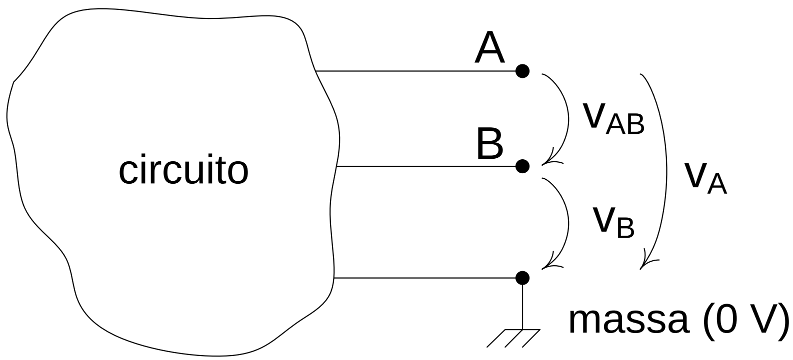
$$v = v_A - v_B$$



volt [V] = [J]/[C]

Potencial [v]

- Definição: O potencial de um ponto define-se como a tensão nesse ponto em relação a um valor de referência, geralmente o valor da massa (**0 V**)



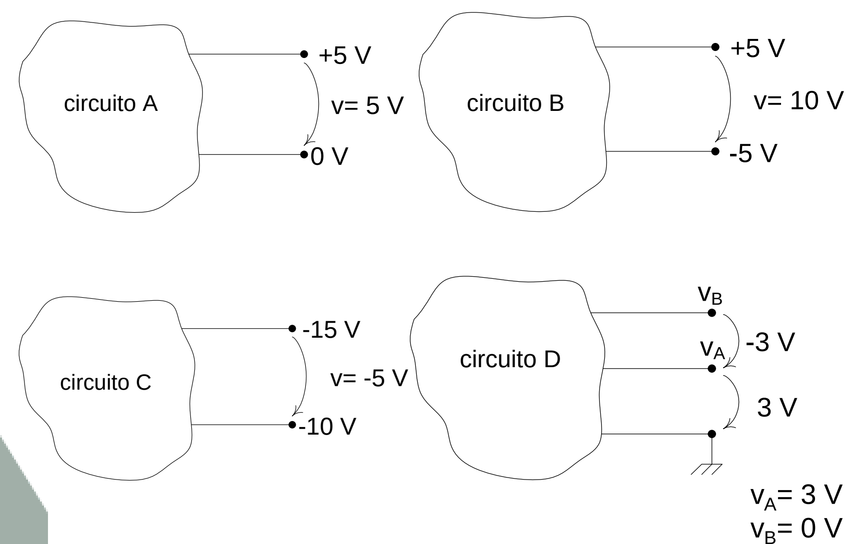
$$v_A = v_B + v_{AB}$$

- Unidades

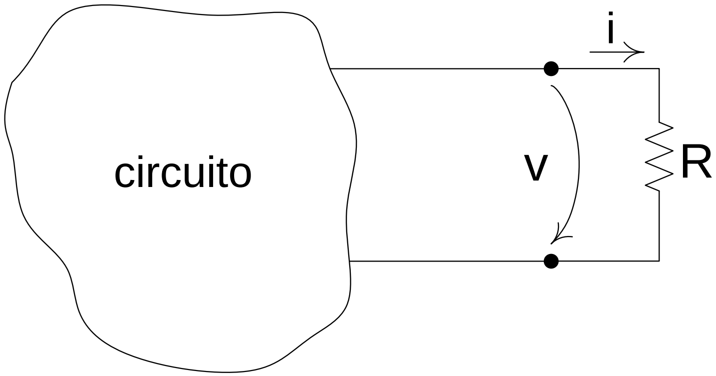
  - energia, joule [J]
  - carga, coulomb [C]

$$v_{AB} = v_A - v_B$$

volt [V] = [J]/[C]



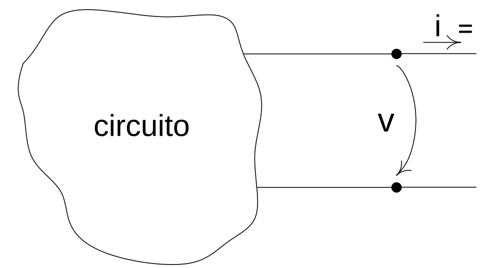
Resistência eléctrica [$\boldsymbol{R}$]



Relação linear entre tensão e corrente:

dá-se o nome de resistência à constante de proporcionalidade ($\boldsymbol{R}$)

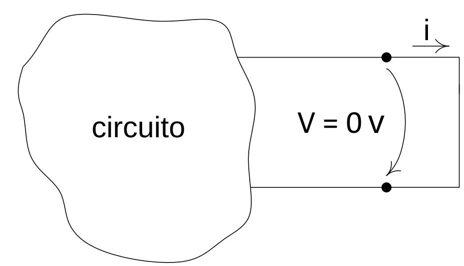
Circuito aberto ($\boldsymbol{R} \approx \infty$)



Lei de Ohm

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{i}$$

Curto circuito ($\boldsymbol{R} \approx 0$)

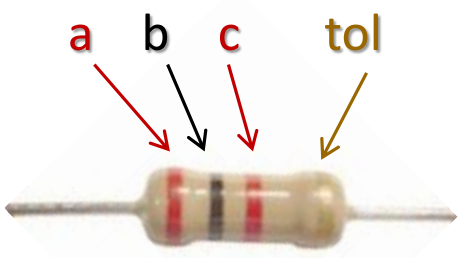


- Unidades
  - tensão, Volt [V]
  - corrente, Ampere [A]

ohm [Ω] = [V]/[A]

Resistência eléctrica (código de cores)

- As primeiras três faixas indicam o valor nominal
- a última faixa indica a tolerância (em %) face ao valor nominal da resistência



Exemplo

$R = (20) \cdot 10^{2} \pm 5\%$

$R = 2k\Omega \pm 5\%$

$$R = (ab) \cdot 10^{c} \pm \text{\% da tolerância}$$

Cor	Preto	Castanho	Vermelho	Laranja	Amarelo	Verde	Azul	Violeta	Cinzento	Branco
Valor	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

exemplos de tolerância:
dourado 5%
prateado 10%

Resistividade [ρ]

- ρ (Ωm) é a resistividade eléctrica

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

- O valor da resistência eléctrica R de um dispositivo, é função da resistividade ρ (Ωm) do material, do seu comprimento ℓ (m), e da área da sua secção A (m²)

Materiais

Condutores	Cobre	$1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω.m
	Ouro	$2{,}4 \times 10^{-8}$ Ω.m
Semicondutores	Carbono	$3{,}5 \times 10^{-5}$ Ω.m
	Silício	$6{,}4 \times 10^{2}$ Ω.m
Isolantes	Papel	10×10^{10} Ω.m
	Vidro	10×10^{12} Ω.m

Condutividade [σ]

- σ ($\Omega^{-1}m^{-1}$) é a condutividade eléctrica de um material

$$\sigma = 1 / \rho$$

Define-se como o inverso da resistividade e de um material

Condutância [G]

- a condutância eléctrica G (Ω^{-1}) de um dispositivo, é o inverso da sua resistência eléctrica R

$$G = 1 / R$$

Indica a facilidade que o dispositivo tem para conduzir corrente eléctrica

siemens [S] = [A]/[V] = [Ω^{-1}]

Potência [P]

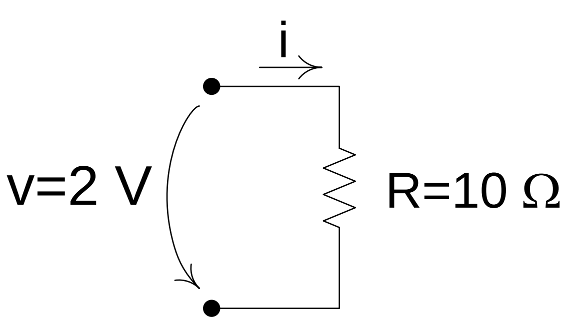
- P (W) é potencia e reflecte a capacidade de um dispositivo gerar trabalho ou dissipar potência

$$P = v \cdot i$$

Numa resistência, a potência dissipada é sempre positiva e é dada por:

$$P = v^2 / R$$

$$P = R \cdot i^2$$



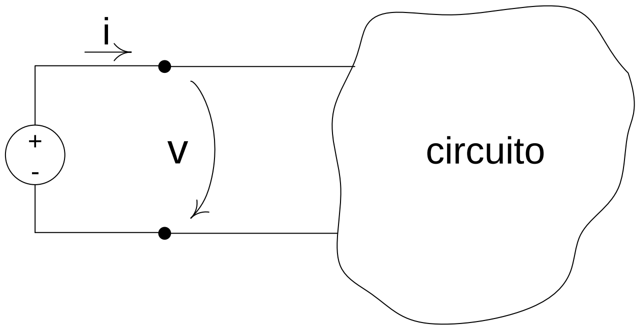
watt [W] = [A]·[V]

$$p_{diss} = \frac{v^2}{R} = \frac{2^2}{10} = 0.4\ W = 400\ \mathrm{mW}$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{2}{10} = 0.2\ A = 200\ \mathrm{mA}$$

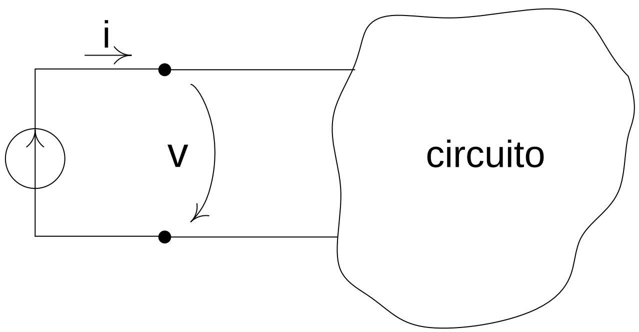
Fontes independentes

- Fonte de tensão ideal



- impõe tensão ***v*** com valor fixo
- define o valor de ***v*** e a polaridade
- o valor de ***i*** depende de ***v*** e do circuito

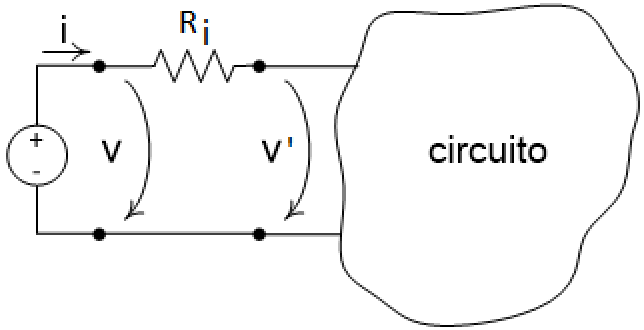
- Fonte de corrente ideal



- impõe corrente ***i*** com valor fixo
- define o valor de ***i*** e o sentido da corrente
- o valor de ***v*** depende de ***i*** e do circuito

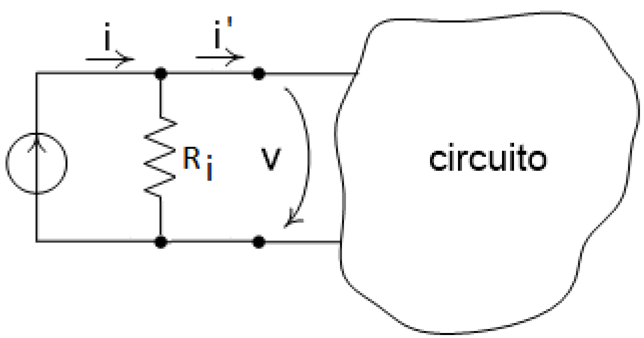
Fontes independentes

- Fonte de tensão não-ideal



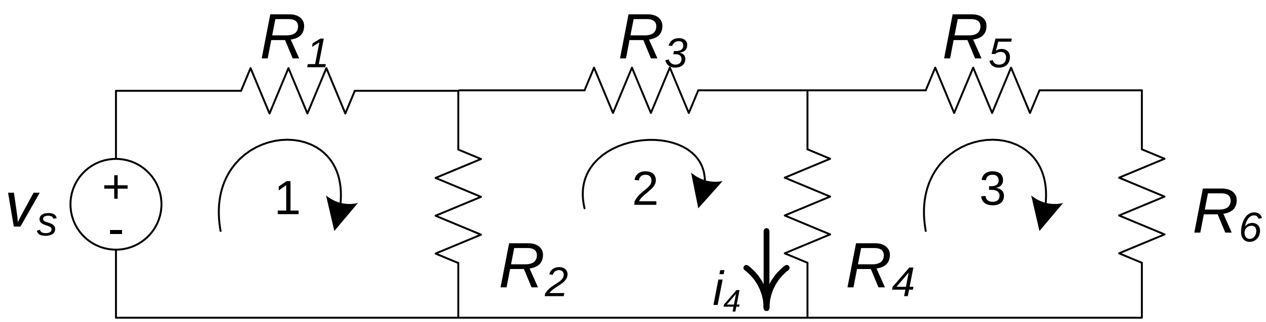
- Inclui uma resistência interna R_i em série com a fonte de tensão v

- Fonte de corrente não-ideal



- Inclui uma resistência interna R_i em paralelo com a fonte de corrente i

Elementos de um circuito



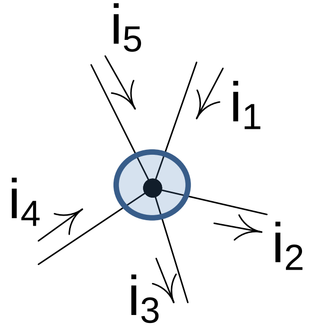
- Circuito: conjunto de elementos interligados através de fios condutores que se admitem ideais
- Nó: ponto de interligação de dois ou mais elementos
- Ramo: porção de circuito com um só elemento
- Malha: uma malha é um caminho fechado que não contem no seu interior outro caminho também fechado

Leis de Kirchhoff

Lei das correntes (KCL) – Lei do nós (1ª lei)

- a soma das correntes que entram num nó é zero

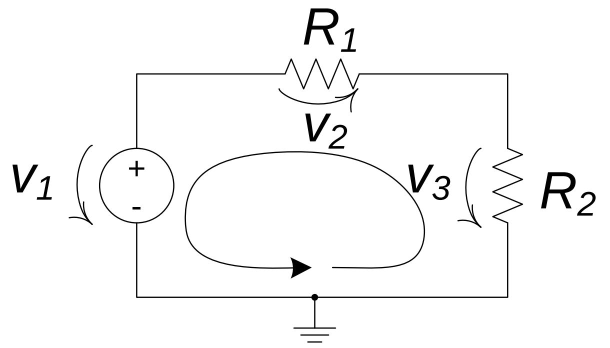
$$\sum_{j=1}^{N} i_j = 0 \iff i_1 - i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0$$



Lei das tensões (KVL) – Lei das malhas (2ª lei)

- a soma das tensões numa malha (fechada) é zero

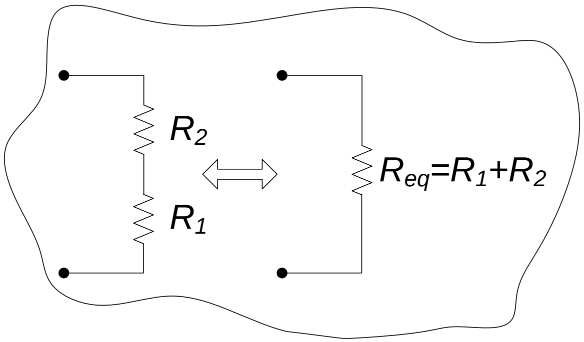
$$\sum_{j=1}^{N} v_j = 0 \iff +v_1 - v_2 - v_3 = 0$$



Associação de resistências

- em **série**

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

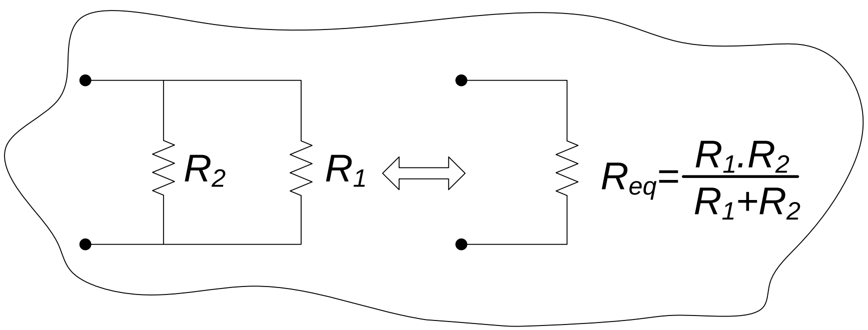


- em **paralelo**

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

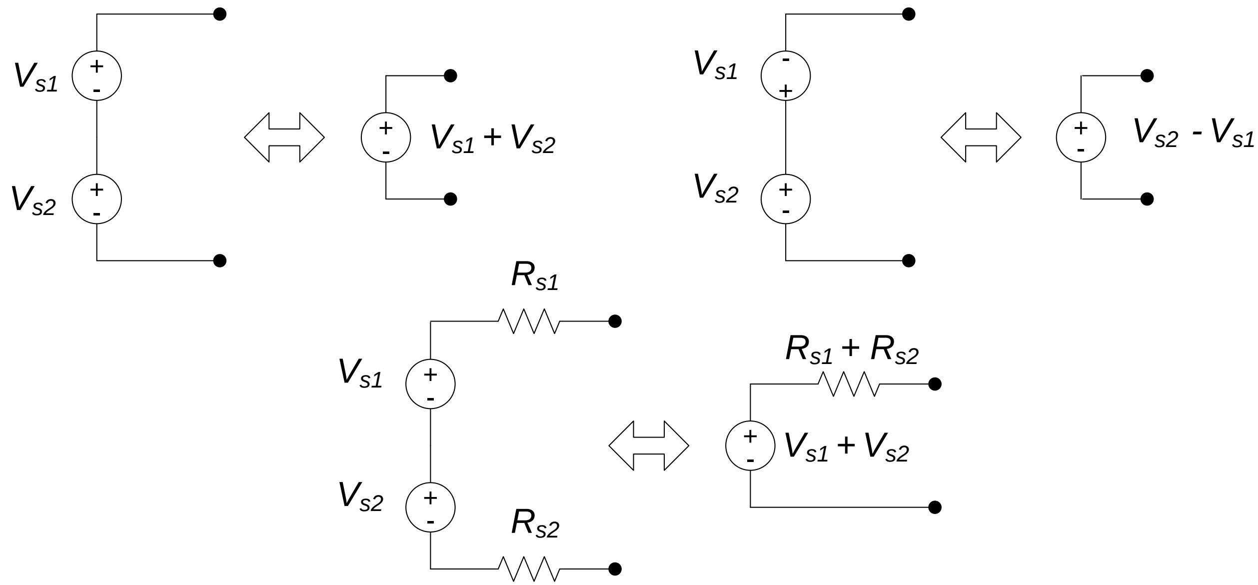
$$G_{eq} = G_1 + G_2$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

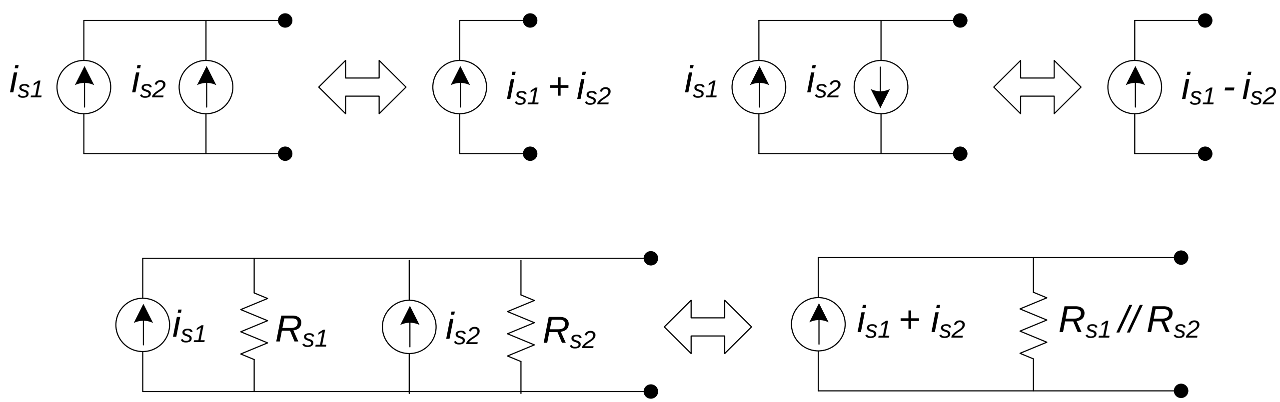


Associação de fontes

- de tensão (em **série**)



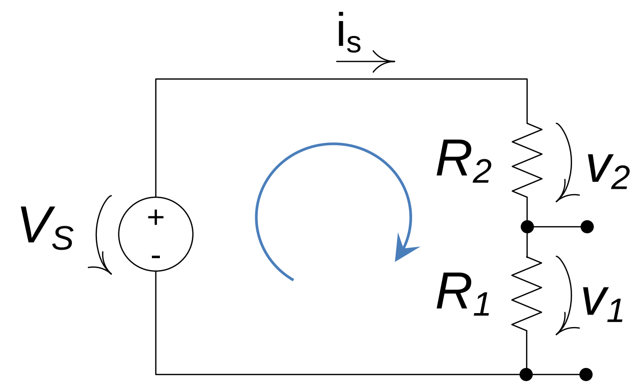
- de corrente (em **paralelo**)



Divisor de tensão

Aplicando a lei das malhas e a lei de Ohm

- circulando no sentido horário



$$v_1 + v_2 - V_s = 0 \;\Leftrightarrow\; V_s = v_1 + v_2 \text{ (KVL)}$$

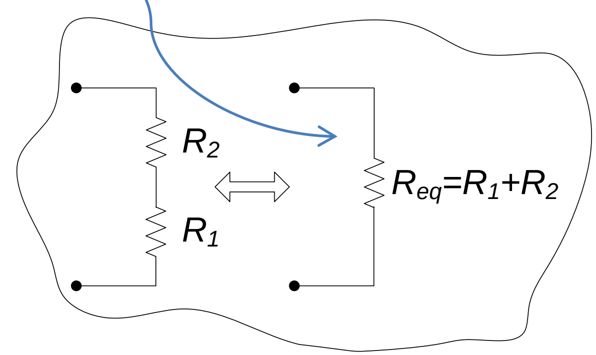
$$v_2 = i_s.R_2;\; v_1 = i_s.R_1 \qquad \Leftrightarrow$$

- resulta:

$$V_s = v_2 + v_1 = i_s.R_2 + i_s.R_1 = i_s(R_2 + R_1) = i_s.R_{eq}$$

$$V_s = i_s(R_2 + R_2) \;\Leftrightarrow\; i_s = \frac{V_s}{R_1 + R_2} \qquad \Leftrightarrow$$

$$v_1 = i_s.R_1 = V_s\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



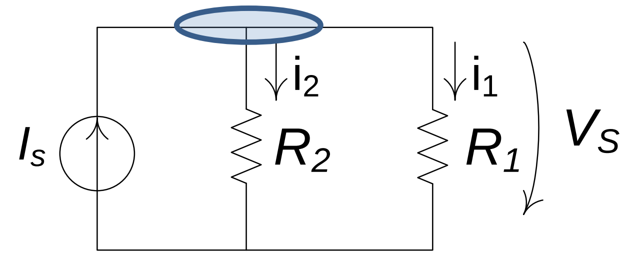
Divisor de corrente

Aplicando a lei dos nós

- considerando positivas as correntes que saem do nó:

$$-I_s + i_1 + i_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ I_s = i_1 + i_2 \text{ (KCL)}$$

$$v_s = R_2.i_2 = R_1.i_1 \ \Rightarrow \ \frac{i_2}{i_1} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \Leftrightarrow$$



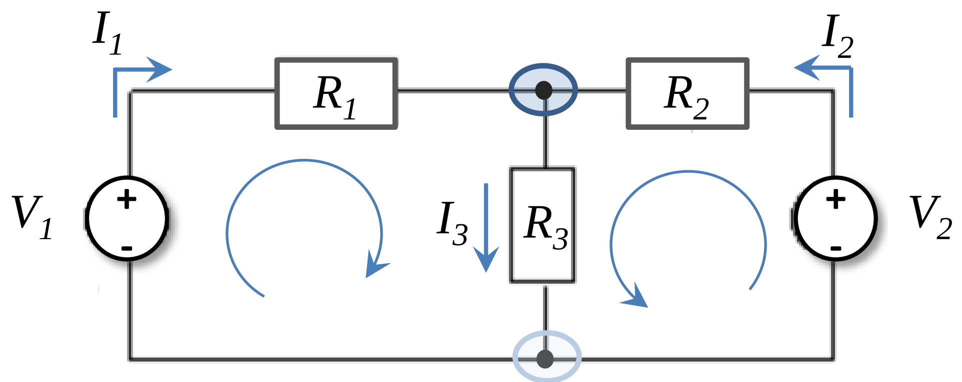
- resulta:

$$I_s = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 = i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = i_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2} \ \Rightarrow \ i_1 = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Análise de circuitos (exemplo)

regras para aplicar as leis de Kirchhoff



- ... primeiro

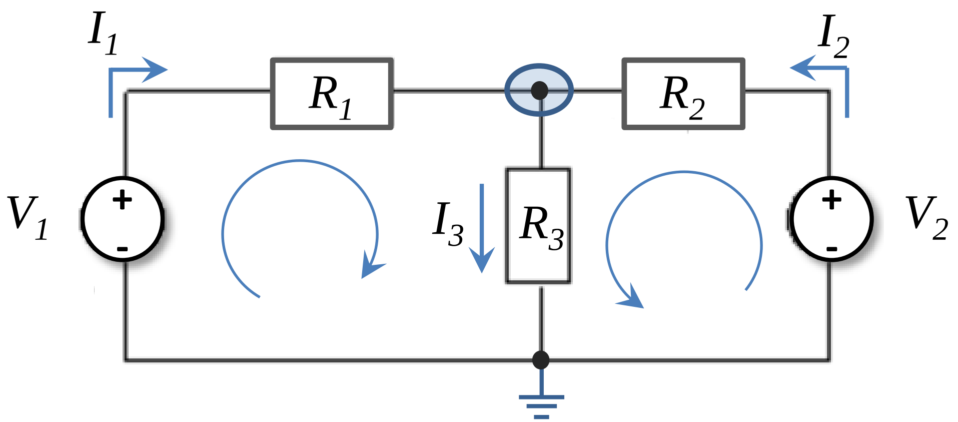
① *Definir os sentidos das correntes em cada ramo do circuito*

② *Definir o sentido de circulação nas malhas*

③ *Definir os nós relevantes do circuito*

Análise de circuitos

regras para aplicar as leis de Kirchhoff



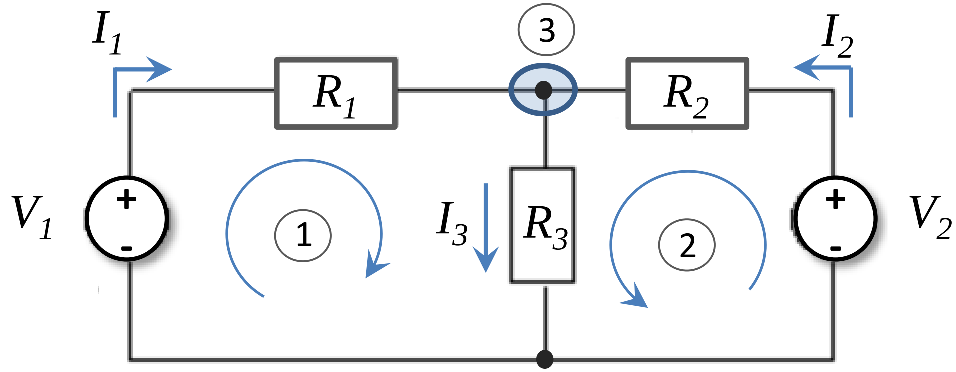
- … quando um circuito tem mais do que uma fonte:

    ① *Aplicar a lei das malhas a todas as malhas que não contenham fontes de corrente*

    ② *Aplicar a lei dos nós a todos os nós menos um (normalmente a todos menos ao nó de massa ou terra)*

Análise de circuitos

... quando um circuito tem mais do que uma fonte

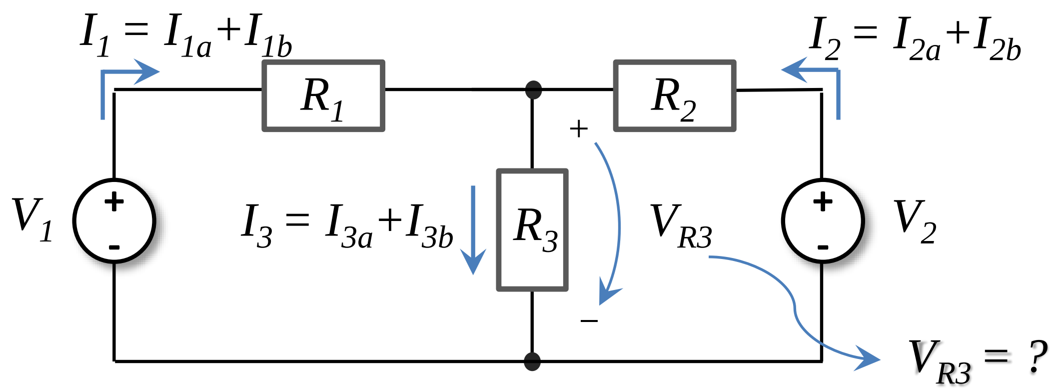


- ... aplicar as leis de Kirchhoff e resolver o sistema de equações

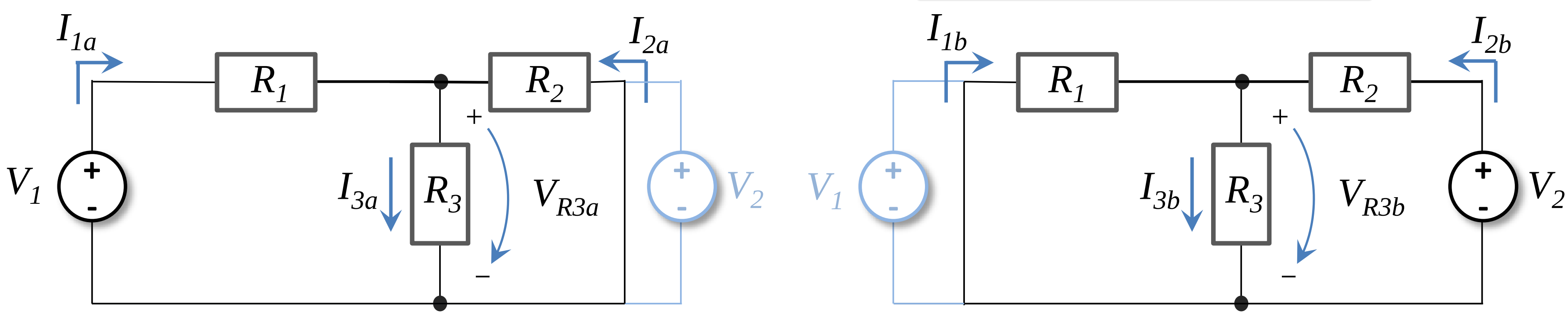
$$
\begin{cases}
1 \quad -V_1 + R_1 I_1 + R_3 I_3 = 0 \qquad (KVL) \\
2 \quad -V_2 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \qquad (KVL) \\
3 \quad I_3 = I_1 + I_2 \qquad (KCL)
\end{cases}
$$

Teorema da sobreposição

... alternativamente podemos aplicar o teorema da sobreposição



- num sistema linear com várias fontes podemos considerar o efeito isolado de cada uma sobre qualquer corrente ou tensão <u>anulando todas as outras</u>:

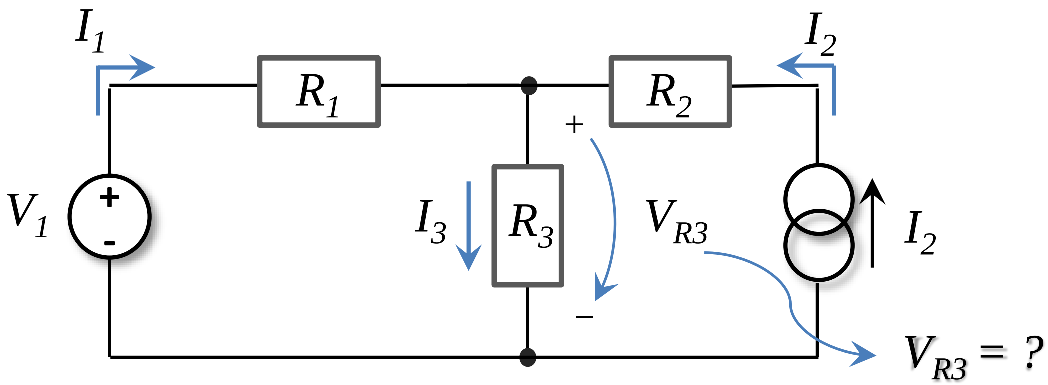


(a) + (b)

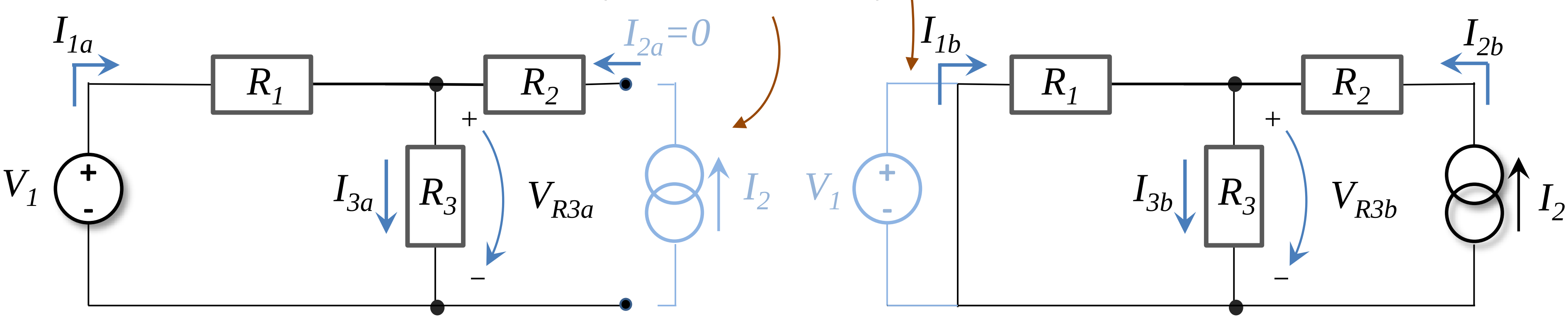
$$V_{R3} = V_{R3a} + V_{R3b}$$

Teorema da sobreposição

… exemplo com fontes de corrente e de tensão independentes



- <u>anular uma fonte</u>: $\begin{cases} V = 0 \text{ (curto-circuito)} \\ I = 0 \text{ (circuito aberto)} \end{cases}$

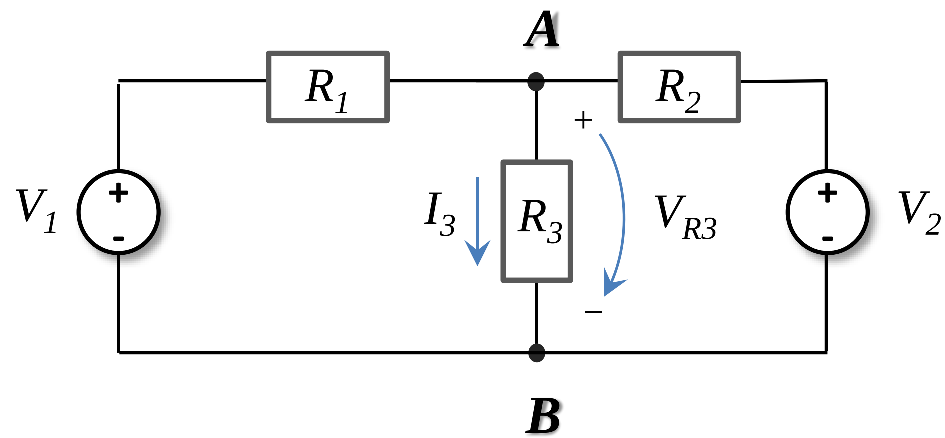


(a) + (b)

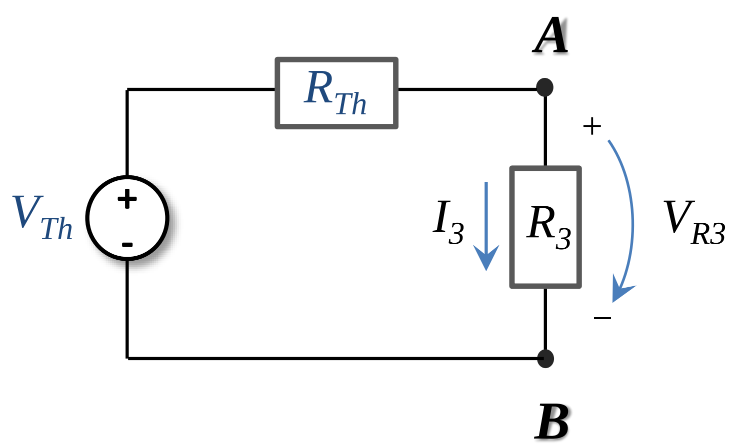
$$V_{R3} = V_{R3a} + V_{R3b}$$

Teorema de Thévenin

... designa-se como circuito <u>equivalente de Thévenin</u> aos terminais AB



- ...o circuito equivalente composto por uma fonte de tensão $\boldsymbol{V_{Th}}$ e uma resistência equivalente $\boldsymbol{R_{Th}}$ que permite analisar o comportamento aos terminais AB

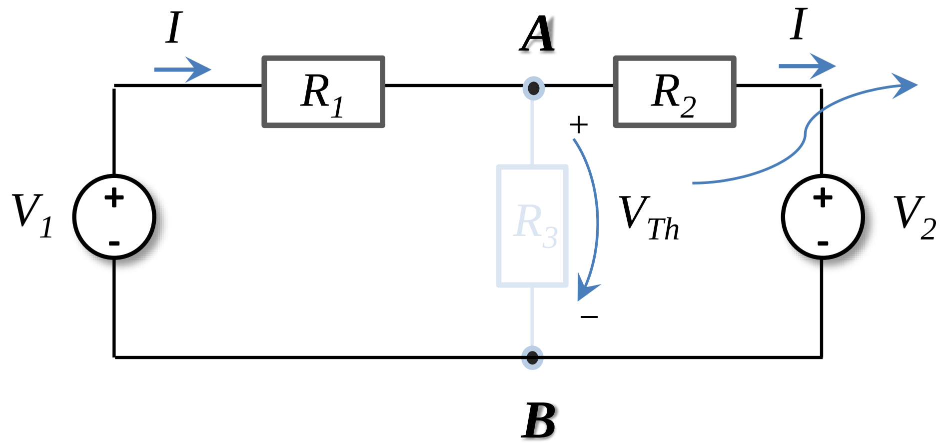


$$V_{Th} = ?$$

$$R_{Th} = ?$$

Teorema de Thévenin

... V_{Th} é dada pela tensão aos terminais AB (em aberto)

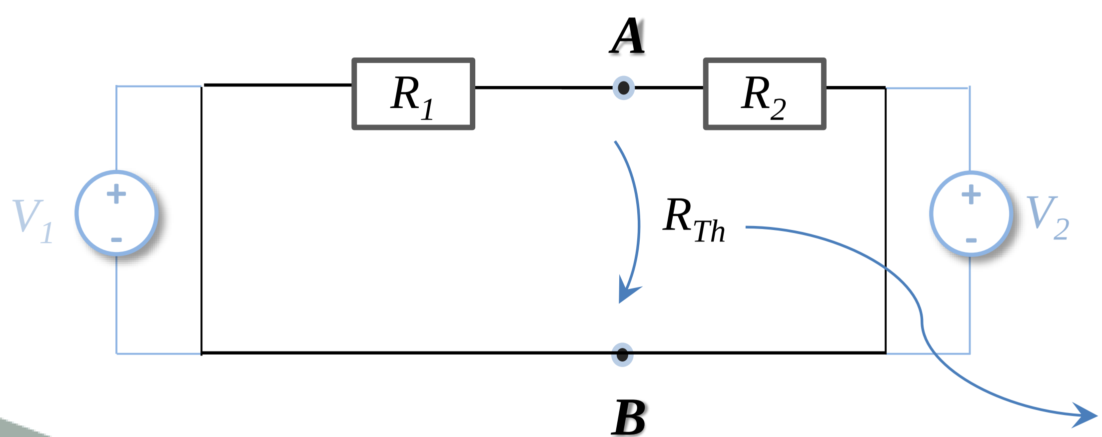


$$-V_1 + R_1 I + R_2 I + V_2 = 0$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2}$$

$$V_{Th} = R_2 I + V_2$$

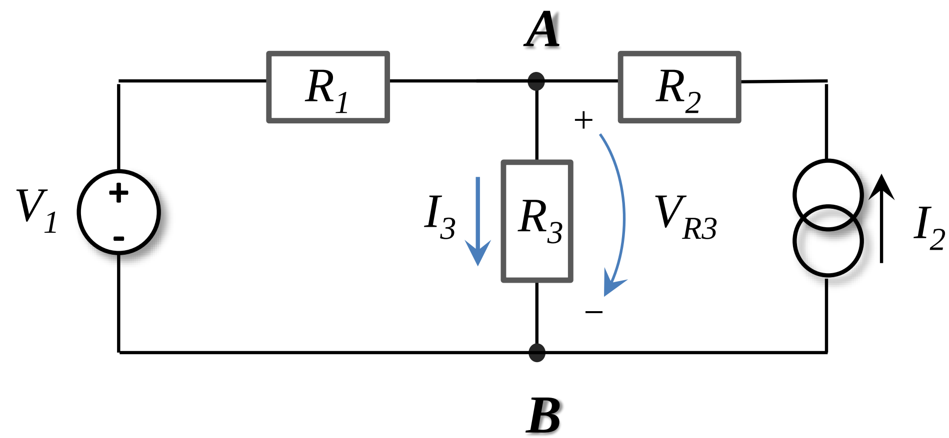
- R_{Th} é a impedância equivalente aos terminais AB (em aberto) (calculada anulando as fontes independentes)



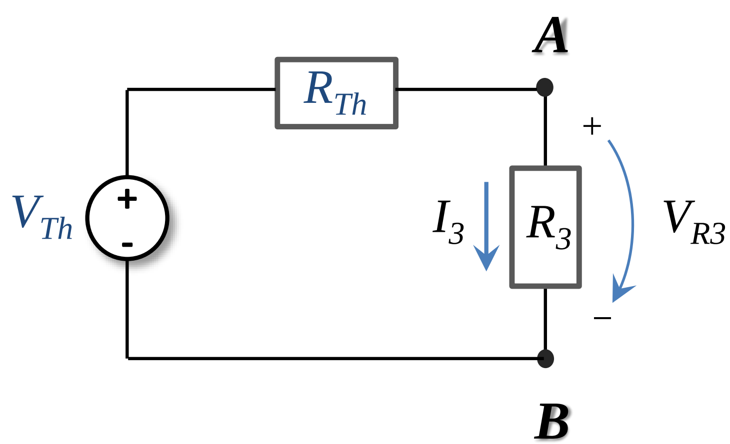
$$R_{Th} = R_1 // R_2$$

Teorema de Thévenin

… exemplo com fontes de corrente e de tensão independentes



- o circuito equivalente de Thévenin aos terminais AB, será:

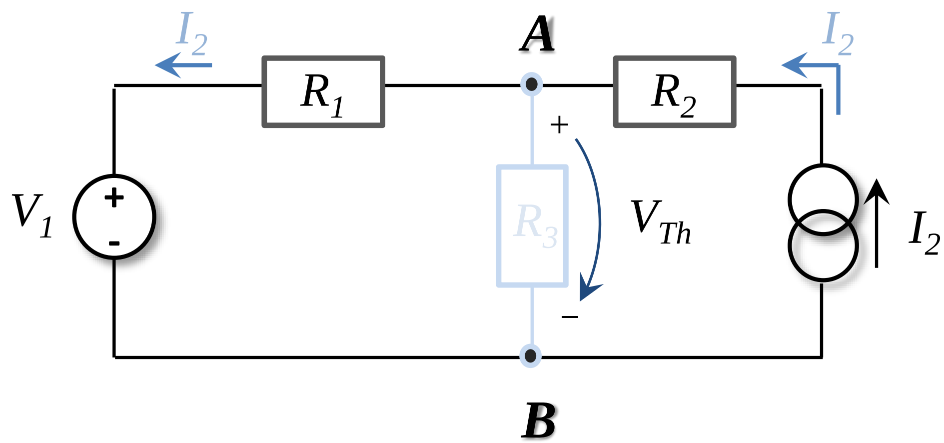


$V_{Th} = ?$

$R_{Th} = ?$

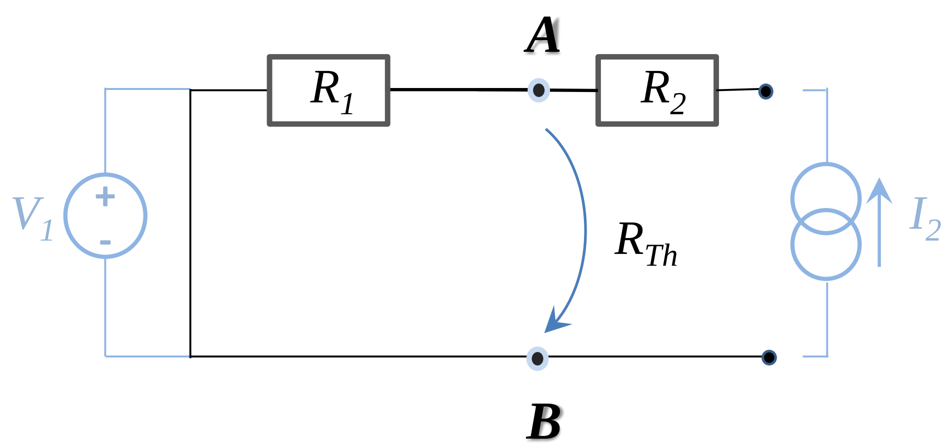
Teorema de Thévenin

… cálculo de $\boldsymbol{V_{Th}}$



$$V_{Th} = R_1\, I_2 + V_1$$

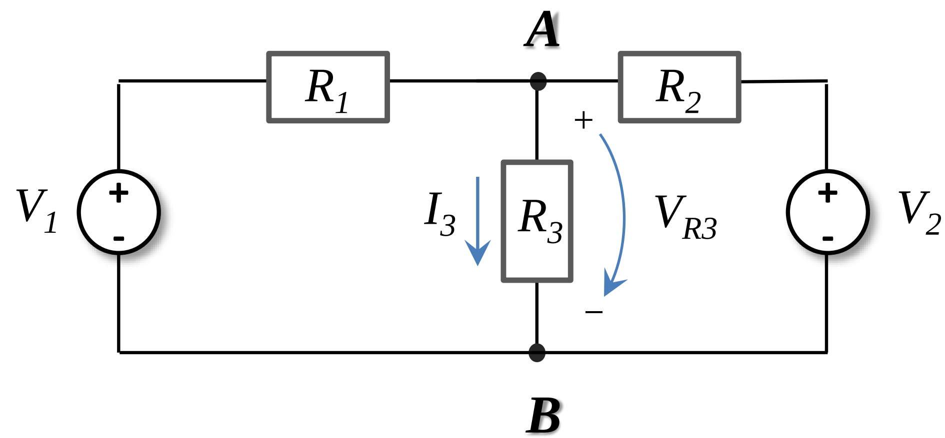
… e de $\boldsymbol{R_{Th}}$



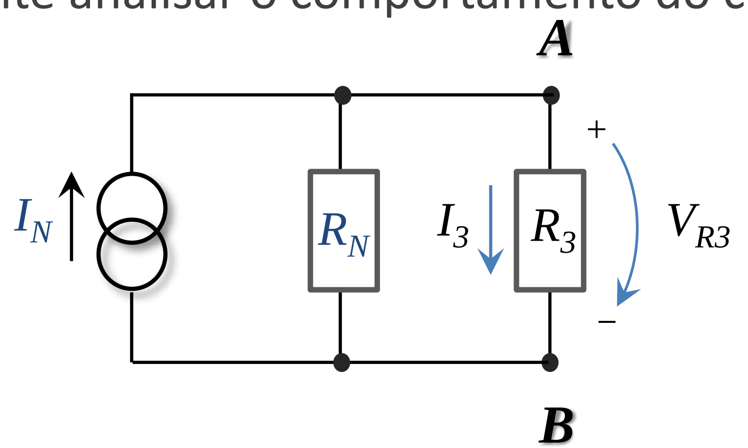
$$R_{Th} = R_1$$

Teorema de Norton

… designa-se como circuito <u>equivalente de Norton</u> aos terminais AB



- o circuito composto por uma fonte de corrente $\boldsymbol{I_N}$ e uma impedância equivalente $\boldsymbol{R_N}$ que permite analisar o comportamento do circuito original aos terminais AB

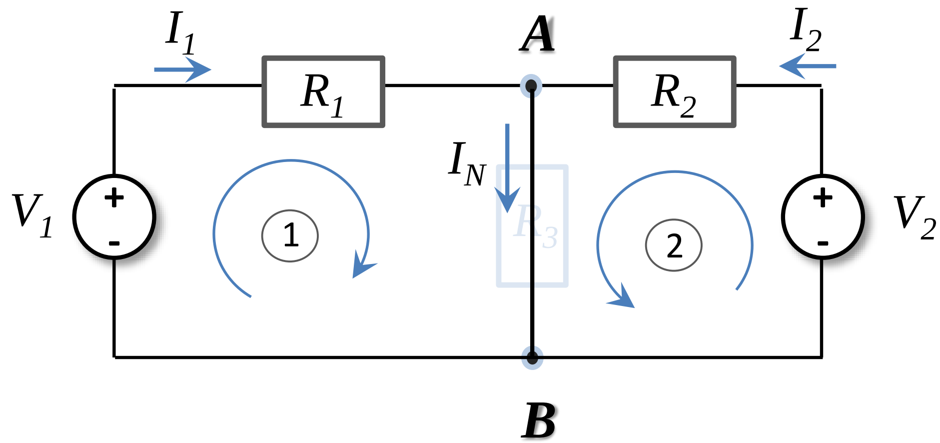


$I_N = ?$

$R_N = ?$

Teorema de Norton

… I_N é dada pela corrente aos terminais AB (em curto-circuito)

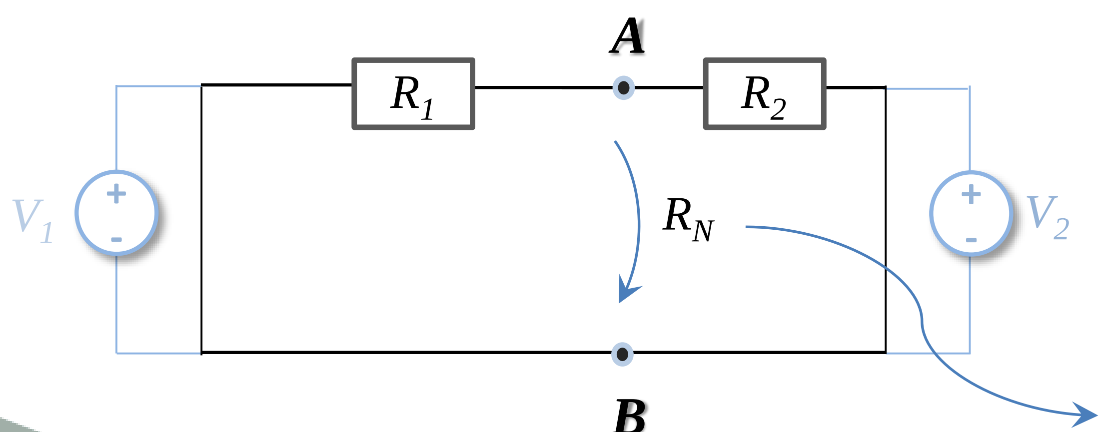


① $-V_1 + R_1 I_1 = 0$

② $-V_2 + R_2 I_2 = 0$

$I_N = I_1 + I_2$

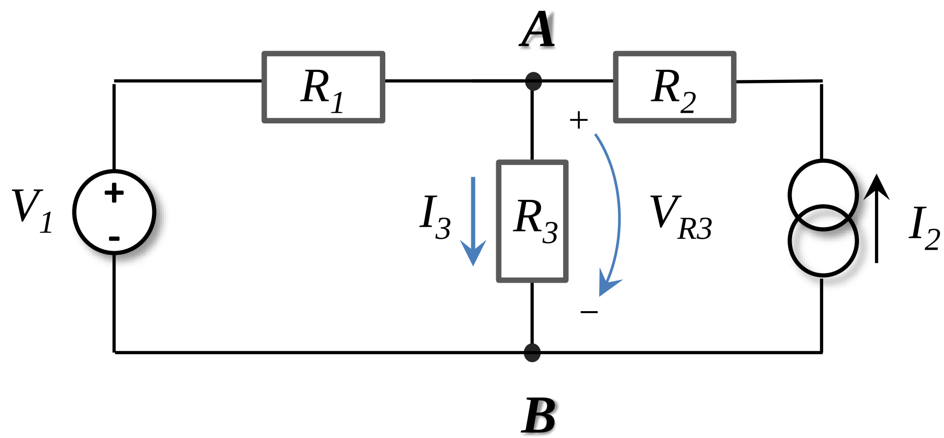
- R_N é a impedância equivalente aos terminais AB (em aberto) (é igual à resistência equivalente de Thévenin)



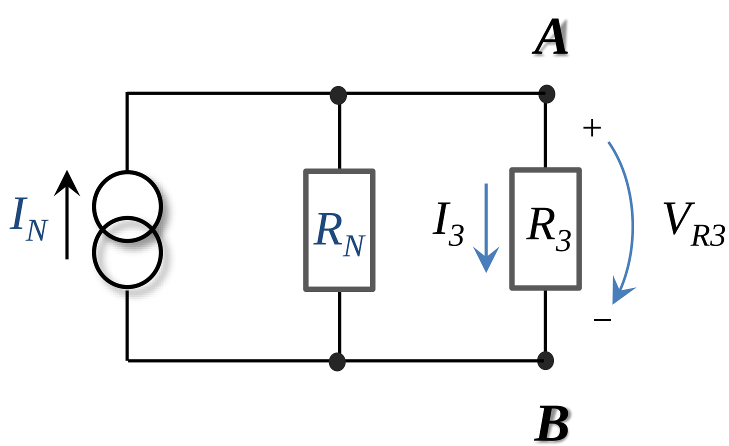
$R_N = R_1 \,//\, R_2$

Teorema de Norton

… exemplo com fontes de corrente e de tensão independentes



- o circuito equivalente de Norton aos terminais AB, será:

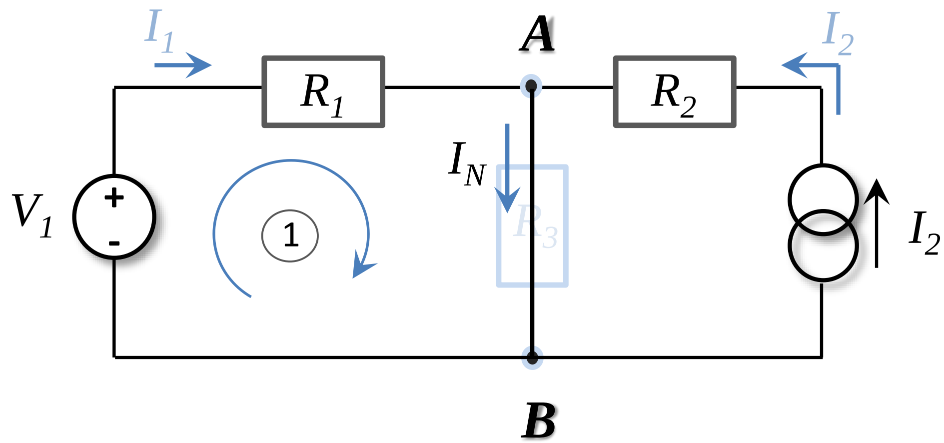


$I_N = ?$

$R_N = ?$

Teorema de Norton

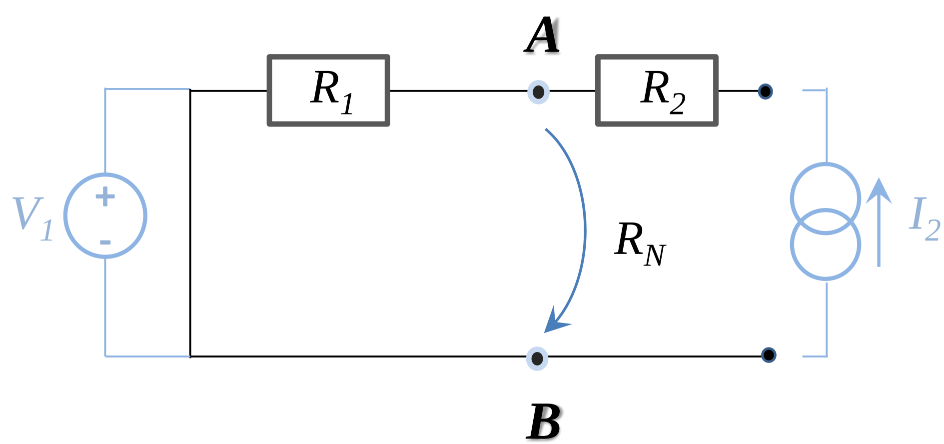
... cálculo de $\boldsymbol{I_N}$



1 $-V_1 + R_1 I_1 = 0$

$$I_N = V_1 / R_1 + I_2$$

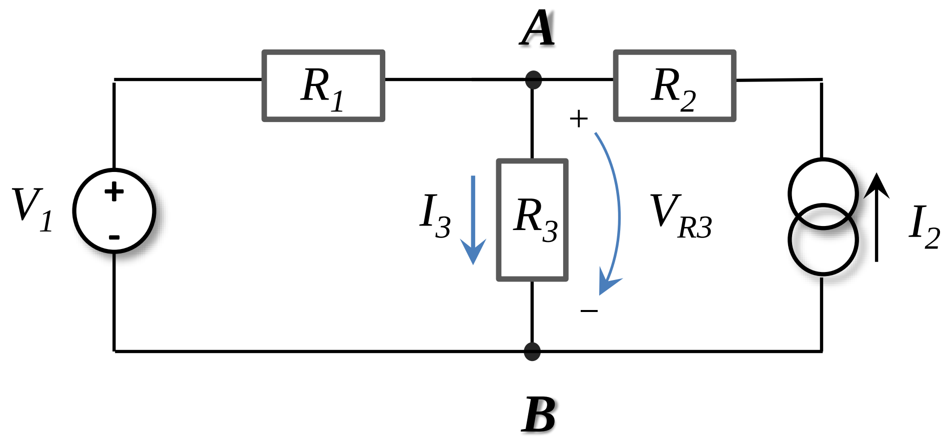
... e de $\boldsymbol{R_N}$



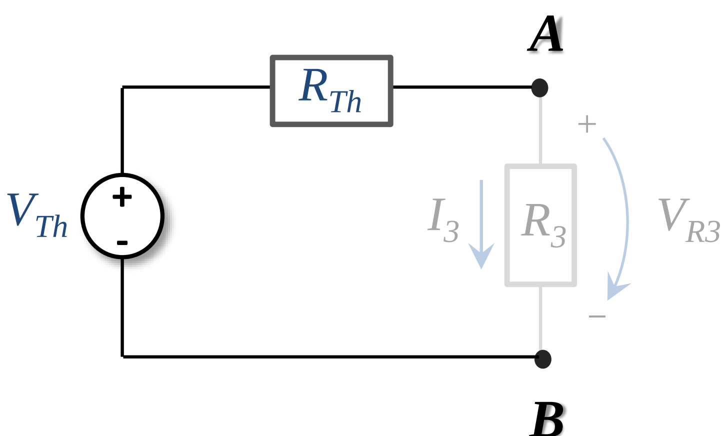
$$R_N = R_1$$

Circuitos equivalentes de Thévenin e Norton

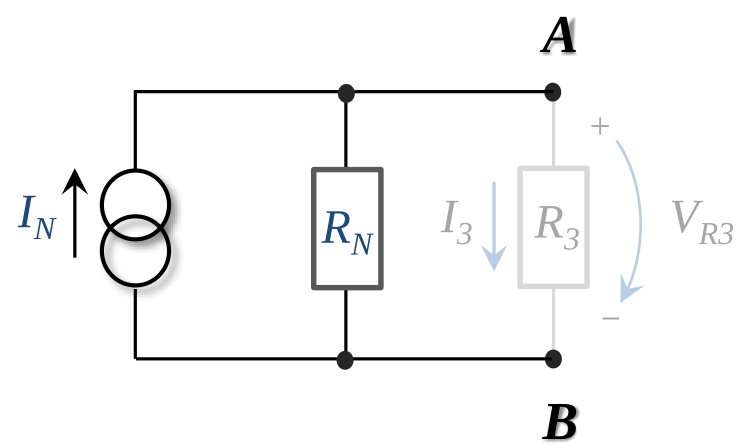
... para qualquer circuito (exemplo)



- ... equivalência entre os circuitos de Thévenin e de Norton aos terminais AB:



$\Leftrightarrow$

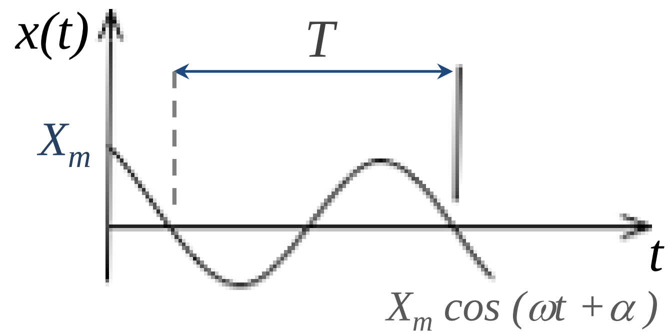


$$\begin{cases} I_N = V_{Th} / R_{Th} \\ R_{Th} = R_N \end{cases}$$

Regime forçado sinusoidal

- Para estudar a resposta de um circuito em corrente alternada (AC) é necessário definir um modelo de análise para um estimulo sinusoidal

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$



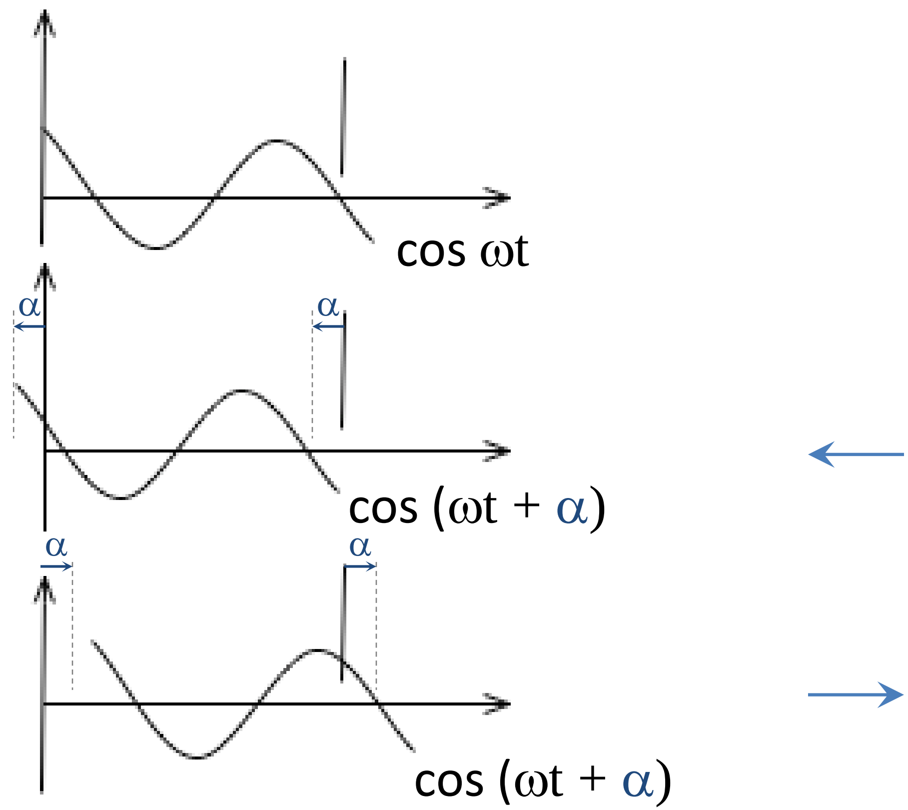
- $x(t)$ – valor instantâneo do sinal
- X_m – amplitude ou valor máximo
- ω – frequência angular, $\omega = 2\pi f$, $f = 1/T$ (T é o período)
- α – fase na origem dos tempos ($t = 0$)

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Regime forçado sinusoidal

- O valor da fase pode ser nulo, positivo ou negativo, representando respectivamente por:

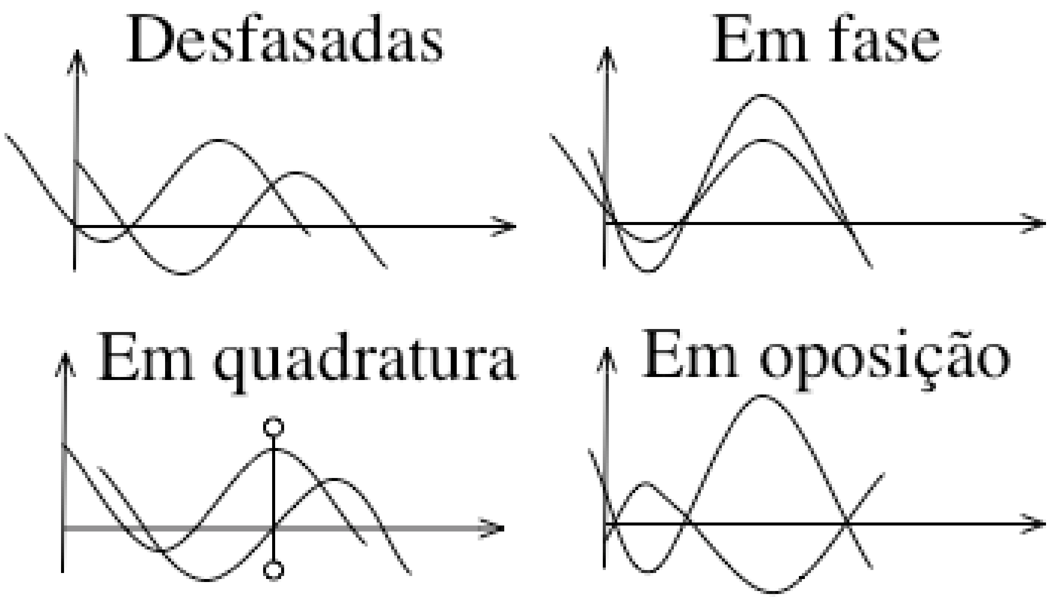
  - $\alpha = 0$ (em fase)
  - $\alpha > 0$ (avanço)
  - $\alpha < 0$ (atraso)



$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Regime forçado sinusoidal

- Definições comuns para a relação entre duas ondas:



$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Valor médio e valor eficaz

- O valor médio de um sinal sinusoidal é nulo

$$x_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = 0$$

- O valor eficaz de um sinal sinusoidal é dado por

$$X_{ef} = \sqrt{(x)^2_{av}} = \left[\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt\right]^{1/2} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

$$x(t) = \sqrt{2}\,X_{ef}\cos(\omega t + \alpha)$$

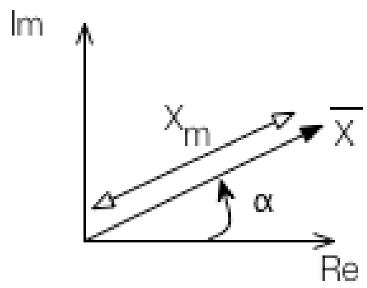
Notação complexa

- A notação complexa é uma forma de representar sinais sinusoidais e resulta da utilização da famosa **fórmula de Euler**:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[\overline{X}e^{j\omega t}\right]$$

$$\overline{X} = X_m e^{j\alpha}$$



- Amplitude complexa
- Diagrama vectorial

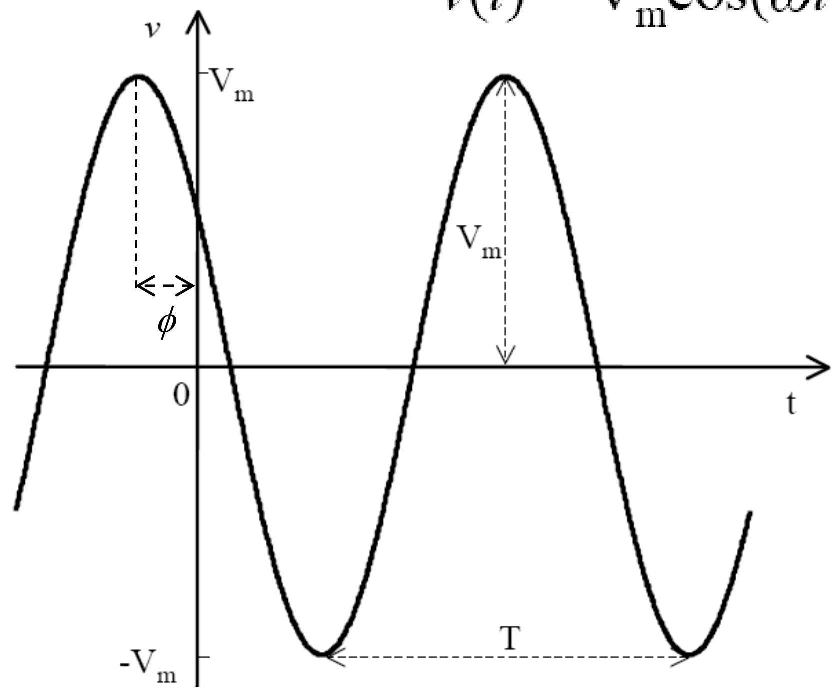
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Notação complexa

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

V_m – amplitude
ω – frequência angular [rad/s]
t – tempo [s]
ϕ – fase [rad]

f – frequência [Hz]



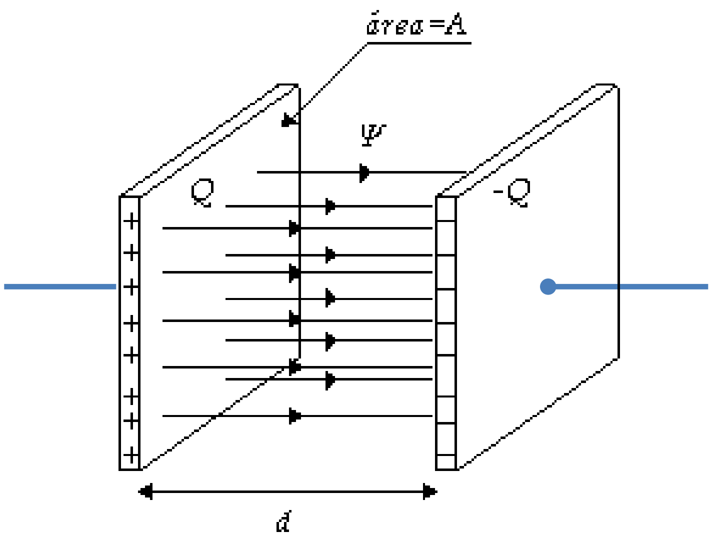
$$\bar{V} = V_m \angle \phi = V_m e^{j\phi} \xrightarrow{\text{Dom. Tempo}} v(t) = Re\left\{V_m e^{j\omega t + \phi}\right\}$$

$\omega = 2\pi f$

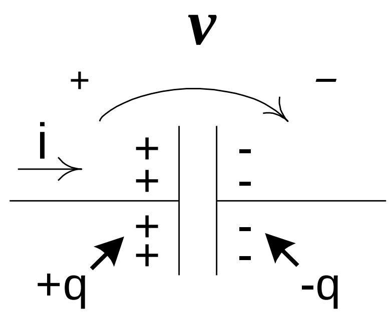
$f = 1 / T$

Condensador [C]

- Condensador plano (ou de placas)



$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$



ε é a constante dieléctrica do isolante

A é a área das placas

d é a distância entre as placas

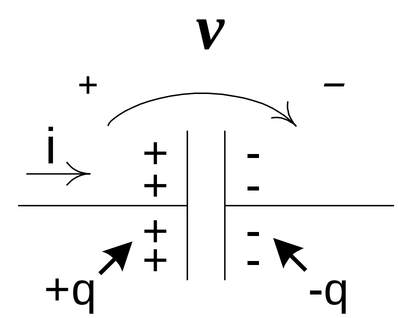
- O valor da capacidade C (F) de um condensador, é função da constante dieléctrica do material isolante ε (F/m), da distância entre as placas d (m), e da área da sua secção A (m^2)

farad [F] = [C]/[V]

Condensador

- Num condensador linear, a constante C é a constante de proporcionalidade entre Q e v

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$



$$Q = C \cdot v$$

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= C.v(t) \\ i(t) &= \frac{dq(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$

$$I = CSV \Rightarrow \frac{V}{I} = \frac{1}{SC} = Z_C$$

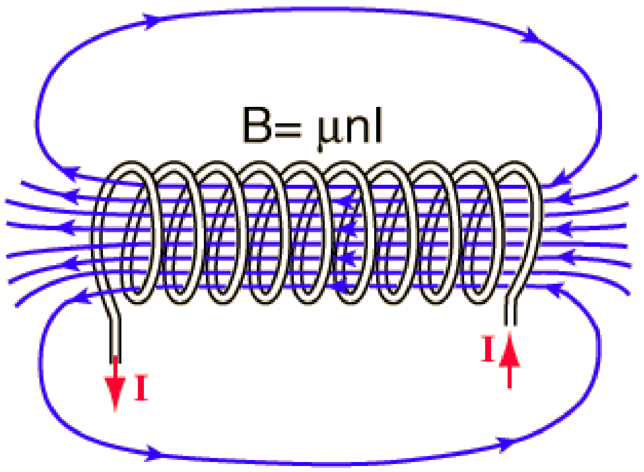
$$\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2\pi f C}$$

energia armazenada num condensador

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C.v^2(t) \quad [\mathrm{J}]$$

Bobine [L]

- Indutância de um solenóide



$$L = \frac{\mu . N^2 . A}{l}$$

μ (H/m) é a permeabilidade do núcleo

l (m) é o comprimento do solenóide

A (m^2) é a área de uma espira

N é o número de espiras

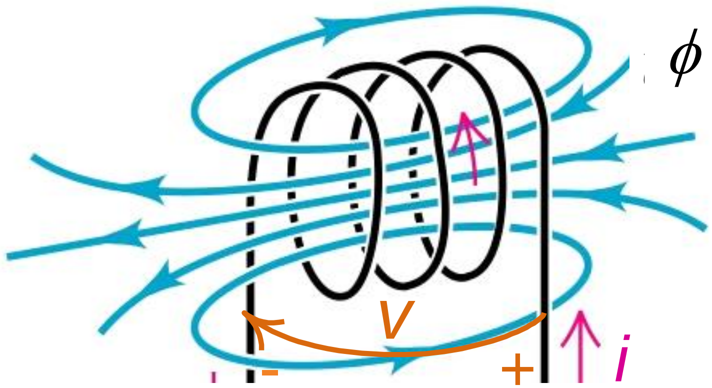
- Valor da indutância L (H) ou coeficiente de auto-indução de uma bobine formada por um fio condutor enrolado num núcleo magnético

henry [H] = [Wb]/[A]

Bobine

- Numa bobine linear, a constante $\boldsymbol{L}$ é a constante de proporcionalidade entre o fluxo magnético $\boldsymbol{\phi}$ e a corrente $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{\phi = L \,.\, i}$$



$$\left.\begin{array}{l} \phi(t) = L.i(t) \\ \\ v(t) = \dfrac{d\phi(t)}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt}$$

$$V = LSI \Rightarrow \frac{V}{I} = SL = Z_L$$

$$\overline{Z}_L = j\omega L = j2\pi f L$$

energia armazenada numa bobine

$$E_L(t) = \frac{1}{2}L.i^2(t) \quad [\mathrm{J}]$$

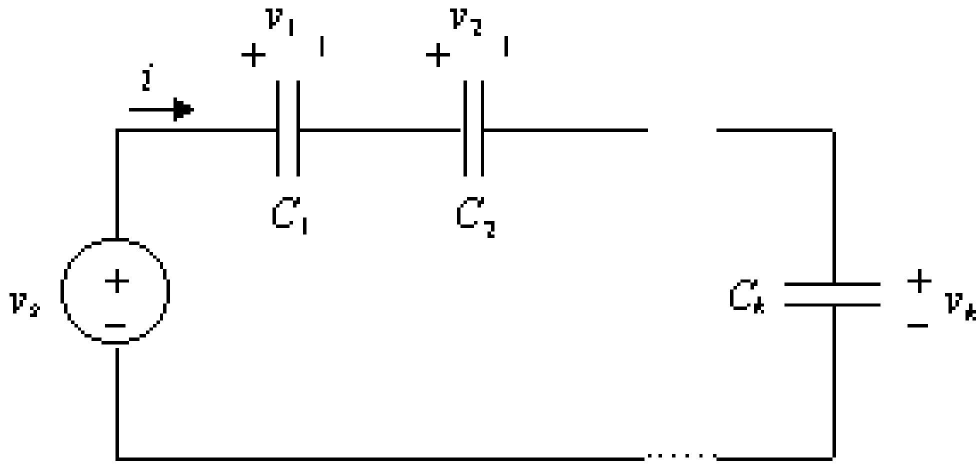
Associação de condensadores

- em **série**

$$v_S = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

$$v_s = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right)\int^t i(\tau)d\tau$$

$$C_{série} = \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k}\right)}$$

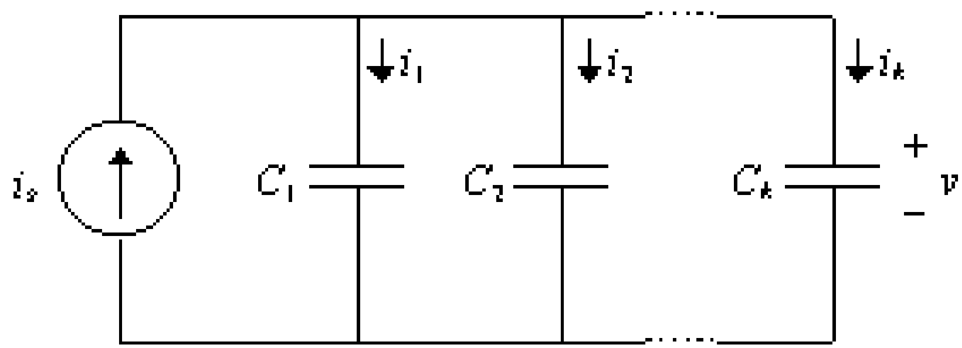


- em **paralelo**

$$i_s = i_1 + i_2 + \ldots i_k$$

$$i_s = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + \ldots + C_k\frac{dv}{dt}$$

$$C_{paralelo} = C_1 + C_2 + \ldots + C_k$$



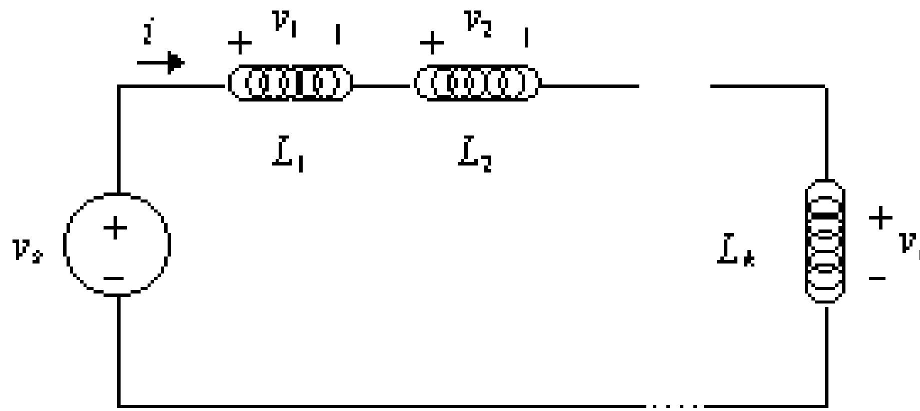
Associação de bobines

- em **série**

$$v_S = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$$

$$v_s = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \ldots + L_k \frac{di}{dt}$$

$$L_{série} = L_1 + L_2 + \ldots + L_k$$

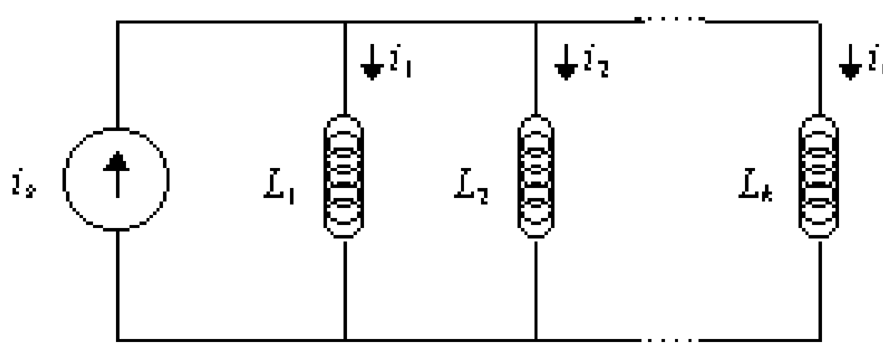


- em **paralelo**

$$i_s = i_1 + i_2 + \ldots i_k$$

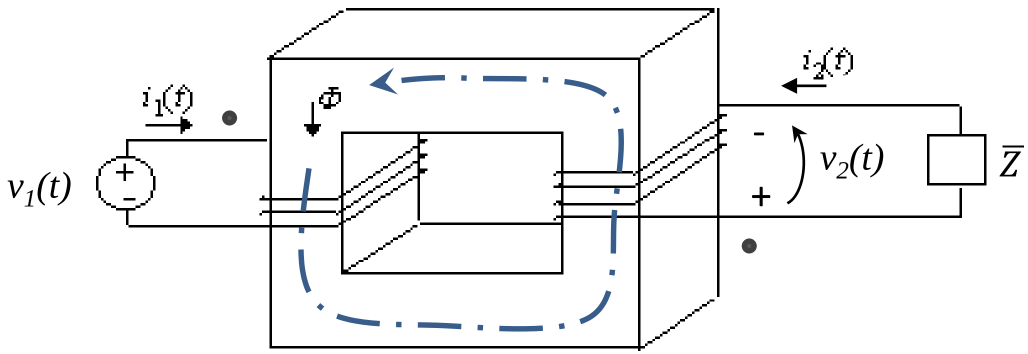
$$i_s(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots \frac{1}{L_k} \right) \int^t v(\tau) d\tau$$

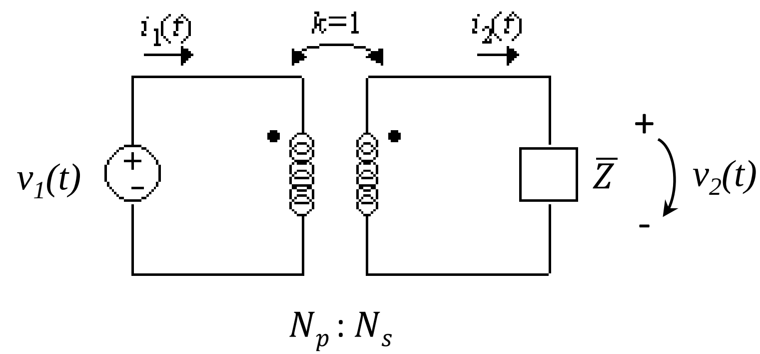
$$L_{paralelo} = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots \frac{1}{L_k} \right)}$$



Transformador

- é um dispositivo formado pelo acoplamento de duas bobinas através de um núcleo de elevada permeabilidade magnética

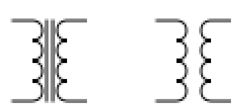




- Um **transformador ideal** transfere energia (ou potência) entre circuitos separados galvanicamente, permitindo controlar os valores (e sentidos) da corrente e da tensão de acordo com as seguintes equações:

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1} v_1 \quad \wedge \quad i_2 = \frac{N_1}{N_2} i_1$$

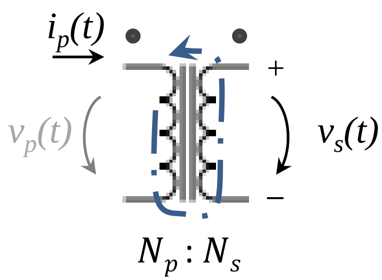
- Símbolo eléctrico:

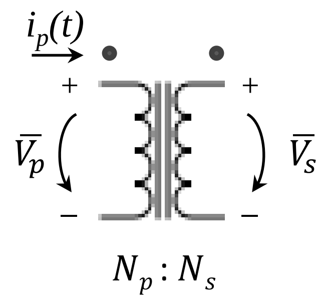


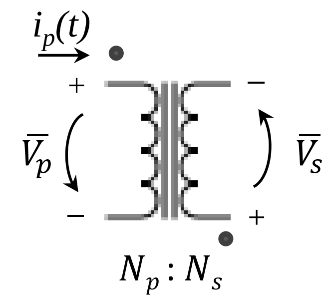
$$p_1 = p_2 = i_1 \cdot v_1 = i_2 \cdot v_2$$

Transformador

- Convenção:
  o **ponto do lado esquerdo** convenciona a entrada de corrente no primário que origina tensão positiva no **ponto do lado direito** do secundário







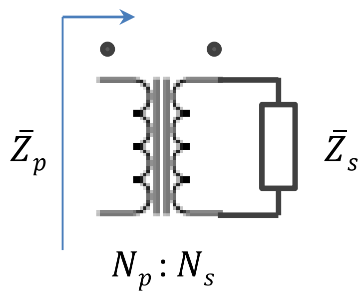
- num transformador ideal não há perdas
  e o acoplamento é perfeito ($k=1$)

$$\overline{V}_s = \frac{N_s}{N_p} \cdot \overline{V}_p \qquad \wedge \qquad \overline{I}_s = \frac{N_p}{N_s} \cdot \overline{I}_p$$

$$p_p = p_s = i_p \cdot v_p = i_s \cdot v_s$$

Transformador

- Adaptação de impedância:
  Impedância equivalente vista do primário $\bar{Z}_p$



$$\overline{Z}_p = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \cdot \overline{Z}_s$$

$$\begin{cases} \overline{Z}_p = \dfrac{\overline{V}_p}{\overline{I}_p} \\ \\ \overline{Z}_s = \dfrac{\overline{V}_s}{\overline{I}_s} \end{cases}$$

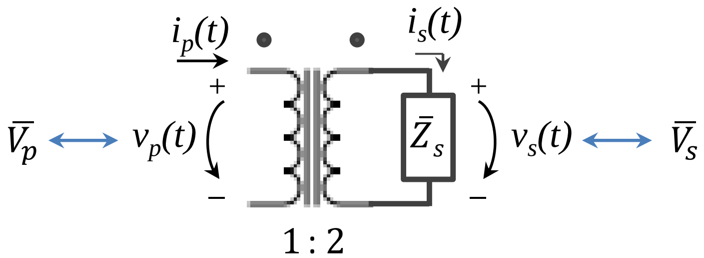
… dado que:

$$\overline{Z}_p = \frac{\overline{V}_p}{\overline{I}_p} = \frac{\dfrac{N_p}{N_s} \cdot \overline{V}_s}{\dfrac{N_s}{N_p} \cdot \overline{I}_s} = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \cdot \overline{Z}_s \quad \Leftarrow \quad \overline{V}_s = \frac{N_s}{N_p} \cdot \overline{V}_p \quad \wedge \quad \overline{I}_s = \frac{N_p}{N_s} \cdot \overline{I}_p$$

$$p_p = p_s = i_p \cdot v_p = i_s \cdot v_s$$

Transformador

- exemplo de um transformador ideal (duplicador de tensão – ***step-up***):

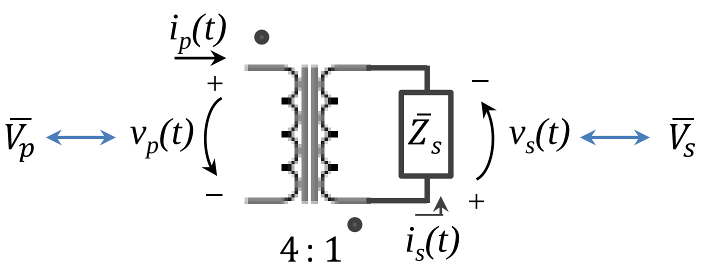


$$\overline{V_s} = 2 \cdot \overline{V_p} \longleftrightarrow v_s(t) = 2 \cdot v_p(t)$$

$$\overline{I_s} = \frac{1}{2} \cdot \overline{I_p} \longleftrightarrow i_s(t) = \frac{1}{2} \cdot i_p(t)$$

$$\overline{Z}_p = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \overline{Z}_s$$

- exemplo de um transformador ideal ***step-down*** com inversão de polaridade



$$\overline{V_s} = \frac{1}{4} \cdot \overline{V_p} \longleftrightarrow v_s(t) = \frac{1}{4} \cdot v_p(t)$$

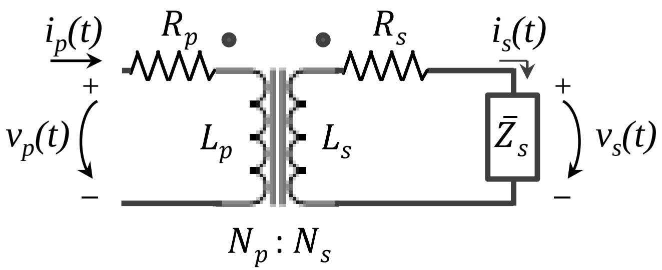
$$\overline{I_s} = 4 \cdot \overline{I_p} \longleftrightarrow i_s(t) = 4 \cdot i_p(t)$$

$$\overline{Z}_p = (4)^2 \cdot \overline{Z}_s$$

$$p_p = p_s = i_p \cdot v_p = i_s \cdot v_s$$

Transformador

- exemplo de um transformador não-ideal



$$v_p = L_p \frac{\partial i_p}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad L_p \; - \; Coef.\ auto - indução\ (prim.)$$

$$v_s = L_s \frac{\partial i_s}{\partial t} \quad \longleftrightarrow \quad L_s \; - \; Coef.\ auto - indução\ (secund.)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_s = L_M \dfrac{\partial i_p}{\partial t} \\[2ex] v_p = L_M \dfrac{\partial i_s}{\partial t} \end{array} \right. \quad \longleftrightarrow \quad L_M \; - \; Coef.\ indução\ mútua$$

- Perdas por efeito de Joule

R_p $- resistência\ (prim.)$

R_s $- resistência\ (secund.)$

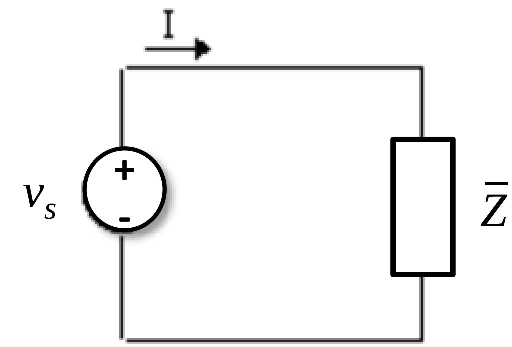
$$k = \frac{L_M}{\sqrt{L_p L_s}} \quad \longleftrightarrow \quad k \; - \; Coef.\ de\ acoplamento$$

(acoplamento perfeito para k=1)
(desacoplamento total para k=0)

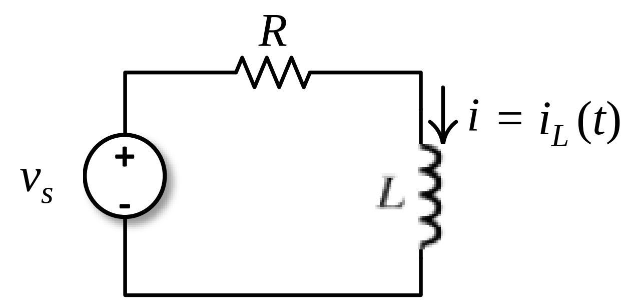
Regime forçado sinusoidal

- Quando um circuito é sujeito a um estímulo, partindo de um determinado conjunto de condições iniciais, este reage segundo a sobreposição de dois comportamentos: a resposta forçada e a resposta transitória (ou natural)

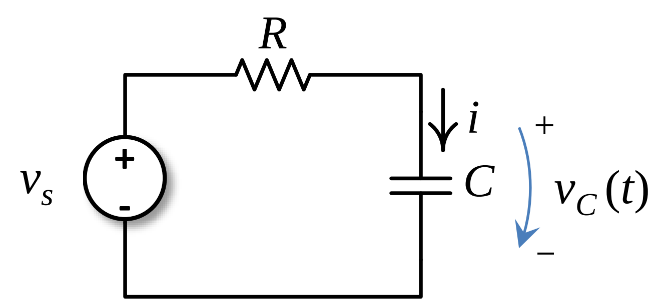
$$i(t) = i_{\text{forçado}}(t) + i_{\text{natural}}(t)$$



- a resposta forçada (permanente ou estacionária) é a que prevalece após a estabilização da resposta transitória (transiente ou natural)



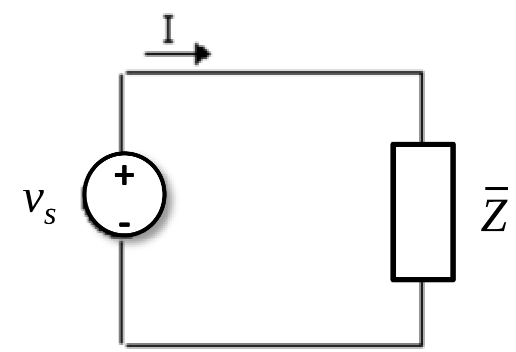
- a resposta transitória depende do circuito e do estado inicial dos condensadores e das bobinas, e geralmente ocorre durante um curto espaço de tempo



Resposta transitória

- Num exemplo simples, em que a impedância da carga seja uma malha RC ou RL a resposta transitória é dada pela solução da equação diferencial de 1ª ordem (a resposta natural não depende da fonte)

$$\frac{df(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}f(t)=0$$



- carga indutiva (RL)

$$\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{R}{L}i_L(t)=0 \qquad \tau = L/R$$

$$i_L(t)=\underbrace{i_{L\,\text{forçado}}}_{\text{solução forçada}}+\underbrace{B\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}}_{\text{solução natural}}$$

- carga capacitiva (RC)

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_C(t)=0 \qquad \tau = RC$$

$$v_C(t)=\underbrace{v_{c\,\text{forçado}}}_{\text{solução forçada}}+\underbrace{B\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}}_{\text{solução natural}}$$

$$f(t)=f_{\text{forçado}}(t)+f_{\text{natural}}(t)$$

Resposta forçada

- Assumindo que o estímulo é uma fonte de tensão sinusoidal,
  a resposta forçada também será sinusoidal, conduzindo à seguinte equação:

$$k\frac{df(t)}{dt}+f(t)=A\cos(\omega t)$$

- Carga indutiva (RL)

$$\phi=-\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}+R\cdot i_L(t)=A\cos(\omega t)\;\Rightarrow\; i_L(t)=\frac{A}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+\phi)+\underbrace{B\,e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{solução natural}}$$

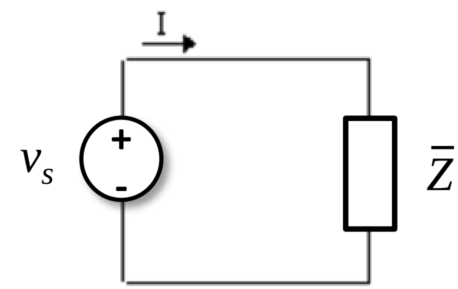
- Carga capacitiva (RC)

$$RC\cdot\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=A\cos(\omega t)\;\Rightarrow\; v_C(t)=\frac{A}{\sqrt{R^2(\omega C)^2+1}}\cos(\omega t+\phi)+\underbrace{B\,e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{solução natural}}$$

$$\phi=-90^{\circ}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{R\cdot\omega C}\right)$$

Resposta forçada

- o mesmo circuito pode ser estudado no domínio da notação complexa, sendo a resposta forçada dada por:



- Carga indutiva (RL)

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\bar{I}_L = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L} \quad \leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + \phi) + \underbrace{B\,e^{-\frac{R}{L}t}}_{\text{solução natural}}$$

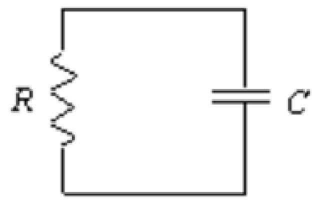
- Carga capacitiva (RC)

$$\bar{V}_C = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\bar{V} \quad \leftrightarrow \quad v_C(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2(\omega C)^2 + 1}}\cos(\omega t + \phi) + \underbrace{B\,e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\text{solução natural}}$$

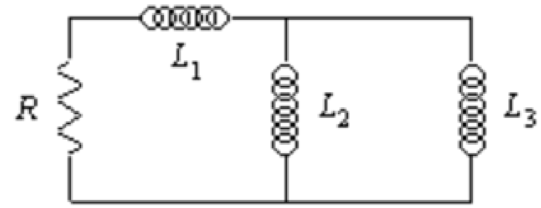
$$\phi = -90^{\circ} + \tan^{-1}\left(\frac{1}{R \cdot \omega C}\right)$$

Exemplos de circuitos

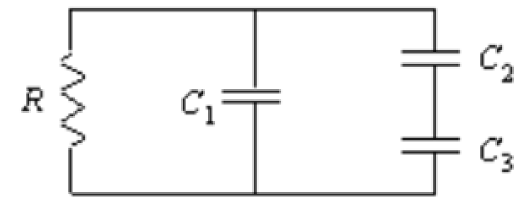
- 1ª ordem



(a) 1.ª ordem

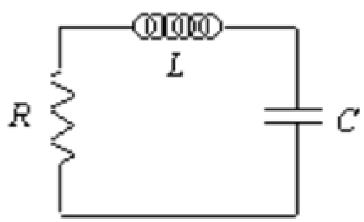


(b) 1.ª ordem

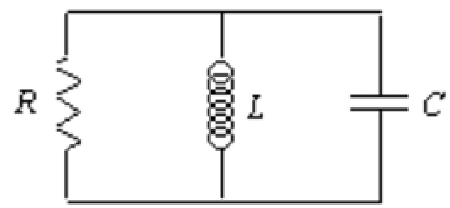


(c) 1.ª ordem

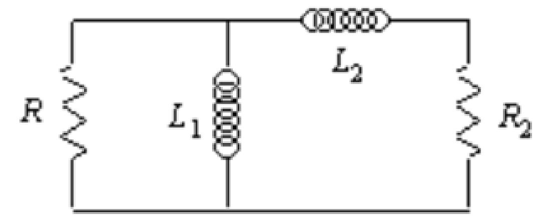
- 2ª ordem



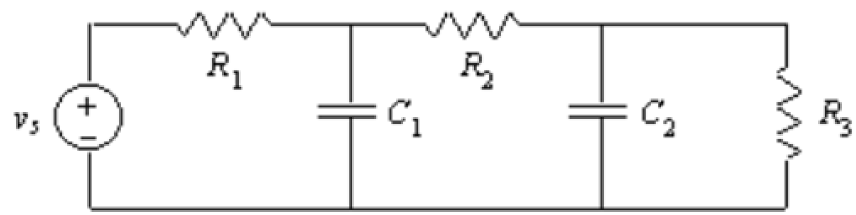
(d) 2.ª ordem



(e) 2.ª ordem



(f) 2.ª ordem

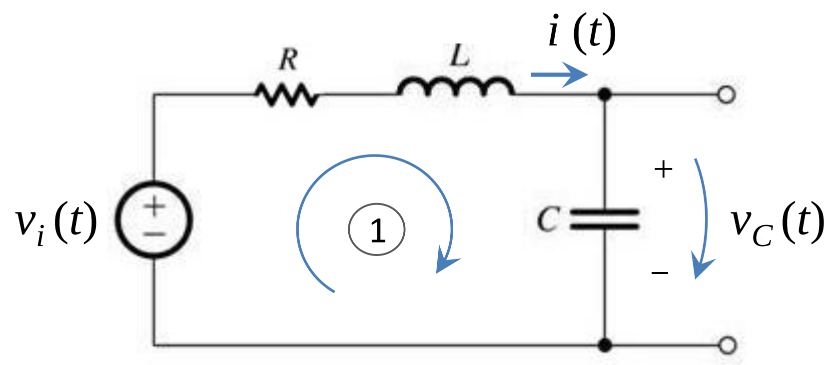


(g) 2.ª ordem

Circuito RLC série

- A análise do circuito RLC série resulta num sistema de <u>segunda ordem</u>

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = v_i(t)$$



$$\frac{d^2 v_c(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_0^2 v_c(t) = v_i(t)$$

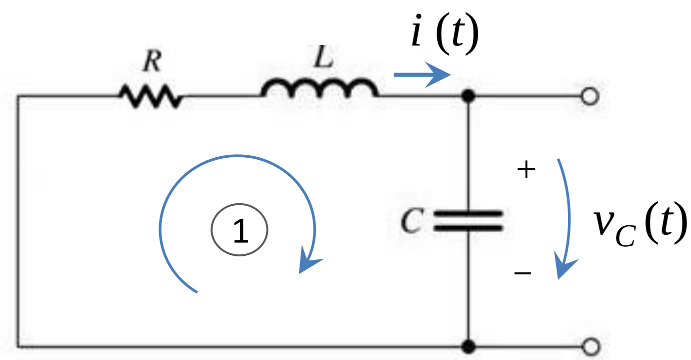
$$\begin{cases} -v_i(t) + Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0 & (1) \\ i(t) = C \cdot \dfrac{dv_C(t)}{dt} \end{cases}$$

$$f(t) = f_{\text{forçado}}(t) + f_{\text{natural}}(t)$$

Circuito RLC série

- a resposta transitória é dada pela solução da equação homogénea (a resposta natural ou regime livre não depende da fonte)

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = 0$$



- cuja solução é dada por:

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{1/LC} \\ 2\alpha = R/L \end{cases}$$

① $$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

$$\frac{dv_C^2(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = 0$$

$$\underbrace{f_{\text{natural}}(t)}_{\text{solução natural}} = \begin{cases} A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} & , \ \alpha > \omega_0 \\ (A_1 + A_2 t)e^{s_1 t} & , \ \alpha = \omega_0 \\ A e^{-\alpha t}\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\cdot t + \phi\right), & \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

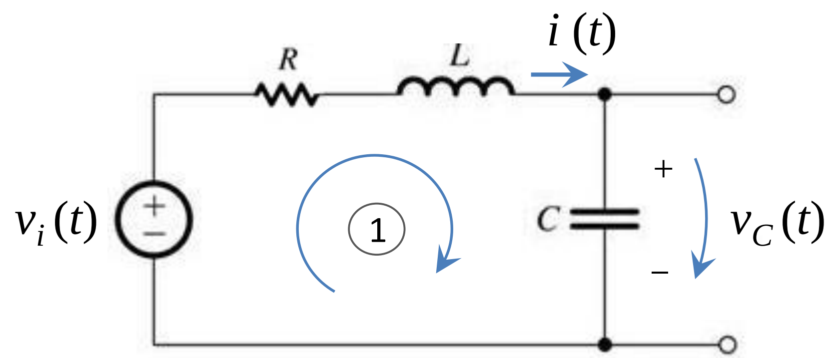
$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

$$f(t) = f_{\text{forçado}}(t) + f_{\text{natural}}(t)$$

Circuito RLC série

- à resposta transitória soma-se a solução particular da equação diferencial (ou solução do regime forçado)

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = v_i(t)$$



- cuja solução é dada por:

$$\underbrace{f_{\text{forçado}}(t)}_{\text{solução particular}} = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

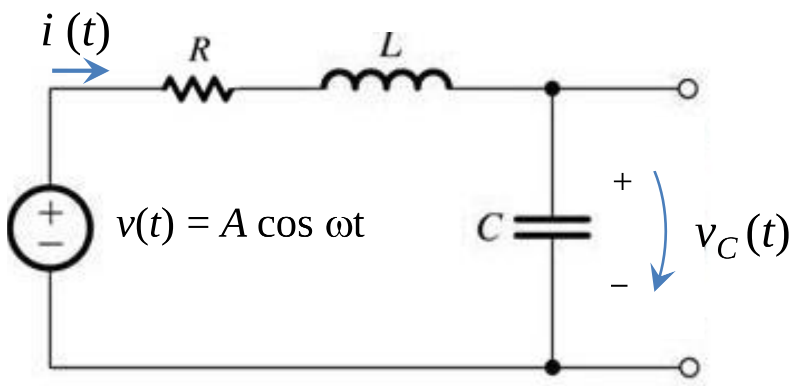
$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

1 $$LC\frac{dv_C^2(t)}{dt^2} + RC \cdot \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = A\cos(\omega t)$$

$$f(t) = f_{\text{forçado}}(t) + f_{\text{natural}}(t)$$

Circuito RLC série

- a resposta total ou solução geral é dada pela soma das duas soluções regime livre + regime forçado



$$\underbrace{v_C(t)}_{\text{solução natural}} = \begin{cases} A_1\,\mathrm{e}^{s_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{s_2 t} & , \ \alpha > \omega_0 \\ \left(A_1 + A_2 t\right)\mathrm{e}^{s_1 t} & , \ \alpha = \omega_0 \\ A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\cdot\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\cdot t + \phi\right), & \alpha < \omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

- a solução geral é dada por:

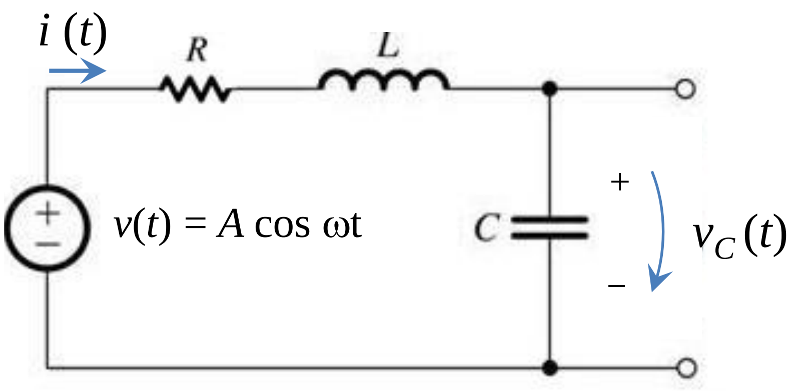
$$\underbrace{v_C(t)}_{\text{solução particular}} = \frac{A}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R}\right)$$

$$v_C(t) = v_{C\,\text{forçado}}(t) + v_{C\,\text{natural}}(t)$$

Circuito RLC série

- o mesmo circuito pode ser estudado usando a notação complexa, sendo a <u>resposta forçada</u> dada por:



- Análise complexa (exemplo): $\bar{V}(t) = A \cdot \ell^{j0} = A\angle 0^{\circ} \quad \leftrightarrow \quad v(t) = A\cos(\omega t)$

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R + j\omega L + 1/\,j\omega C} \quad \leftrightarrow \quad i(t) = \frac{A}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t + \phi) + \underbrace{i_{\text{natural}}(t)}_{\text{solução natural}}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Impedância complexa [$\bar{Z}$]

- A resposta forçada de um circuito genérico, pode ser obtida através da aplicação da metodologia de análise de circuitos resistivos, usando a seguinte tabela:

Dispositivo	Domínio do tempo	Transformada Laplace	Notação complexa	Impedância ($\bar{Z}$) Laplace	Impedância ($\bar{Z}$) complexa
Resistência	$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$	$\bar{V} = R\bar{I}$	R	R
Condensador	$i(t) = C\dfrac{dv(t)}{dt}$	$I(s) = sCV(s)$	$\bar{V} = \dfrac{1}{j\omega C}\cdot\bar{I}$	$\dfrac{1}{sC}$	$\dfrac{1}{j\omega C}$
Bobina	$v(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$	$V(s) = sLI(s)$	$\bar{V} = j\omega L\cdot\bar{I}$	sL	$j\omega L$

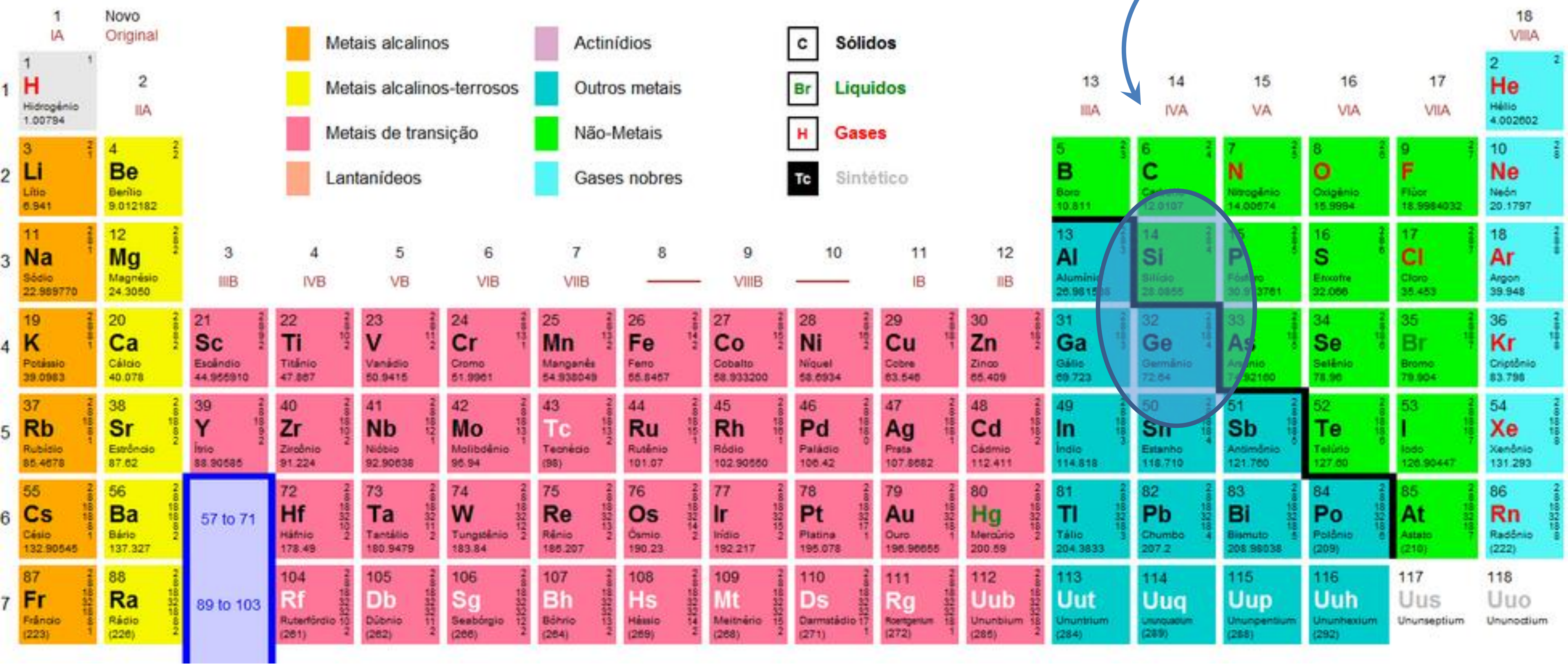
Admitância [S] $\quad \bar{Y} = \dfrac{1}{\bar{Z}}$

Semicondutores

- Metais, não-metais e **semicondutores**

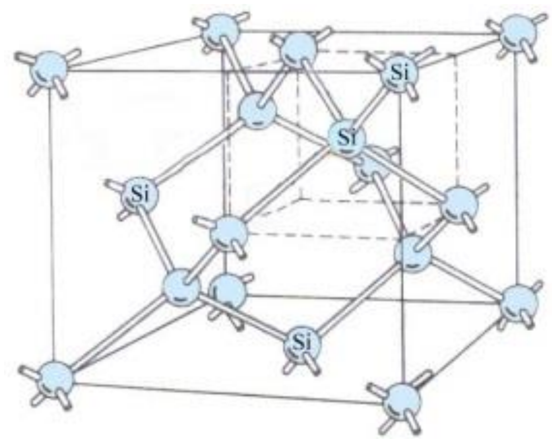
(Grupo IV) | **Si – Silício**

Ge – Germânio



Material semicondutor

- Estrutura cristalina intrínseca de silício (sem impurezas)
  - Isolador a 0K
  - Bom condutor a 300K (ionizado)

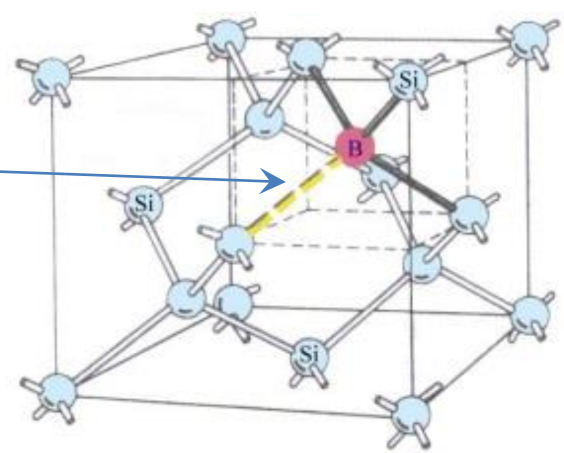


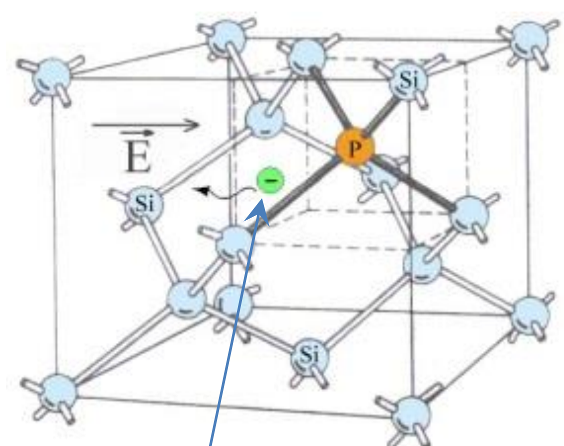
- Estrutura dopada

B – átomos Boro

P – átomos Fósforo

(+) lacuna
Tipo P





(-) electrão livre
Tipo N

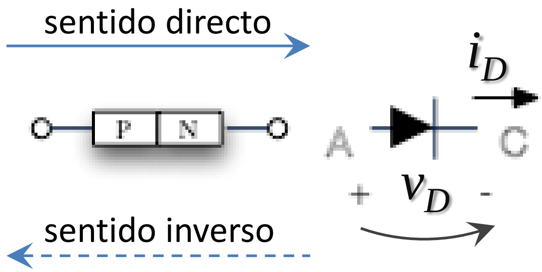
Díodo de junção bipolar

- Junção PN

  União entre materiais semicondutores do tipo P e N

  Região onde os materiais se unem -> zona de depleção

  Zona de transição (criada por processo de fabrico)



A: Ânodo (+)
C: Cátodo (-)

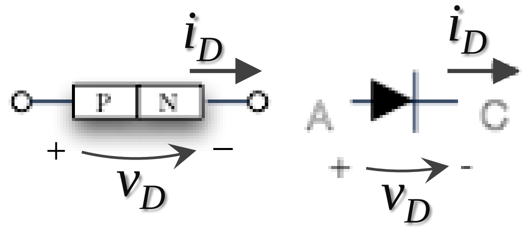
... análise simplificada:

- Comporta-se como um **interruptor** direccional

  ON Deixa passar corrente num sentido (directo)

  OFF Não permite passagem de corrente no outro sentido (inverso)

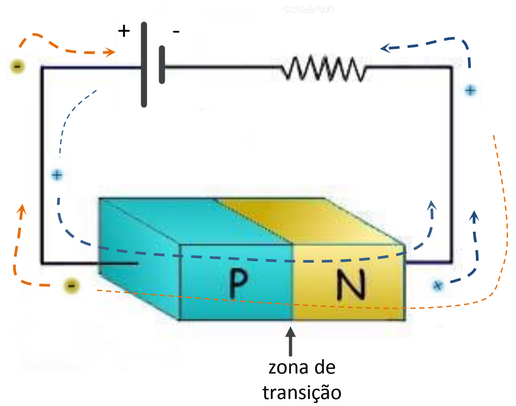
Díodo de junção bipolar

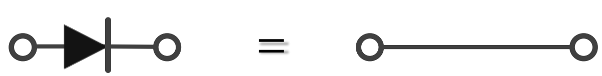


- zonas de funcionamento:
  ON / OFF

ON (polarização directa)

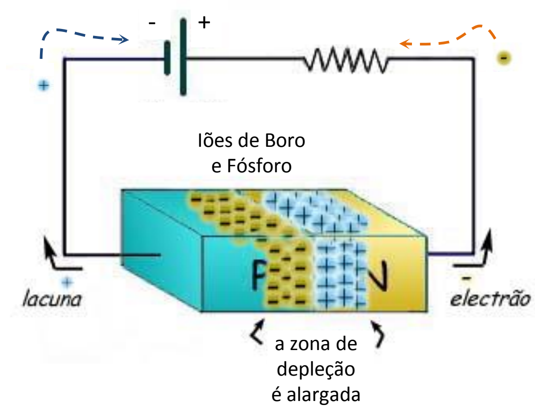
Permite passagem de corrente

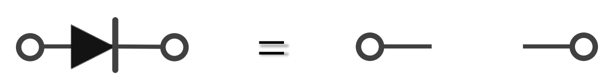




OFF (polarização inversa)

Não permite passagem de corrente

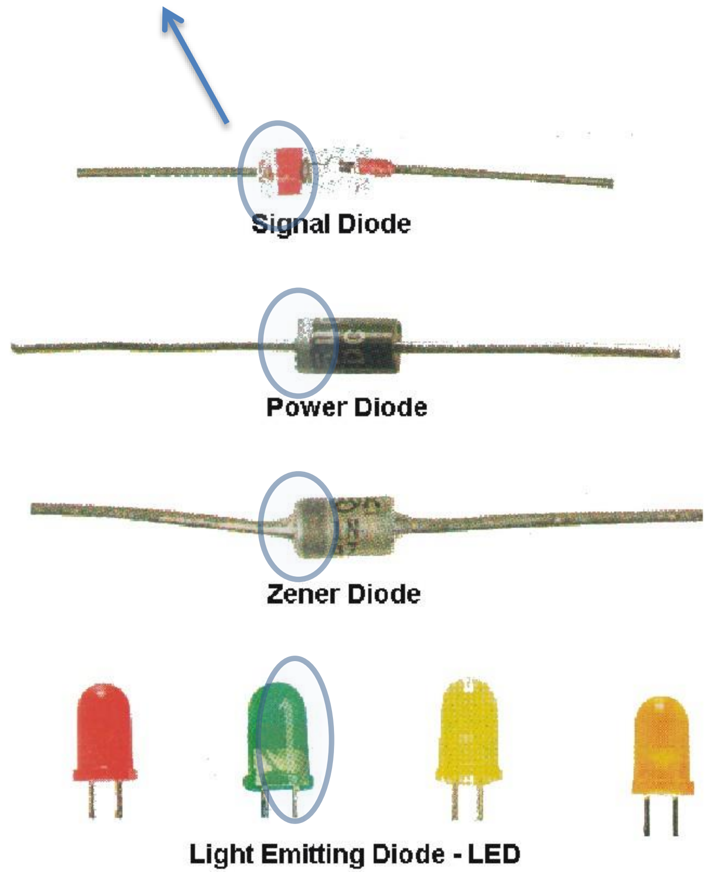




Díodos e LEDs

- Vários tipos:
  - LED (díodo emissor de luz)
  - Fotodíodo
  - Díodos Zener
- Aplicações
  - Reguladores e limitadores
  - Rectificadores
    - Rectificação de sinal alternado
    - Conversão AC→DC

Linha desenhada indica o cátodo (-)



Característica Corrente-Tensão

- Característica não-linear composta por 3 zonas:

- **Directa**

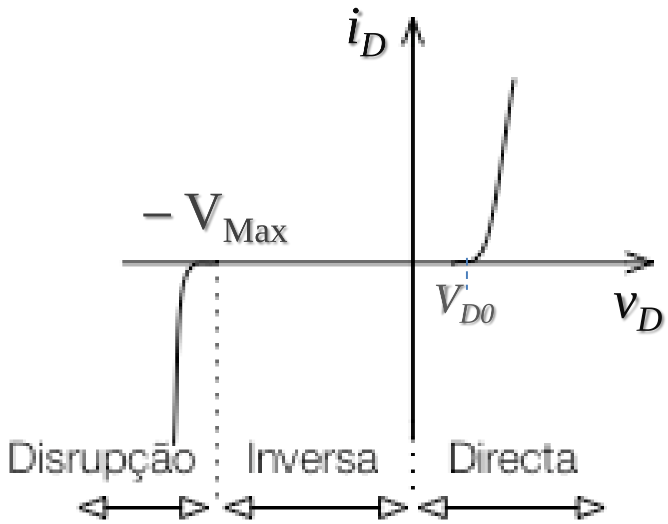
  $(v_D > 0)$

- **Inversa**

  $(-V_{Max} < v_D < 0)$

- **Disrupção**

  $(v_D < -V_{Max})$



Característica Corrente-Tensão

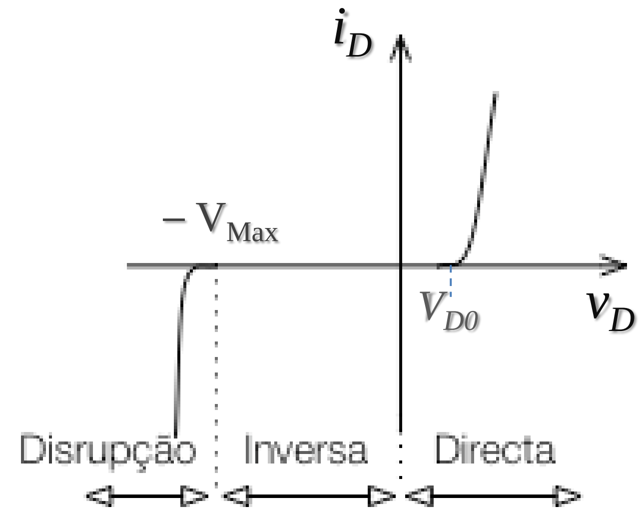
- Equação do díodo

I_S	corrente de saturação	$(\approx 10^{-15}\ A)$
n	coef. de emissão	$(1 < n < 2)$
V_T	tensão térmica	$(25mV\ @\ 20°C)$

$$i_D = I_S \cdot \left(e^{\frac{v_D}{nV_T}} - 1\right)$$

k	c[te] Boltzmann	$(1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K)$
T	Temperatura	$(T_{[K]} = T_{[°C]} + 273.15)$
q	carga electrão	$(1.609 \cdot 10^{-19}\ C)$

$$V_T = \frac{kT}{q}$$



... aproximações:

- Zona **directa**: $i_D \approx I_S \cdot e^{\frac{v_D}{nV_T}}$
- Zona **Inversa**: $i_D \approx -I_S$

Característica Corrente-Tensão

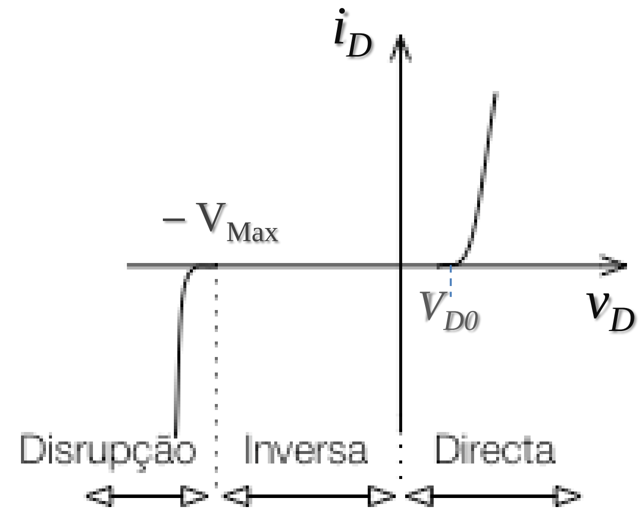
- Dependência com a temperatura:
  - I_S (duplica com cada variação de $+5°C$)
  - V_T ($25mV$ @ $20°C$)

$$i_D = I_S \cdot \left(e^{\frac{v_D}{nV_T}} - 1\right)$$

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

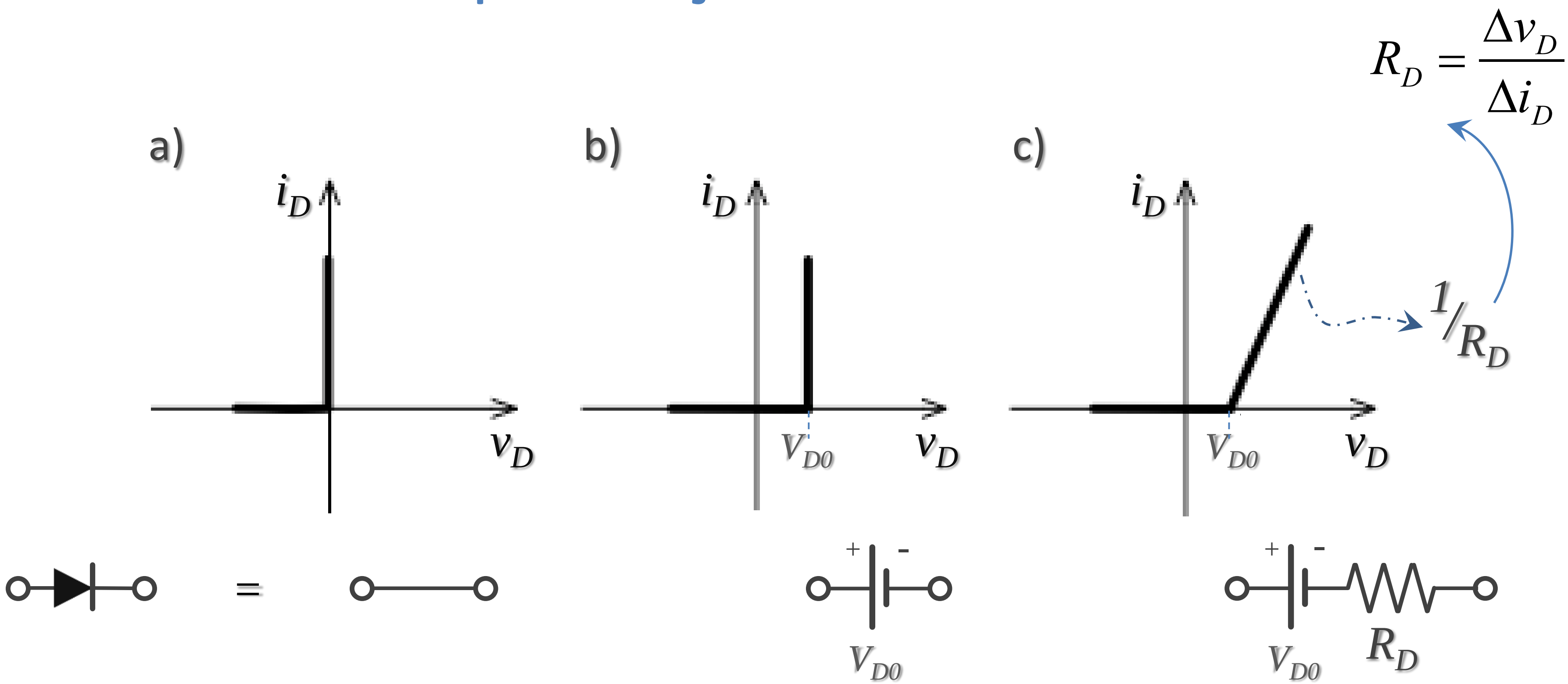
... para corrente constante:

v_D diminui $2mV$ por cada $\Delta T = +1°C$



- Análise de circuitos com díodos:
  - Característica $i_D(v_D)$ não-linear (pouco útil)
  - Utilizam-se <u>modelos lineares por troços</u>

Modelos lineares por troços



a) Ideal

ON: curto-circuito

OFF: circuito-aberto

b) Fonte tensão

ON: $v_D = V_{D0}$

OFF: $v_D < V_{D0}$

c) Fonte tensão + R

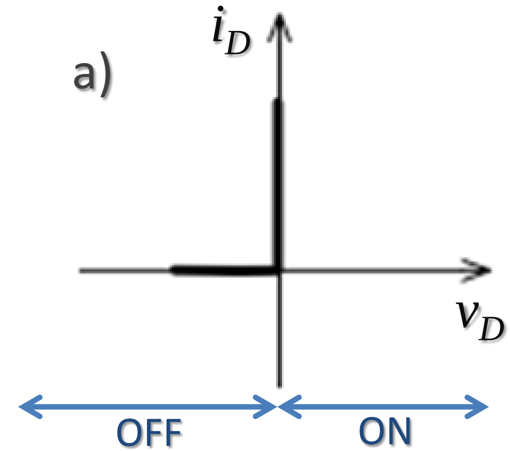
ON: $v_D = V_{D0} + R_D i_D$

OFF: $v_D < V_{D0}$

Modelo Ideal

- Modelo com <u>dois estados</u> possíveis

  ON / OFF

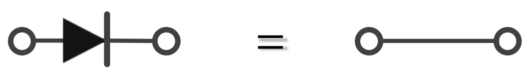


ON – Díodo em condução

Díodo substituído por **curto-circuito**

$v_D = 0$ (o valor da corrente é determinado pelo resto do circuito)

$i_D > 0$

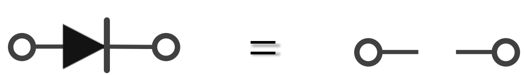


OFF – Díodo cortado

Díodo substituído por **circuito-aberto**

$i_D = 0$ (o valor da tensão é determinado pelo resto do circuito)

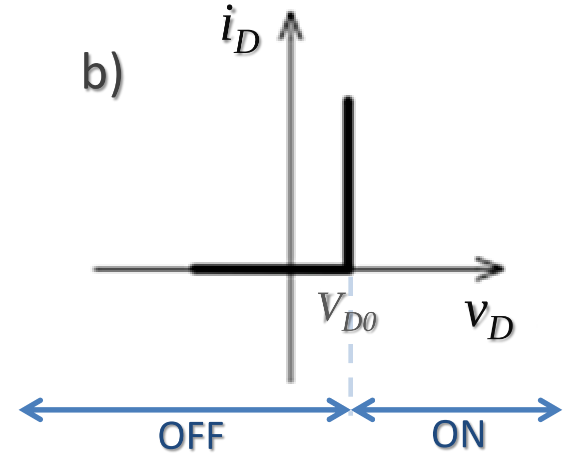
$v_D < 0$



Modelo Fonte de tensão

- Modelo com <u>dois estados</u> possíveis

  ON / OFF



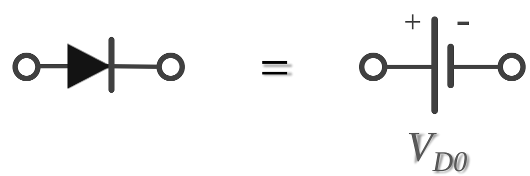
ON – Díodo em condução

Díodo substituído por **fonte de tensão V_{D0}**

$v_D = V_{D0}$

$i_D > 0$

(o valor da corrente é determinado pelo resto do circuito)



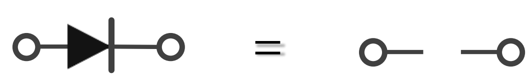
OFF – Díodo cortado

Díodo substituído por **circuito-aberto**

$i_D = 0$

$v_D < 0$

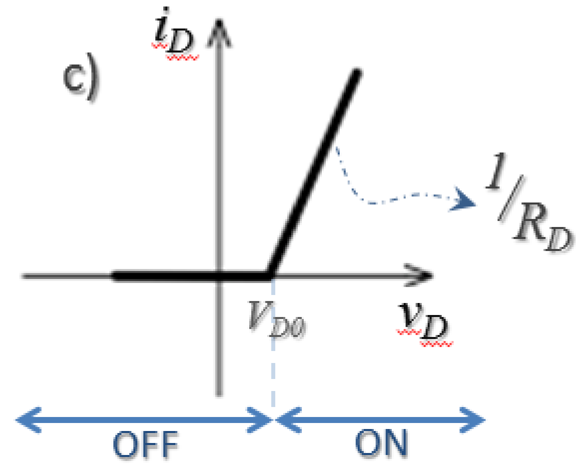
(o valor da tensão é determinado pelo resto do circuito)



Modelo Fonte de tensão + resistência

- Modelo com <u>dois estados</u> possíveis

  ON / OFF

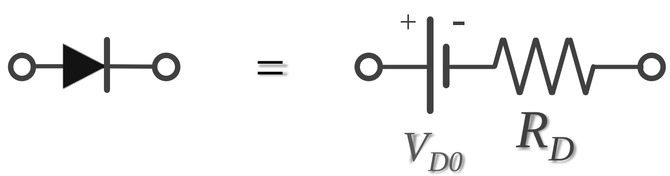


ON – Díodo em condução

Díodo substituído por **fonte de tensão V_{D0} em série com R_D**

$v_D = V_{D0} + R_D i_D$ (o valor da corrente é determinado pelo resto do circuito)

$i_D > 0$

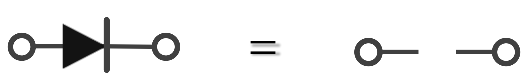


OFF – Díodo cortado

Díodo substituído por **circuito-aberto**

$i_D = 0$ (o valor da tensão é determinado pelo resto do circuito)

$v_D < 0$



$$R_D = \frac{\Delta v_D}{\Delta i_D} \neq \frac{v_D}{i_D}$$

Estratégia de análise

- Calcular I e V usando o modelo de díodo IDEAL:

  - Considerar uma <u>hipótese</u> de díodo **ON** ou **OFF**
  - Fazer a análise do circuito nessas condições
  - <u>Validar a hipótese</u> feita

Hipótese: ON

Validação: Confirma se $i_D > 0$

Hipótese: OFF

Validação: Confirma se $v_D < 0$

Método de análise:
1° – Hipótese
2° – Validação da hipótese

Díodo de Zener

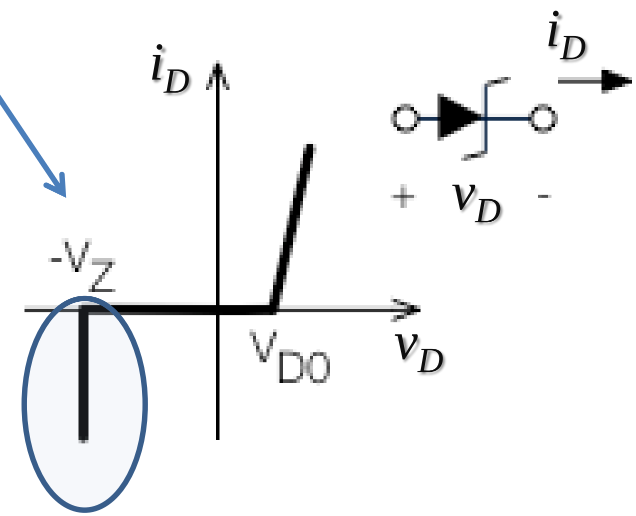
- Especialmente concebido para funcionar na zona de disrupção

  Nessa zona a característica é (praticamente) vertical

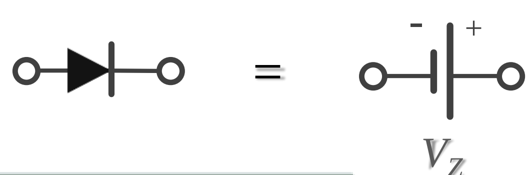
  A tensão é aproximadamente constante e não depende:

  - do valor da corrente
  - da variação na tensão de alimentação

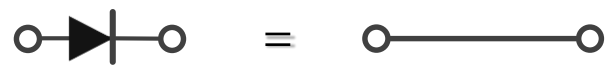
- A aplicação principal é como regulador de tensão



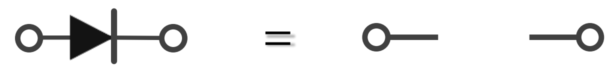
$i_D < 0$
$v_D = -V_Z$



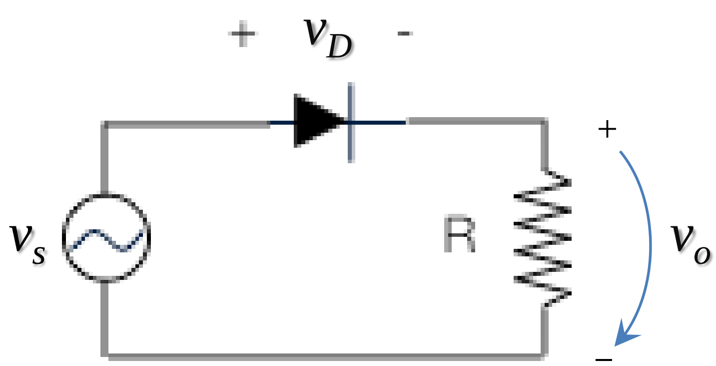
Rectificador de meia onda

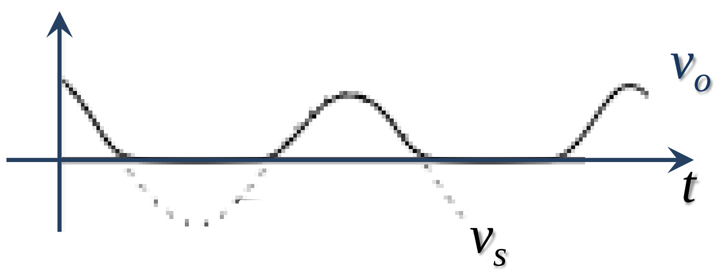
- Díodo **ON**: curto-circuito 

  $v_o = v_s$

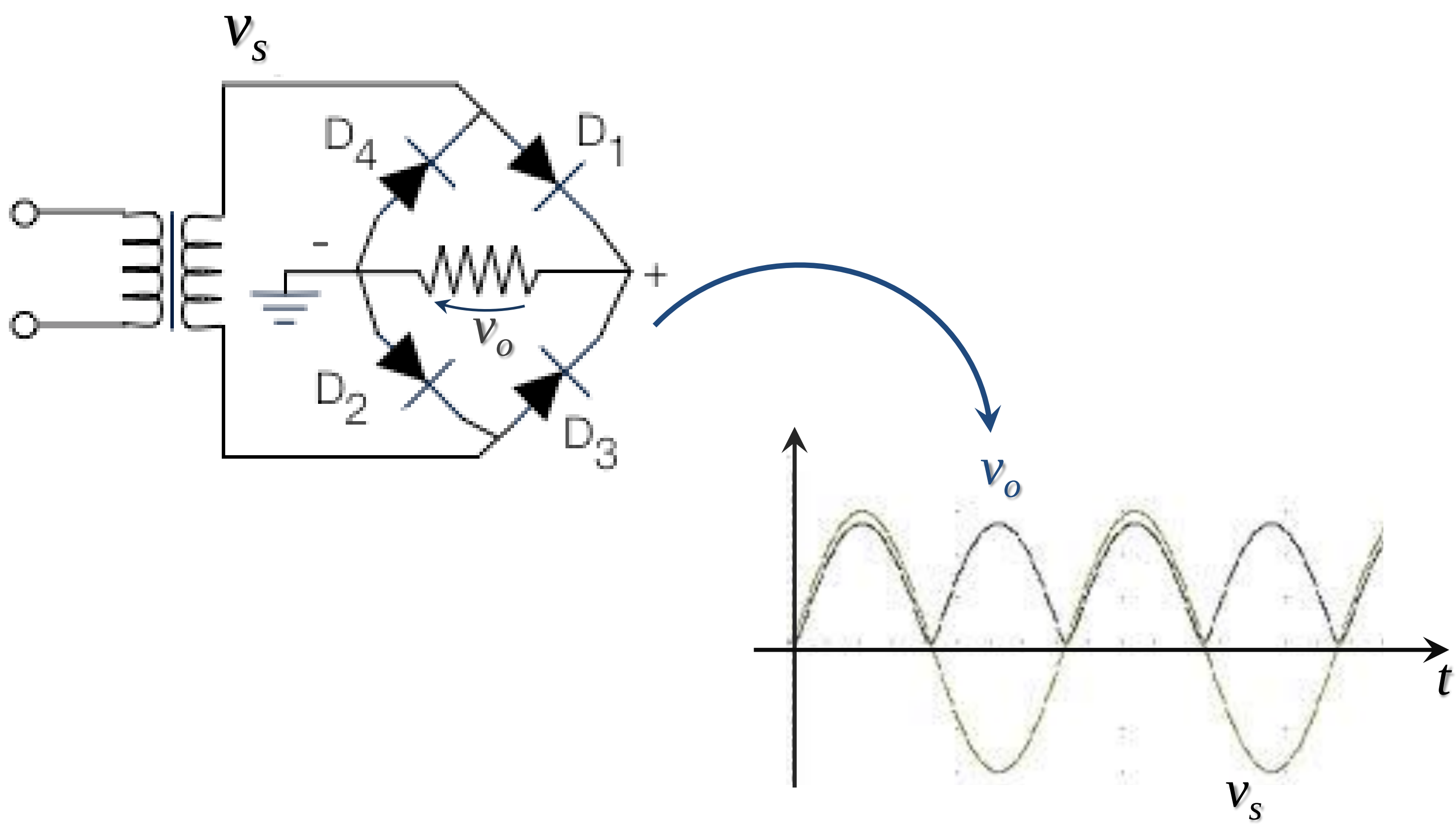
- Díodo **OFF**: circuito-aberto 

  $i_D = 0$
  $v_D = 0$



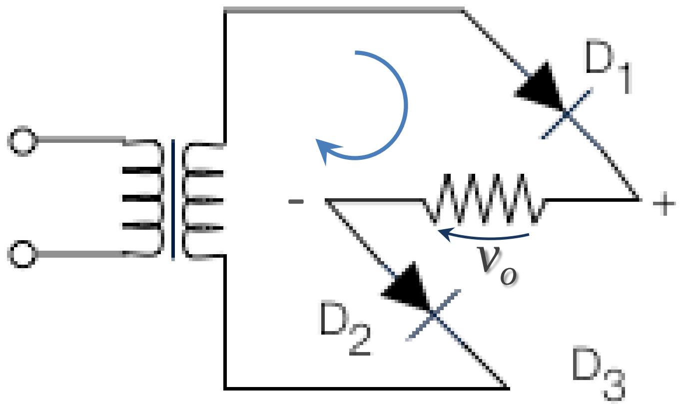


Rectificador de onda completa

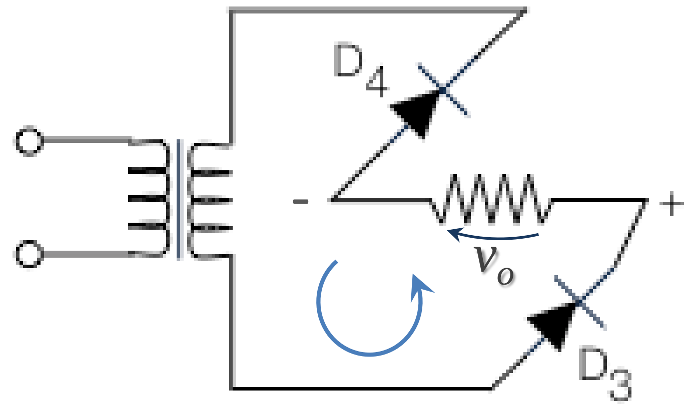


Rectificador de onda completa

$v_s > 0$



$v_s < 0$



KVL: $V_{D1} + v_0 + V_{D2} - v_S = 0$

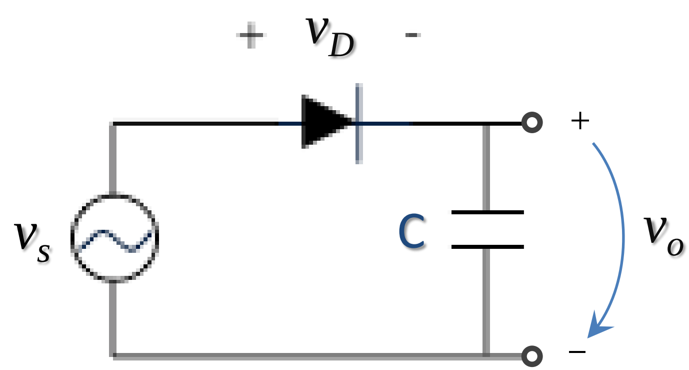
KVL: $V_{D3} + v_0 + V_{D4} + v_S = 0$

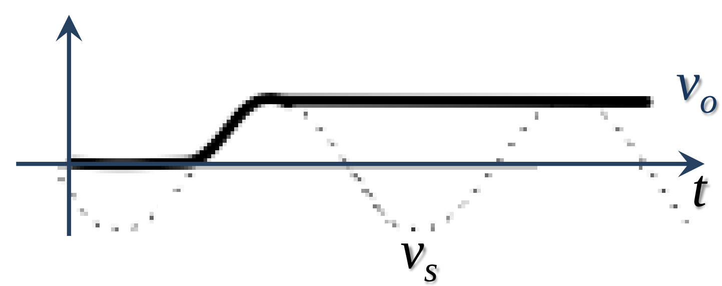
- Considerando o modelo com fonte de tensão:

$$v_0 = | v_S | - 2V_{D0}$$

Detector de pico (rectificador com condensador)

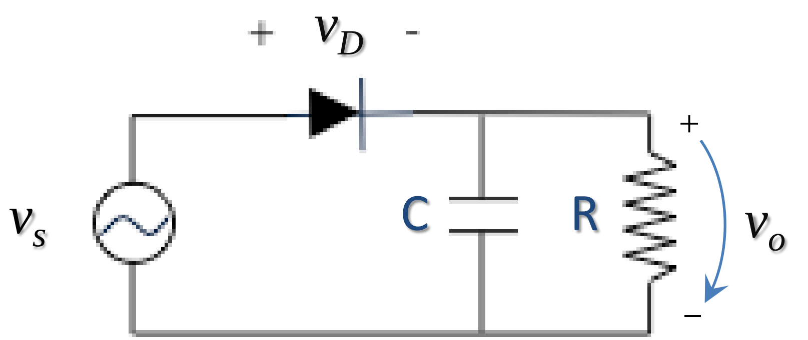
- Quando o díodo está **ON** carrega o condensador **C**
- Quando o díodo corta, o condensador mantém a carga (idealmente) e portanto v_o é constante (mantém o valor)
- Na prática existe sempre uma carga que irá descarregar o condensador (corrente de fuga)

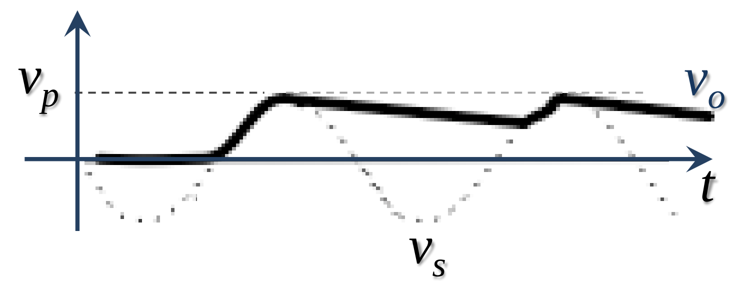




Detector de pico

- Díodo em condução: C carrega e $v_o \approx v_s$
- Díodo corta: C descarrega através de R
- O valor de C é escolhido em função da ondulação desejada:
  - C muito alto -> a carga é lenta (pode não acompanhar v_s)
  - C muito baixo -> descarga rápida (muita ondulação)

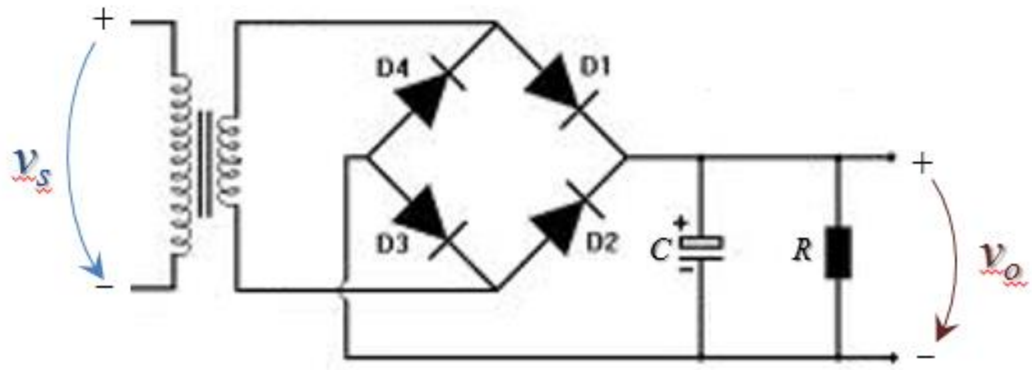


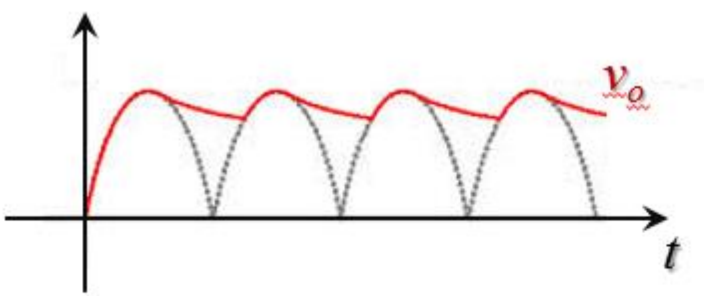


$$v_o(t) = V_P e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

Conversor AC / DC





$$v_o(t) = V_P e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$

Estímulo sinusoidal

V_m – amplitude

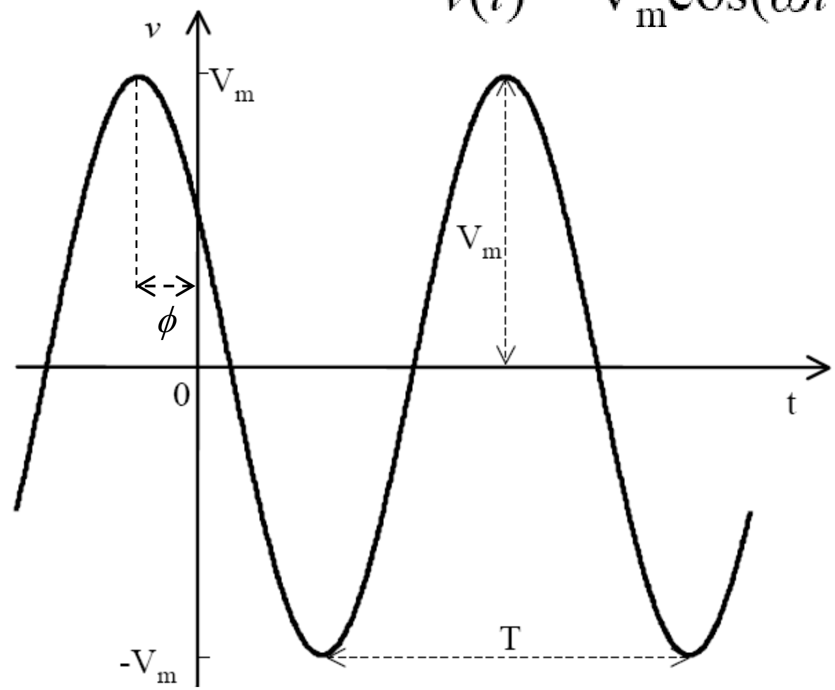
ω – frequência angular [rad/s]

t – tempo [s]

ϕ – desfasagem [rad]

f – frequência [Hz]

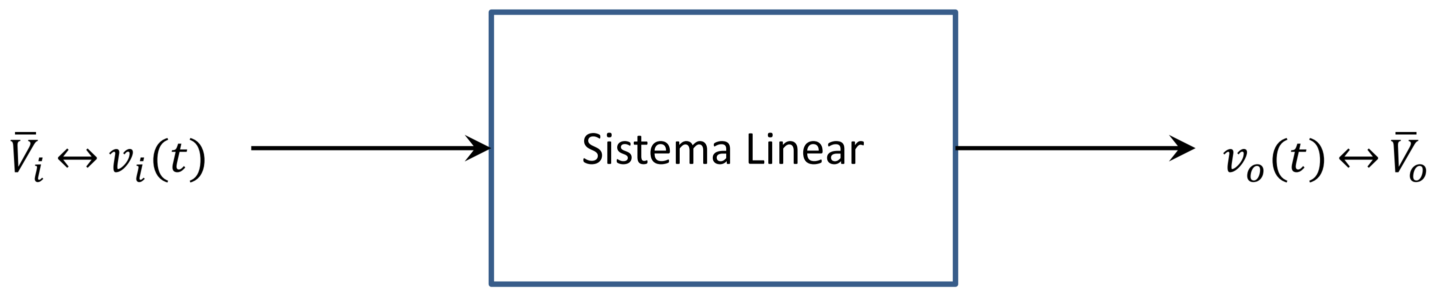
$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$



$$\bar{V} = V_m \angle \phi = V_m e^{j\phi} \xrightarrow{\text{Dom. Tempo}} v(t) = Re\left\{V_m e^{j\omega t + \phi}\right\}$$

Resposta em frequência

- Consideremos como sistema linear (SLIT) um circuito composto apenas por:
  - Resistências
  - Bobines
  - Condensadores

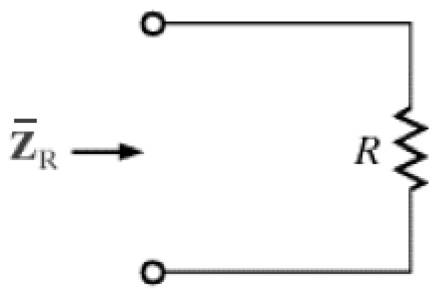


- Comecemos por estudar o comportamento (ou resposta) em frequência dos componentes reactivos: o condensador e a bobine

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Resposta em frequência (resistência)

$\bar{Z}_R$: não depende da frequência



$$\bar{Z}_R = R = R\angle 0°$$

Diagrama de amplitude

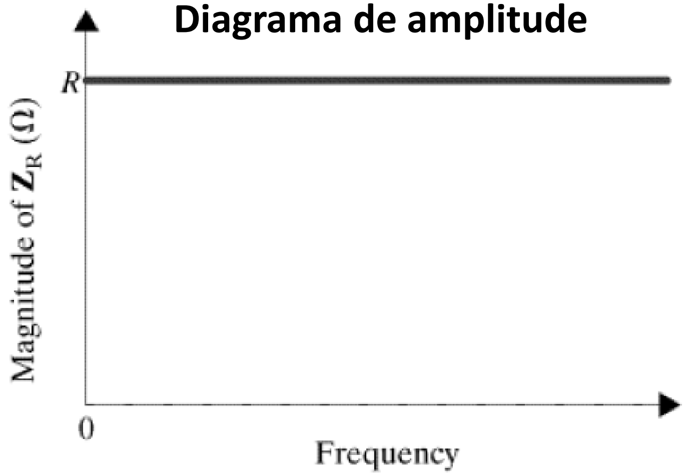
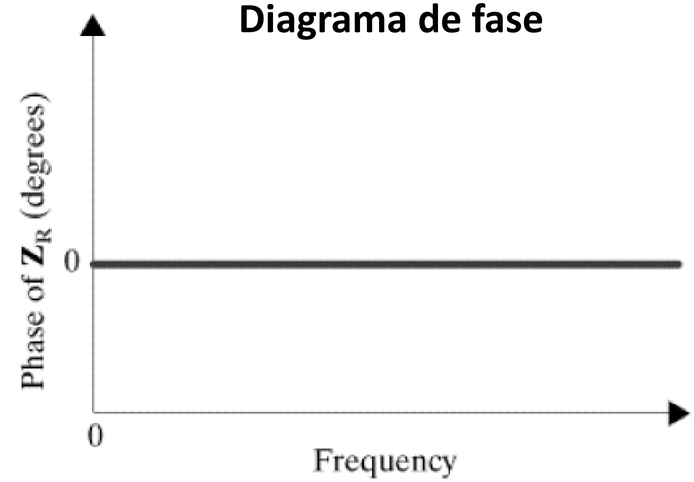
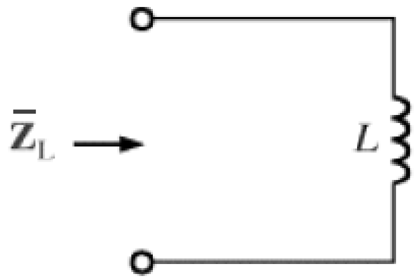


Diagrama de fase



Resposta em frequência (bobine)

$|\bar{Z}_L|$: é proporcional à frequência



$$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L\angle 90°$$

Diagrama de amplitude

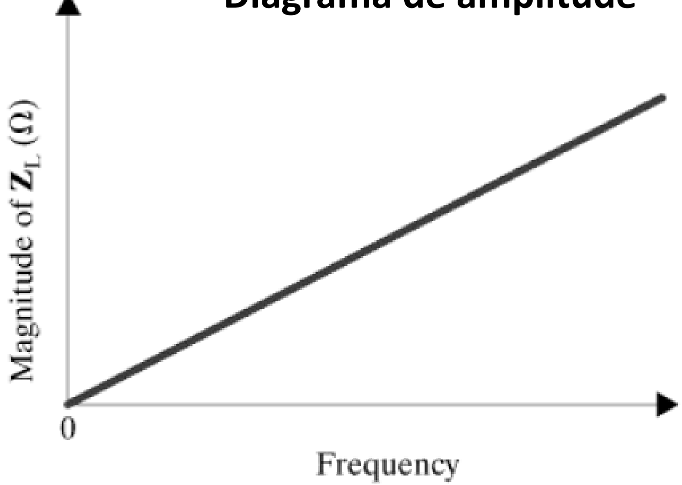
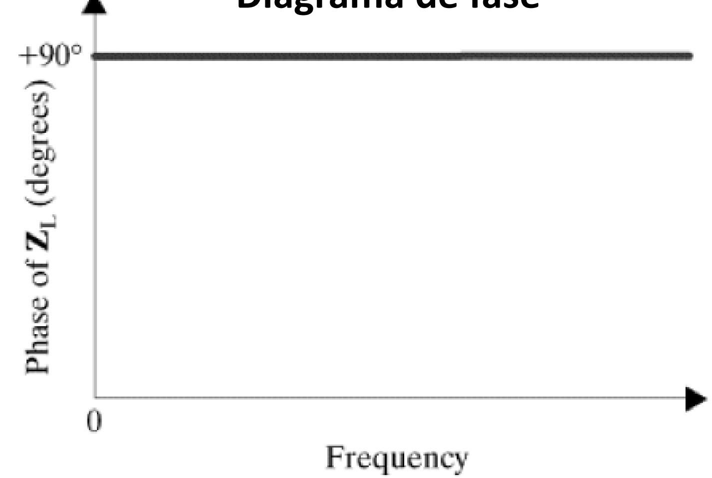
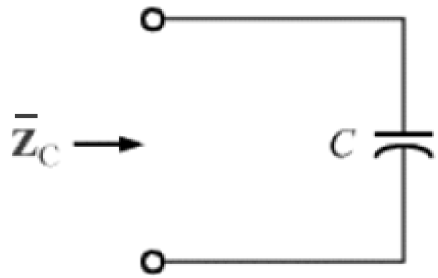


Diagrama de fase



Resposta em frequência (condensador)

$|\bar{Z}_C|$: é inversamente proporcional à frequência



$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90°$$

Diagrama de amplitude

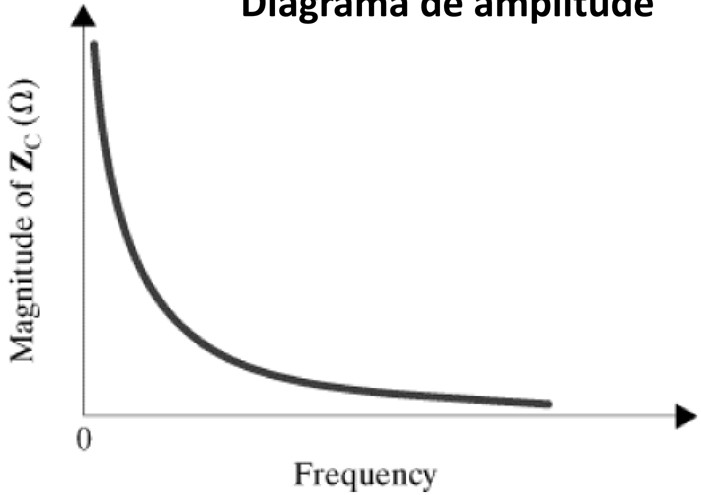
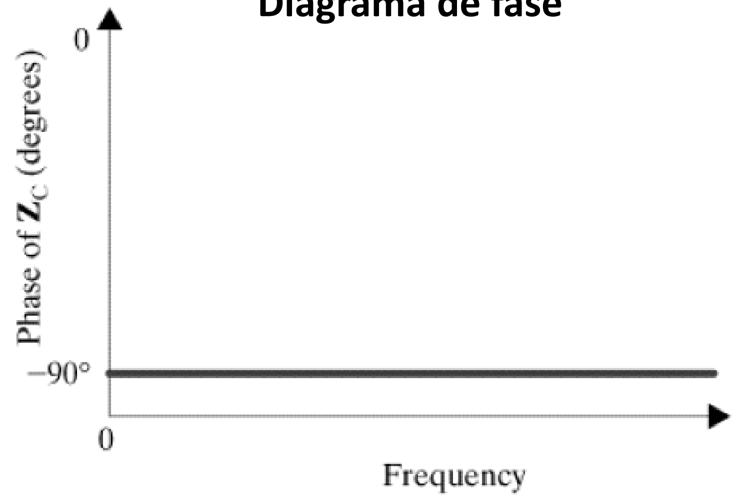


Diagrama de fase



Transformada de Laplace

- Na análise de circuitos pode ser vantajoso utilizar a **frequência complexa** s , válida no domínio da **transformada de Laplace**

$$s = \sigma + j\omega$$

- No caso particular do regime forçado sinusoidal a frequência complexa s é simplesmente dada por:

$$s = j\omega$$

Impedância complexa

- A <u>impedância complexa</u> dos componentes lineares estudados no domínio da **transformada de Laplace** é dada pelas seguintes equações:

Dispositivo	Transformada Laplace	Notação complexa	Impedância ($\bar{Z}$)	
			Laplace	complexa
Resistência	$V(s) = RI(s)$	$\bar{V} = \bar{Z}_R \cdot \bar{I}$	$Z_R = R$	$\bar{Z}_R = R$
Condensador	$V_C(s) = \frac{1}{sC} \cdot I_C(s)$	$\bar{V}_C = \bar{Z}_C \cdot \bar{I}_C$	$Z_C = \frac{1}{sC}$	$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$
Bobina	$V_L(s) = sL \cdot I_L(s)$	$\bar{V}_L = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}_L$	$Z_L = sL$	$\bar{Z}_L = j\omega L$

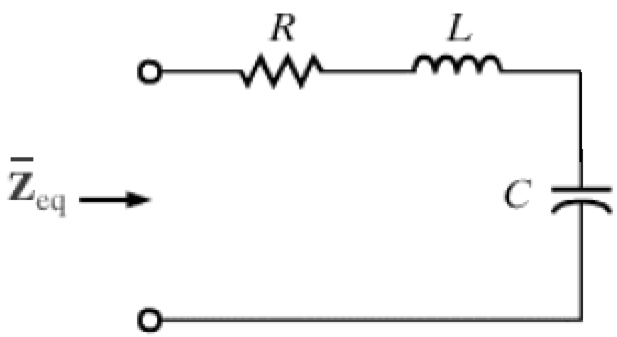
Impedância equivalente em <u>notação complexa</u> e no domínio da <u>trans. Laplace</u>

Regime forçado sinusoidal:

$$s = j\omega$$

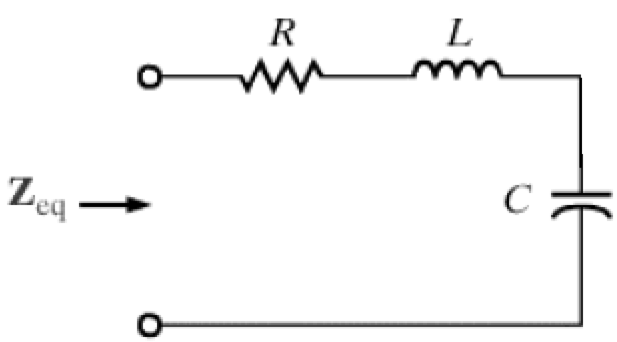
Impedância de uma carga RLC

- A impedância equivalente em notação complexa é dada por:



$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= \frac{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}{j\omega C} \times \frac{-j}{-j}$$
$$= \frac{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}{\omega C}$$

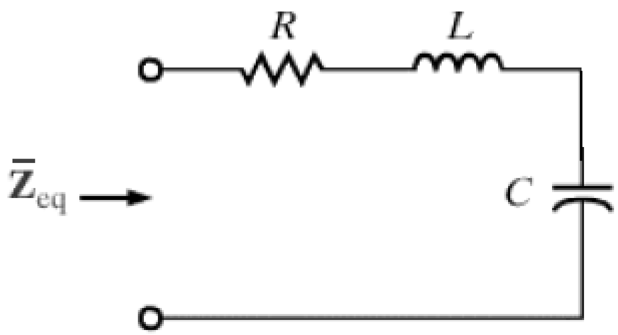
- Impedância equivalente no domínio da transformada de Laplace:



$$Z_{eq}(s) = \frac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$$

Exemplo de impedância equivalente em notação complexa e trans. Laplace

Impedância de uma carga RLC



Not. Complexa $\bar{Z}_{eq} = \dfrac{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}{\omega C}$

T. Laplace $Z_{eq}(s) = \dfrac{s^2 LC + sRC + 1}{sC}$

$$|\bar{Z}_{eq}| = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2}}{\omega C}$$

$$\angle \bar{Z}_{eq} = \tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

Diagrama de amplitude

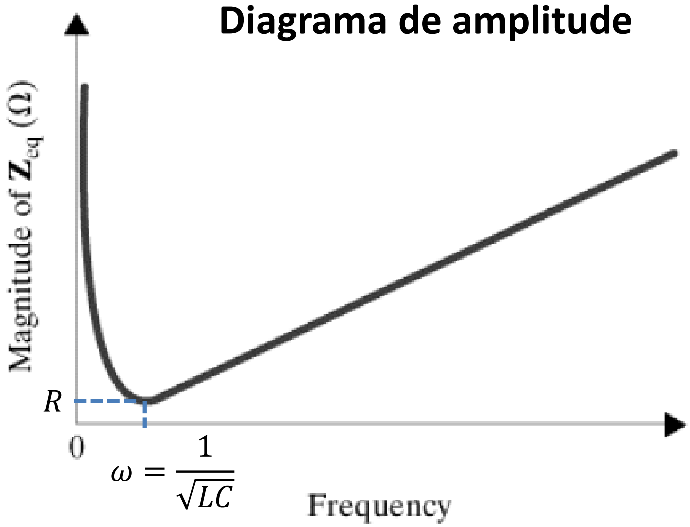
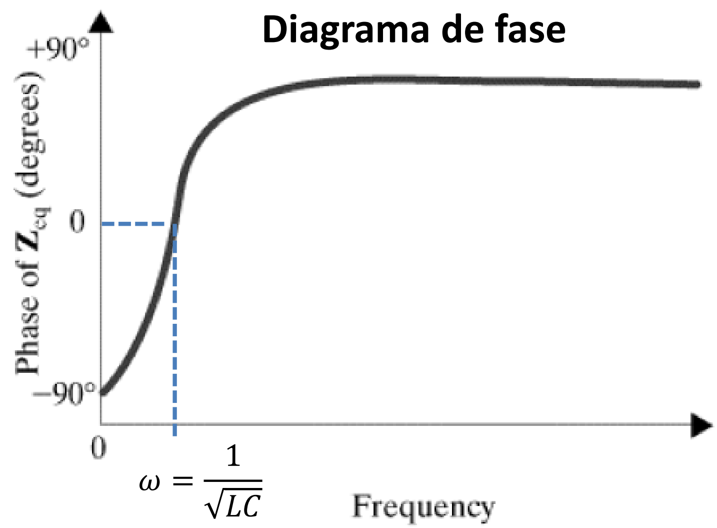


Diagrama de fase



Exemplo de impedância equivalente em notação complexa e trans. Laplace

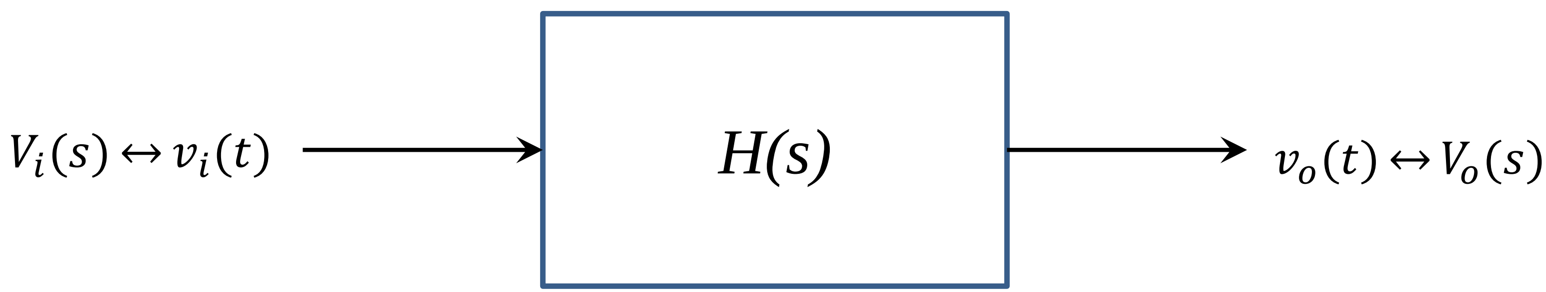
Funções de rede

- A função de rede *H(s)* é o quociente entre duas grandezas eléctricas, é dada por:

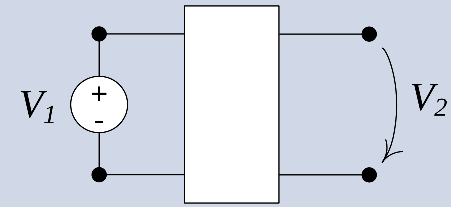
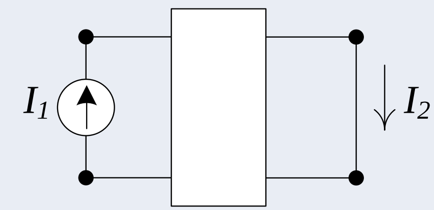
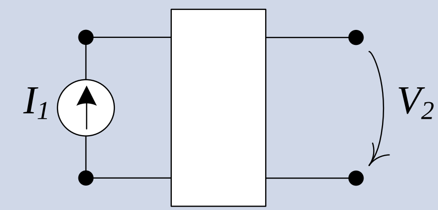
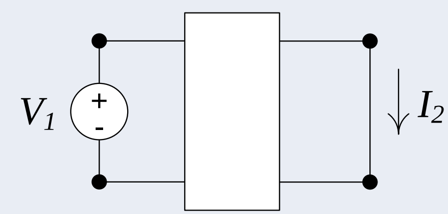
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

$V_i(s)$ é a grandeza de excitação

$V_o(s)$ é a grandeza de resposta

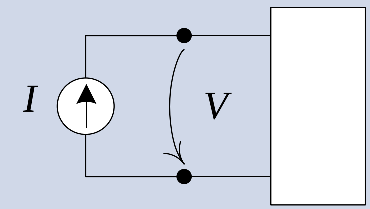
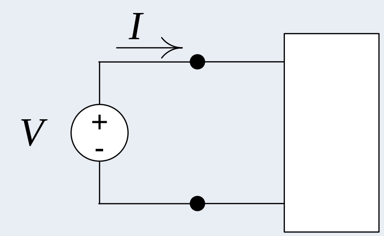


Funções de rede

Função de rede	*H(s)*	Diagrama
Ganho de tensão	$G_v(s) = \dfrac{V_2(s)}{V_1(s)}$	
Ganho de corrente	$G_i(s) = \dfrac{I_2(s)}{I_1(s)}$	
Transimpedância	$Z_T(s) = \dfrac{V_2(s)}{I_1(s)}$	
Transadmitância	$Y_T(s) = \dfrac{I_2(s)}{V_1(s)}$	

Dependendo de a entrada e a saída
do sistema linear serem
em corrente ou em tensão

Funções de rede (um porto)

Função de rede	***H(s)***	**Diagrama**
Impedância	$Z(s)=\dfrac{V(s)}{I(s)}$	
Admitância	$Y(s)=\dfrac{I(s)}{V(s)}$	

Dependendo de a entrada e a saída
do sistema linear serem
em corrente ou em tensão

Função de transferência *H(s)*

➢ Pode mostrar-se que as funções de rede *H(s)* são funções racionais de s com coeficientes reais de polinómios em s :

- os zeros de ***H(s)*** são as raízes de ***N(s)*** $\qquad N(s) \rightarrow N(z_i) = 0$
- os pólos de ***H(s)*** são as raízes de ***D(s)*** $\qquad D(s) \rightarrow D(p_i) = 0$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots b_1 s + b_0}$$

$$H(s = z_i) = 0$$

$$H(s = p_i) = \infty$$

Função de transferência *H(s)*

- os coeficientes a_i e b_i são reais
  - os pólos p_i e os zeros z_i são reais ou complexos conjugados
  - A ordem da função de rede é igual à ordem do denominador ***D(s)*** ou seja, ao número de pólos

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{k_0(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$$=\underbrace{\frac{k_0 z_1 z_2\ldots z_m}{p_1 p_2\ldots p_n}}_{K_0}\frac{(s/z_1-1)(s/z_2-1)\ldots(s/z_m-1)}{(s/p_1-1)(s/p_2-1)\ldots(s/p_n-1)}$$

Forma factorizada normalizada

$$H(s=z_i)=0$$

$$H(s=p_i)=\infty$$

Diagrama de Bode

- Em regime forçado sinusoidal $s = j\omega$ pelo que $H(s)$ é dada por:

$$H(j\omega) = Mag(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)} = Mag(\omega) \angle \phi(\omega)$$

$Mag(\omega)$: diagrama de amplitude da função de transferência

$$Mag(\omega) = |H(j\omega)|$$

$\phi(\omega)$: diagrama de fase da função de transferência

$$\phi(\omega) = \arg(H(j\omega))$$

- A representação gráfica dos diagramas de amplitude e de fase em função de ω em escala logarítmica, designa-se diagrama de Bode

Diagrama de Bode

- Geralmente é mais fácil construir os diagramas a partir da forma factorizada normalizada

$$Mag(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{|K_0| \cdot |j\omega/z_1 - 1| \cdot |j\omega/z_2 - 1| \ldots |j\omega/z_m - 1|}{|j\omega/p_1 - 1| \cdot |j\omega/p_2 - 1| \ldots |j\omega/p_n - 1|}$$

$$\begin{aligned}\phi(\omega) &= \arg(H(j\omega)) \\ &= \arg(K_0) + \arg(j\omega/z_1 - 1) + \arg(j\omega/z_2 - 1) + \ldots + \arg(j\omega/z_m - 1) \\ &\quad - \arg(j\omega/p_1 - 1) - \arg(j\omega/p_2 - 1) - \ldots - \arg(j\omega/p_n - 1)\end{aligned}$$

Decibel (dB)

- Usa-se para representar a relação entre duas grandezas eléctricas:
  - ganho de potência

$$\left(\frac{P_o}{P_i}\right)_{dB} = 10.\log_{10}\left(\frac{P_o}{P_i}\right)$$

$P \propto V^2$:

$$\left(\frac{P_o}{P_i}\right)_{dB} = 10.\log_{10}\left(\frac{V_o^{\,2}}{V_i^{\,2}}\right) = 20.\log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$$

$P \propto I^2$:

$$\left(\frac{P_o}{P_i}\right)_{dB} = 10.\log_{10}\left(\frac{I_o^{\,2}}{I_i^{\,2}}\right) = 20.\log_{10}\left(\frac{I_o}{I_i}\right)$$

  - ganho de tensão ganho de corrente

$$\left(\frac{V_o}{V_i}\right)_{dB} = 20.\log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{I_o}{I_i}\right)_{dB} = 20.\log_{10}\left(\frac{I_o}{I_i}\right)$$

$$P \propto V^2$$

$$P \propto I^2$$

Decibel (dB)

- A utilização de dB para representar os diagramas de amplitude em **diagramas de Bode** permite converter:

$$\text{produtos} \xrightarrow[\log]{} \text{somas}$$

$$\text{divisões} \xrightarrow[\log]{} \text{subtrações}$$

$$G_{dB} = 20 \cdot \log_{10} G$$

$$Mag(\omega)_{dB} = |K_0|_{dB} + |j\omega/z_1 - 1|_{dB} + |j\omega/z_2 - 1|_{dB} + \ldots + |j\omega/z_m - 1|_{dB}$$
$$- |j\omega/p_1 - 1|_{dB} - |j\omega/p_2 - 1|_{dB} - \ldots - |j\omega/p_n - 1|_{dB}$$

- Valores notáveis:

G	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$1/2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	10^2	10^3
G_{dB}	-60 dB	-40 dB	-20 dB	≈-6 dB	≈-3 dB	0 dB	≈3 dB	≈6 dB	20 dB	40 dB	60 dB

$$G = \frac{V_2}{V_1}$$

Diagrama de Bode

- Seja a função de rede (ou de transferência) $H(\omega)$:

$$\bar{H} = |H|\angle\theta = |H|e^{j\theta}$$

aplicando o logaritmo natural a ambos os lados resulta

$$\ln \bar{H} = \ln|H| + \ln e^{j\theta} = \ln|H| + j\theta$$

fase

módulo

- Os diagramas de Bode são gráficos semi-logarítmicos da amplitude (em decibel) e da fase (em graus) em função da frequência angular ω

$$|\bar{H}|_{dB} = 20\, log_{10}|\bar{H}| \qquad \theta = \arg(\bar{H})$$

Diagrama de Bode

- a função de rede (ou de transferência) $H(\omega)$ é:

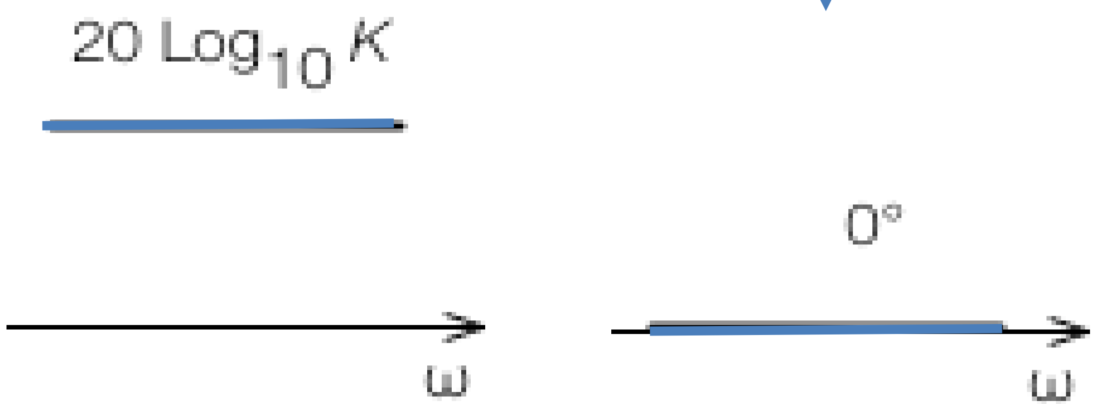
$$H(\omega)=\frac{K\cdot(j\omega)^{\pm 1}\cdot\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)\cdot\left[1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_z}+\left(\frac{j\omega}{\omega_z}\right)^2\right]}{\left(1+\frac{j\omega}{p_1}\right)\cdot\left[1+j2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_p}+\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2\right]}$$

… nesta representação podem existir até 7 factores diferentes:

- ganho K
- pólo $(j\omega)^{-1}$ <u>ou</u> zero $(j\omega)$ na origem, (i.e. para $\omega=0$)
- pólo simples $(1+j\omega/p)$ <u>ou</u> um zero simples, $(1+j\omega/z)$
- pólo quadrático <u>ou</u> um zero quadrático

Diagrama de Bode

- diagrama de amplitude e diagrama de fase para o ganho K:



... se o valor do ganho K for negativo a amplitude mantem-se mas a fase passa a valer 180°

Diagrama de Bode

- Diagrama assimptótico (de amplitude e fase) para **zeros e pólos na origem** (de ordem N):

$$(j\omega)^N$$

$$\frac{1}{(j\omega)^N}$$

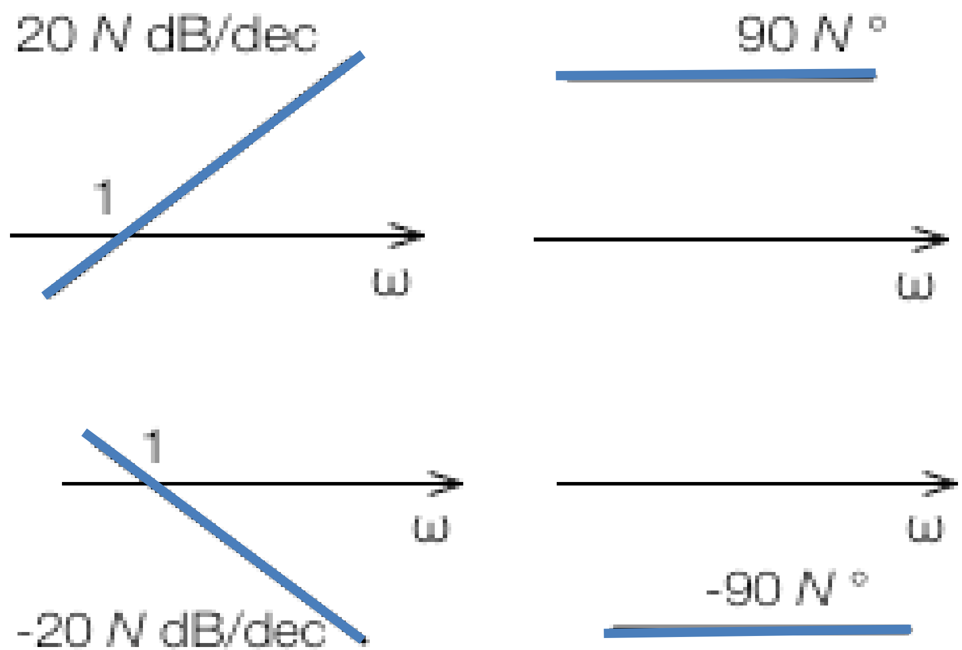
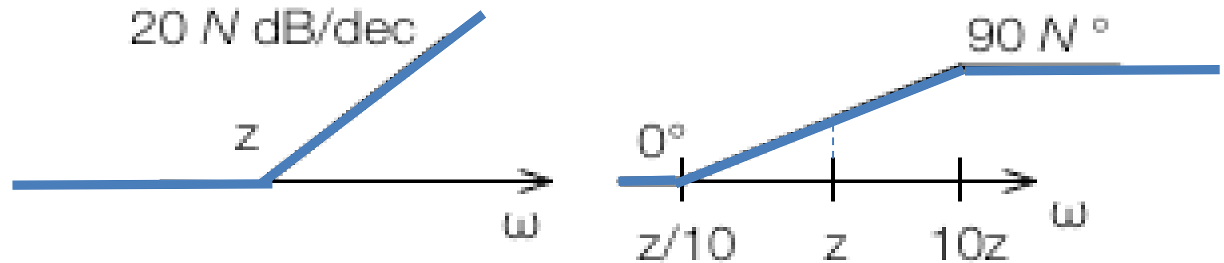


Diagrama de Bode

- Diagrama assimptótico (de amplitude e fase) para **zeros e pólos simples** (de ordem N):

$$\left(1+\frac{j\omega}{z}\right)^{N}$$



$$\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{p}\right)^{N}}$$

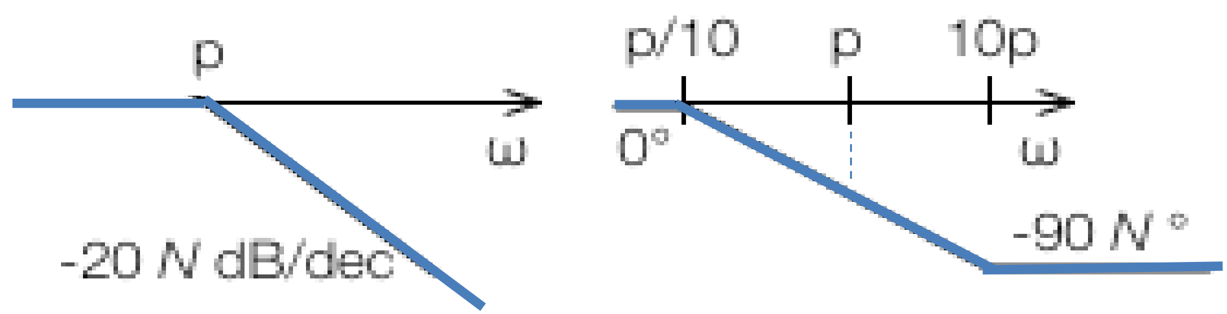
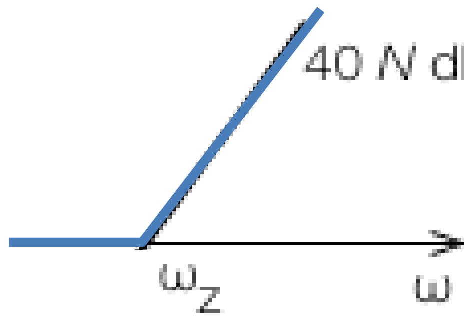
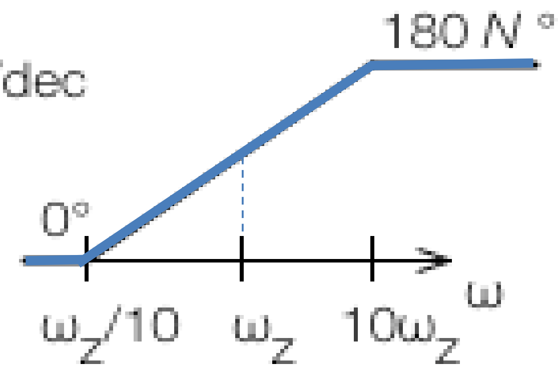


Diagrama de Bode

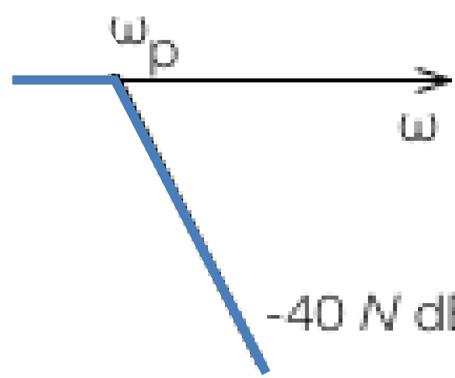
- Diagrama assimptótico (de amplitude e fase) para **zeros e pólos quadráticos** (de ordem N):

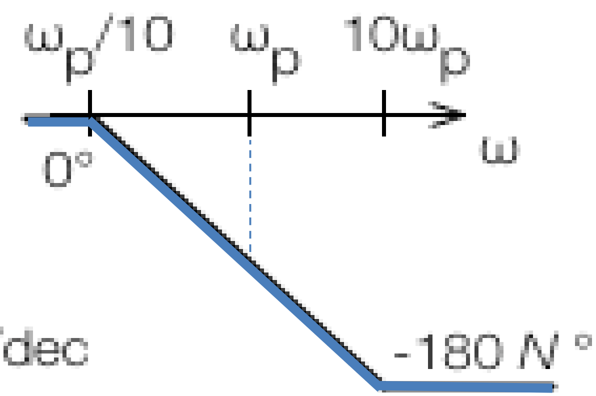
$$\left[1+j2\zeta_1\frac{\omega}{\omega_z}+\left(\frac{j\omega}{\omega_z}\right)^2\right]^N$$





$$\frac{1}{\left[1+j2\zeta_2\frac{\omega}{\omega_p}+\left(\frac{j\omega}{\omega_p}\right)^2\right]^N}$$





Par de zeros conjugados
Par de pólos conjugados
(ordem N)

Diagrama de amplitude

- representa a <u>amplitude</u> da função de transferência ***H(s)*** em decibel (dB) em função da frequência (escala logarítmica):

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

- o desenho aproximado do diagrama de Bode de amplitude é feito a partir do <u>módulo</u> dos pólos e zeros da função de transferência;
- o efeito dos zeros/pólos é sentido no declive da recta a traçar:

$\Rightarrow$ N zeros com módulo $|\text{zero}_k| = \mathcal{M}$ adicionam à recta do diagrama de amplitude $+20 \cdot N$ dB por cada década, a partir do ponto $\omega = \mathcal{M}$.

$\Rightarrow$ N polos com módulo $|\text{polo}_k| = \mathcal{M}$ adicionam à recta do diagrama de amplitude $-20 \cdot N$ dB por cada década, a partir do ponto $\omega = \mathcal{M}$.

Diagrama de fase

- representa a fase da função de transferência ***H(s)*** em graus em função da frequência (escala logarítmica)

$$\text{Fase}(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Imag}\{H(j\omega)\}|}{\mathrm{Real}\{H(j\omega)\}|}\right) + \begin{cases} 0 & \text{, se } \mathrm{Real}\{H(j\omega)\} \geq 0 \\ \pi & \text{, se } \mathrm{Real}\{H(j\omega)\} < 0 \end{cases}$$

- o desenho aproximado do diagrama de fase é feito a partir do valor da fase dos pólos e zeros da função de transferência;

- o efeito de cada zero e pólo é sentido apenas durante duas décadas, começando uma década antes e terminando uma década depois:

  $\Rightarrow$ N zeros com módulo $|\text{zero}_k| = \mathcal{M}$ e parte real negativa (localizados no semi-plano complexo esquerdo) adicionam à fase $+90 \times N$ graus ($+\pi/2 \times N$ radianos).

  $\Rightarrow$ N polos com módulo $|\text{polo}_k| = \mathcal{M}$ e parte real negativa (localizados no semi-plano complexo esquerdo) adicionam à fase $-90 \times N$ graus ($-\pi/2 \times N$ radianos).

- Começa-se a desenhar o diagrama a partir de $\omega = 0$ com:

  $\Rightarrow$ 0 graus se a função $H(s)$ tiver sinal positivo.

  $\Rightarrow$ 180 graus se a função $H(s)$ tiver sinal negativo.

Diagrama de Argand

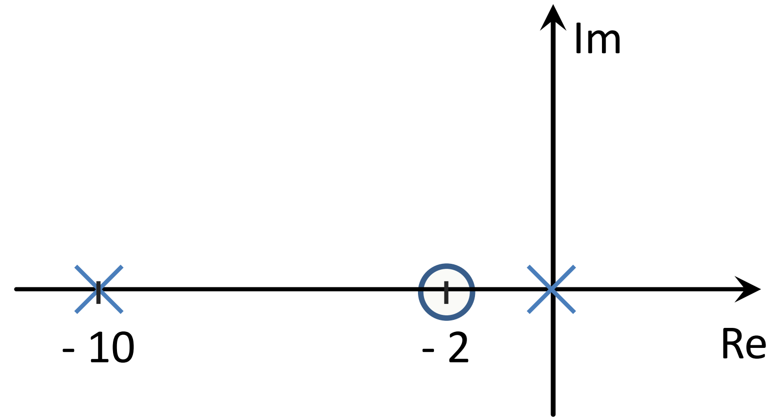
$$H(s) = \frac{4\,(s+2)}{s \cdot (s+10)}$$

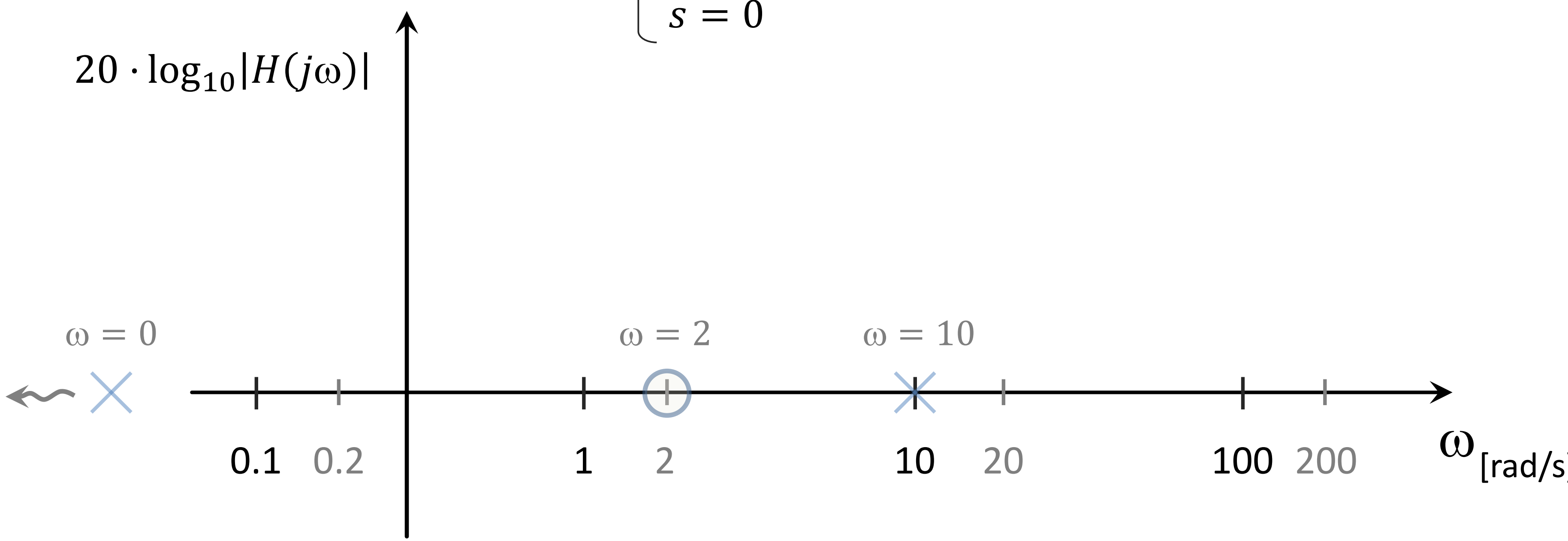
Zeros:

$$s = -2$$

Pólos:

$$\begin{cases} s = -10 \\ s = 0 \end{cases}$$





Exemplo:
Um zero e dois pólos
(um dos pólos na origem)

Filtros

- O caso mais comum das funções de rede são os filtros

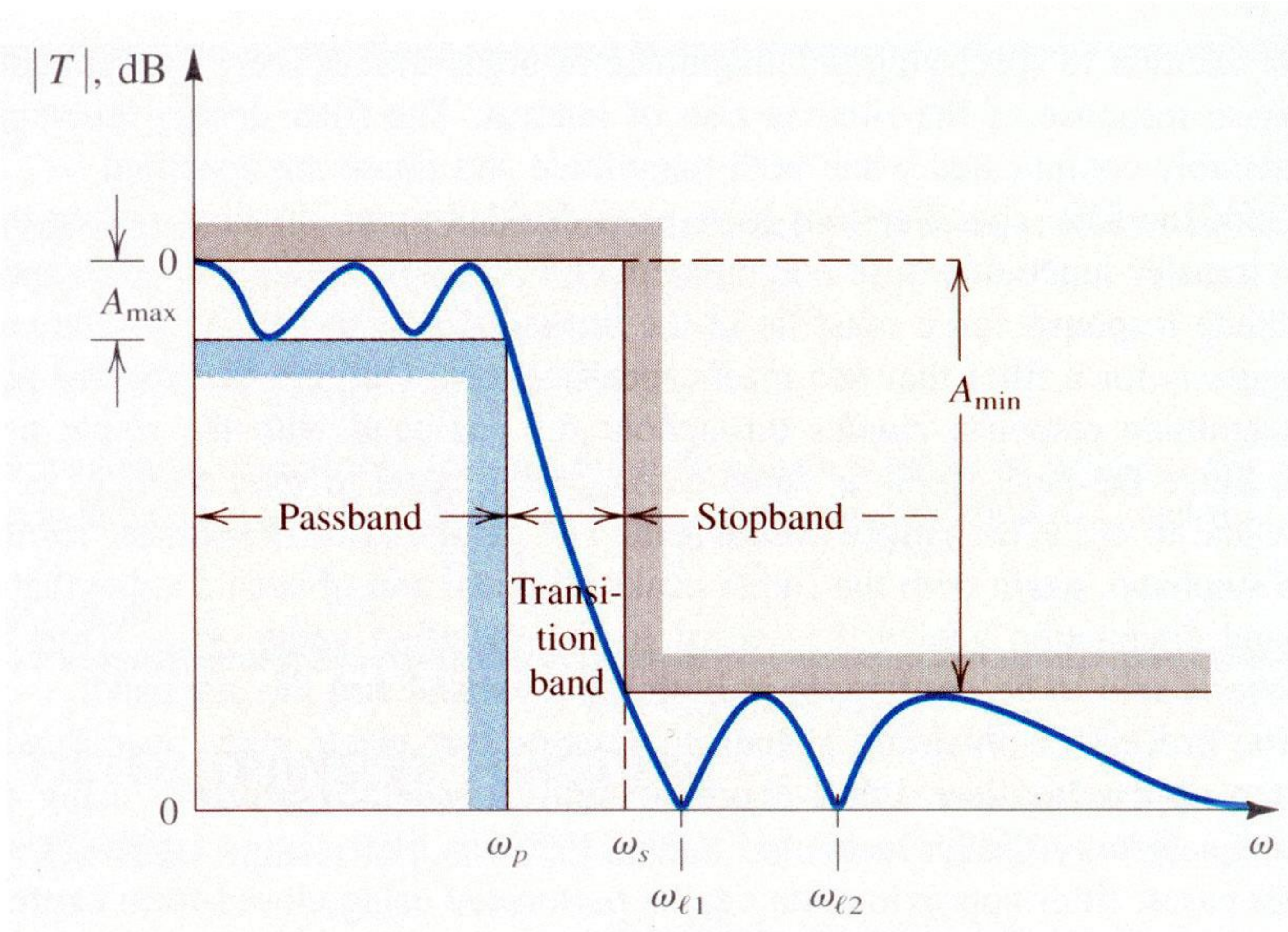
$$v_i(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow v_o(t)$$

- **H(s)** representa a resposta em frequência do sistema (em amplitude e fase)

$$H(s) = K\,\frac{(s+z_1)\cdot(s+z_2)\cdots(s+z_M)}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)\cdots(s+p_M)}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

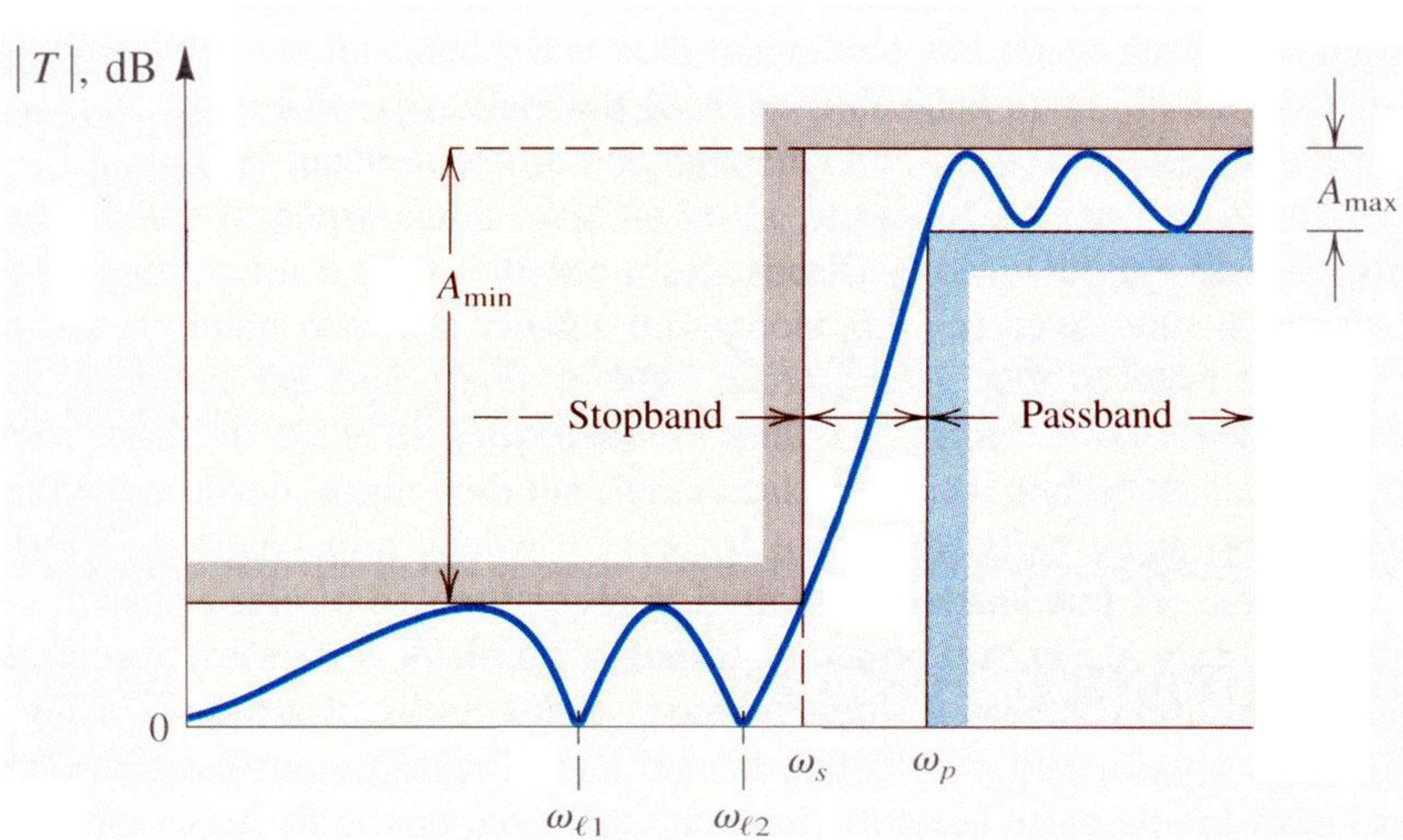
Filtros



Filtro passa-baixo
Classificação de filtros

Filtro passa-baixo
Bandas de passagem, banda de corte e banda de transição. Ondulação

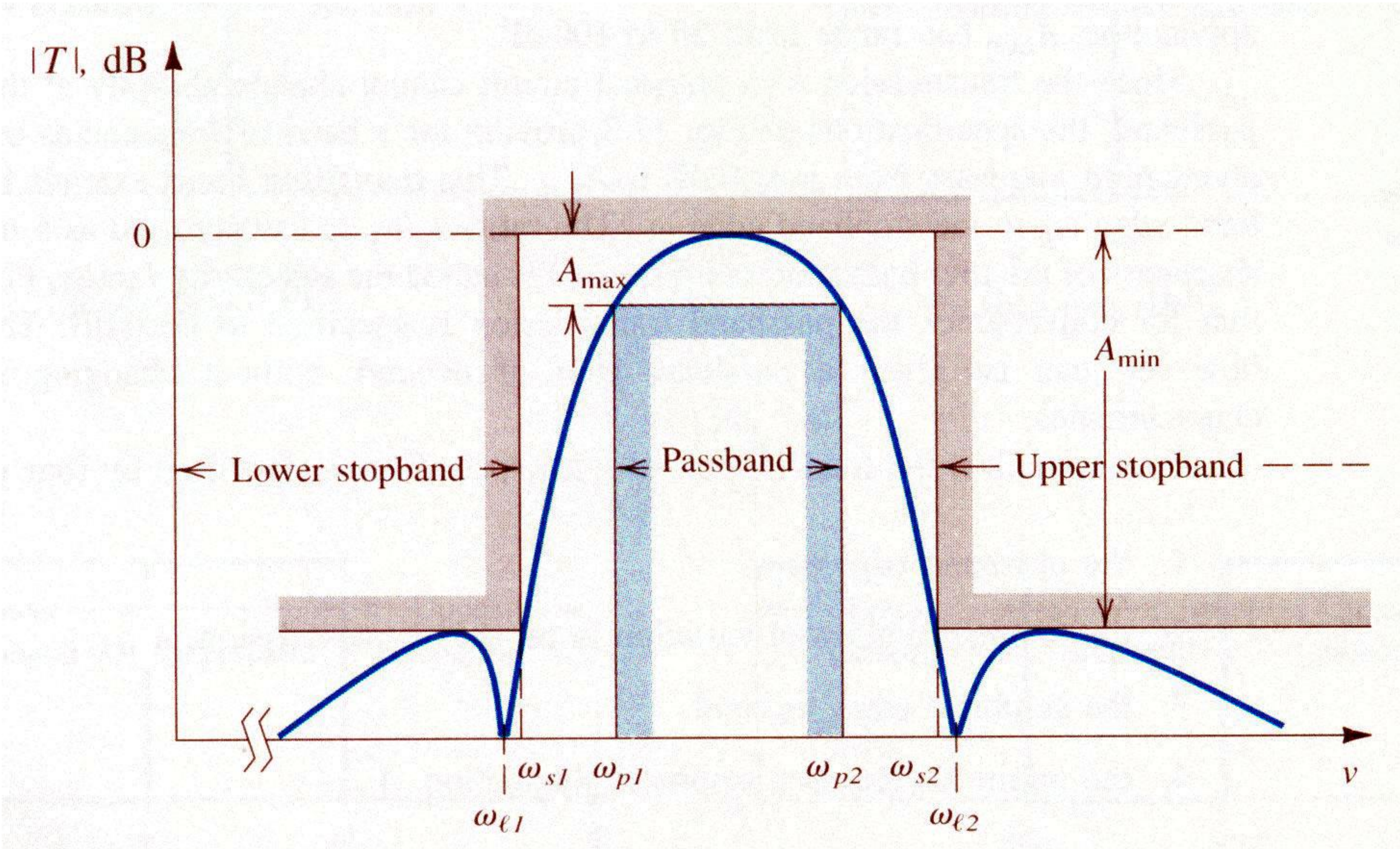
Filtros



Filtro passa-alto

Filtro passa-alto
Classificação de filtros

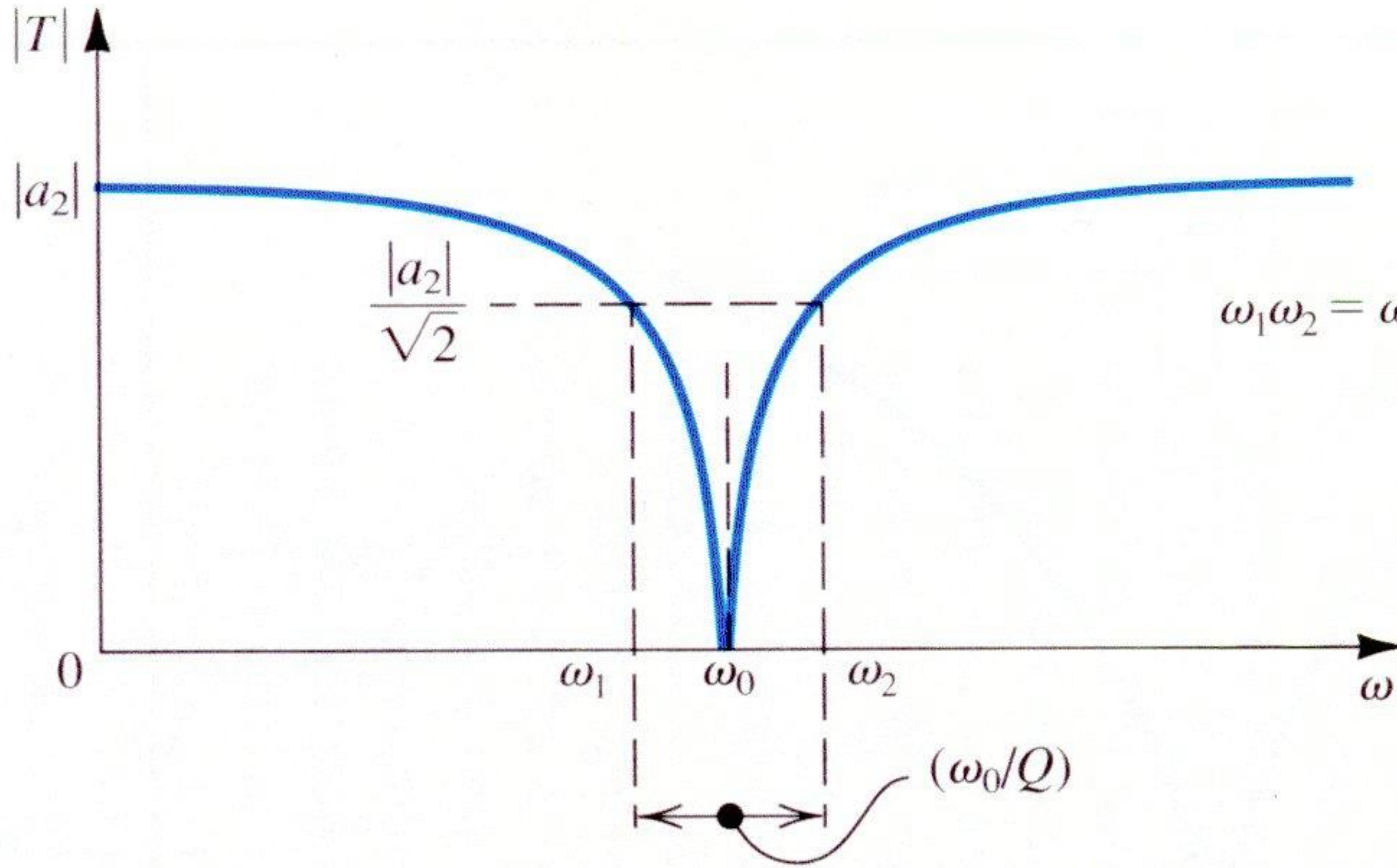
Filtros



Filtro passa-banda

Filtro passa-banda
Classificação de filtros

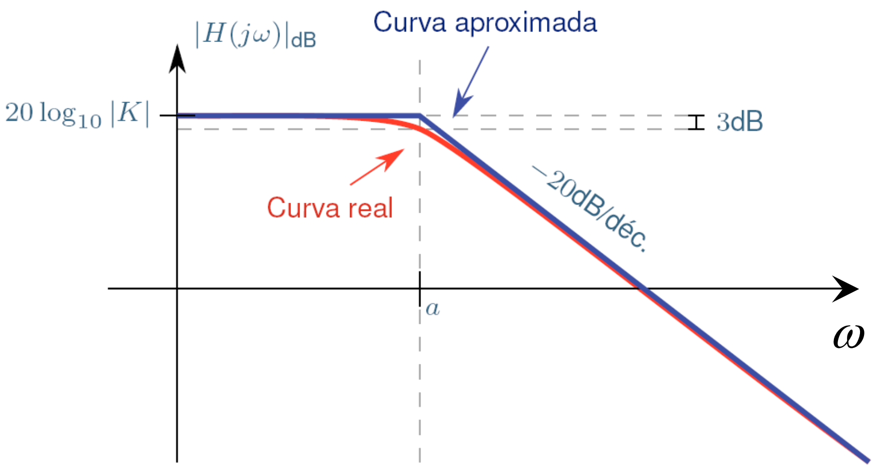
Filtros



$|T|$
$|a_2|$
$\frac{|a_2|}{\sqrt{2}}$
$\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$
0
ω_1
ω_0
ω_2
ω
(ω_0/Q)

Filtros passa-baixo

➢ 1ª ordem

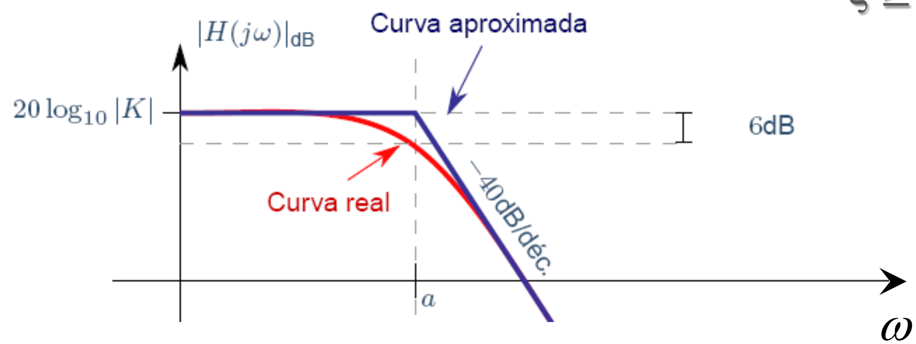


$$H(s) = K\frac{a}{s+a}$$

➢ 2ª ordem

✓ Pólos reais

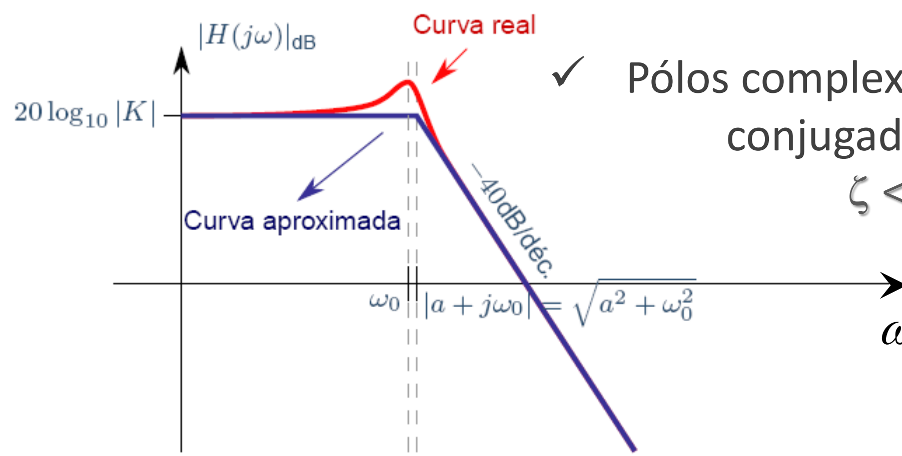
$\zeta \geq 1$



se $\zeta = 1$ $\qquad H(s) = K\frac{a^2}{(s+a)^2}$

✓ Pólos complexos conjugados

$\zeta < 1$

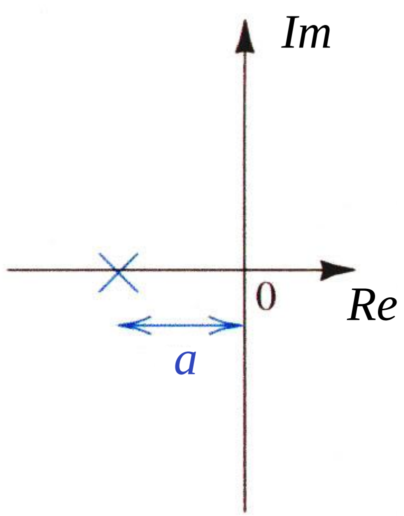


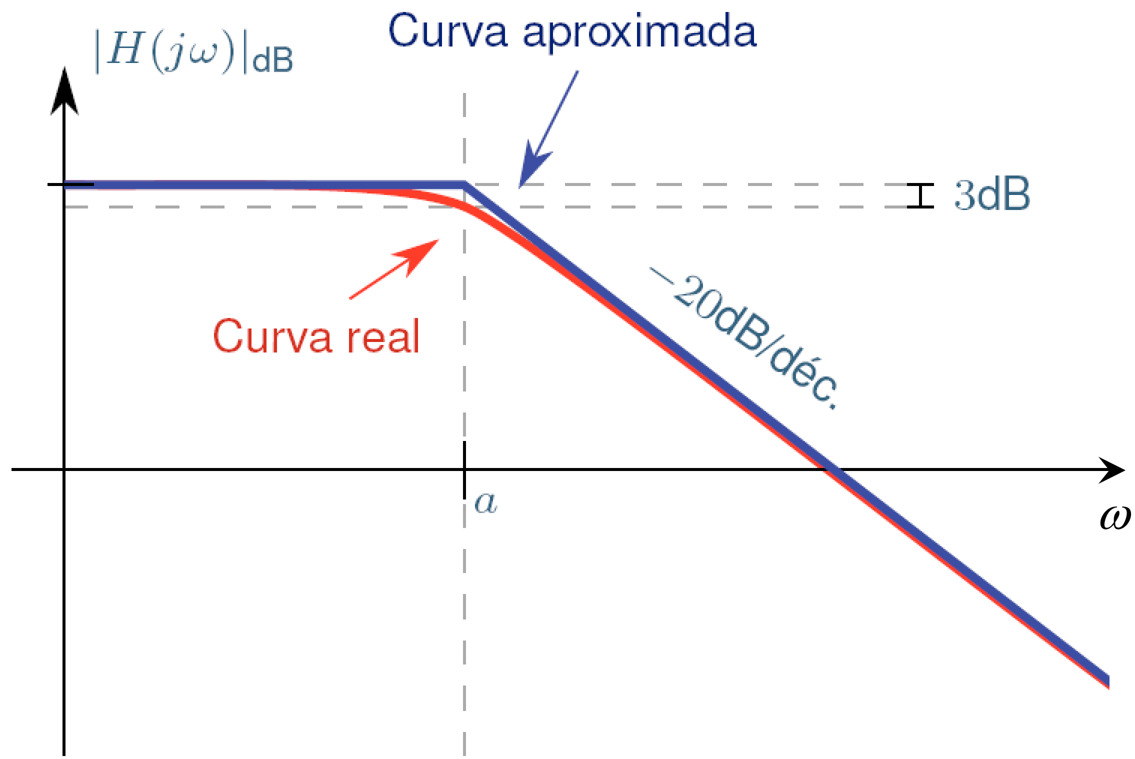
$\zeta < 1$

$$H(s) = K\frac{a^2+\omega_0^2}{\omega_0}\,\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

Filtro passa-baixo

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

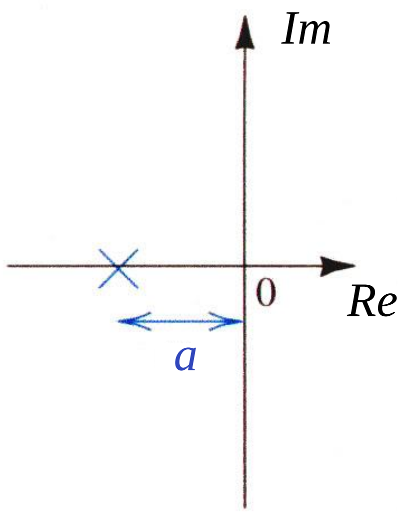


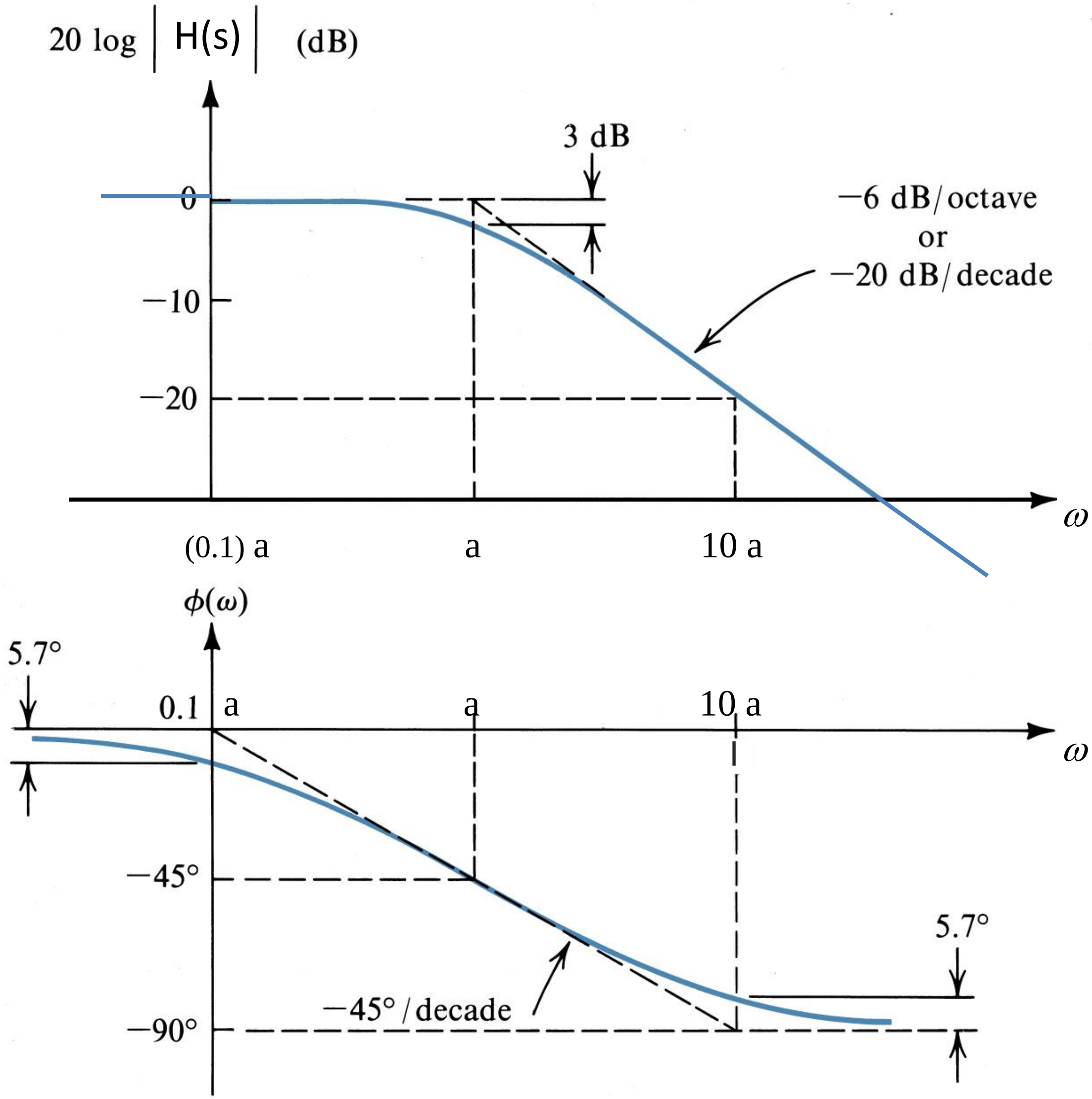


Filtro passa-baixo
comportamento assimptótico e real
um pólo real ($s=-a$)

Filtro passa-baixo

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

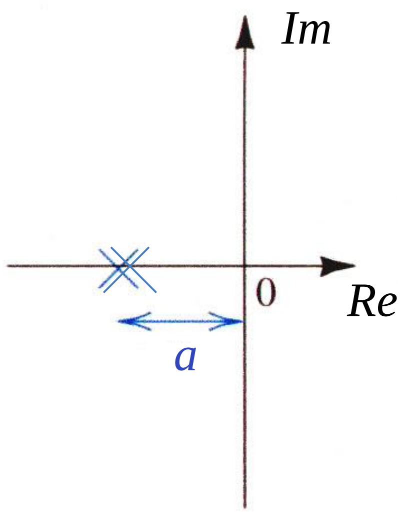


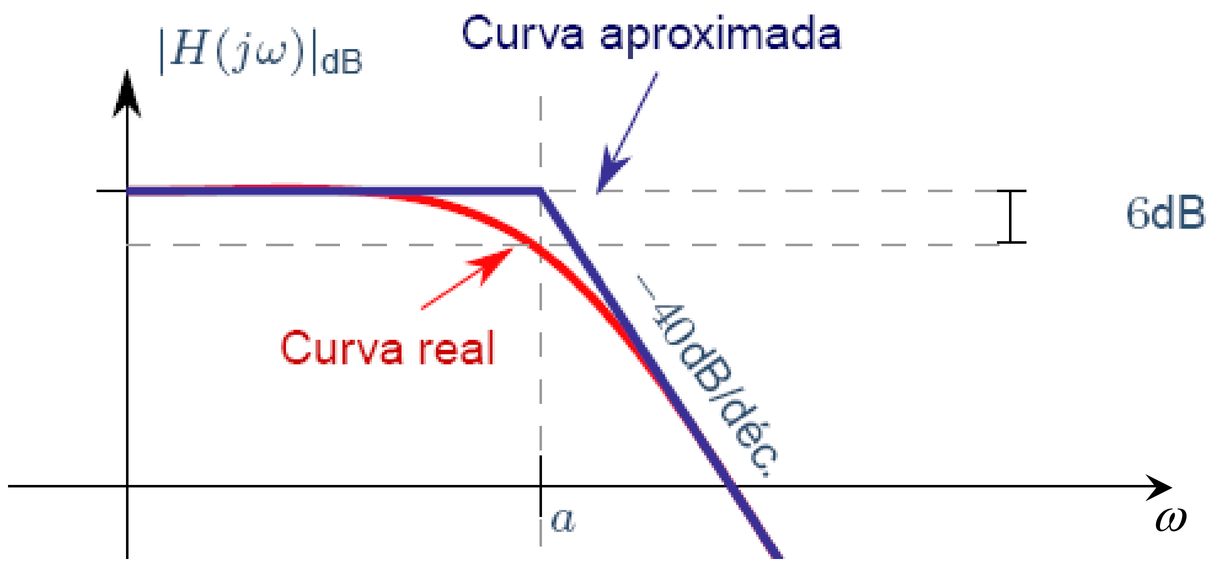


Filtro passa-baixo
diagramas de amplitude e de fase
um pólo real ($s=-a$)

Filtro passa-baixo

$$H(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$$

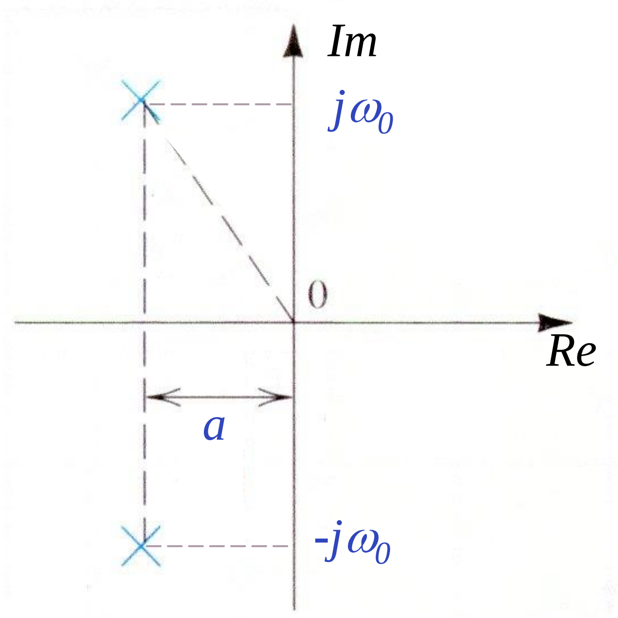


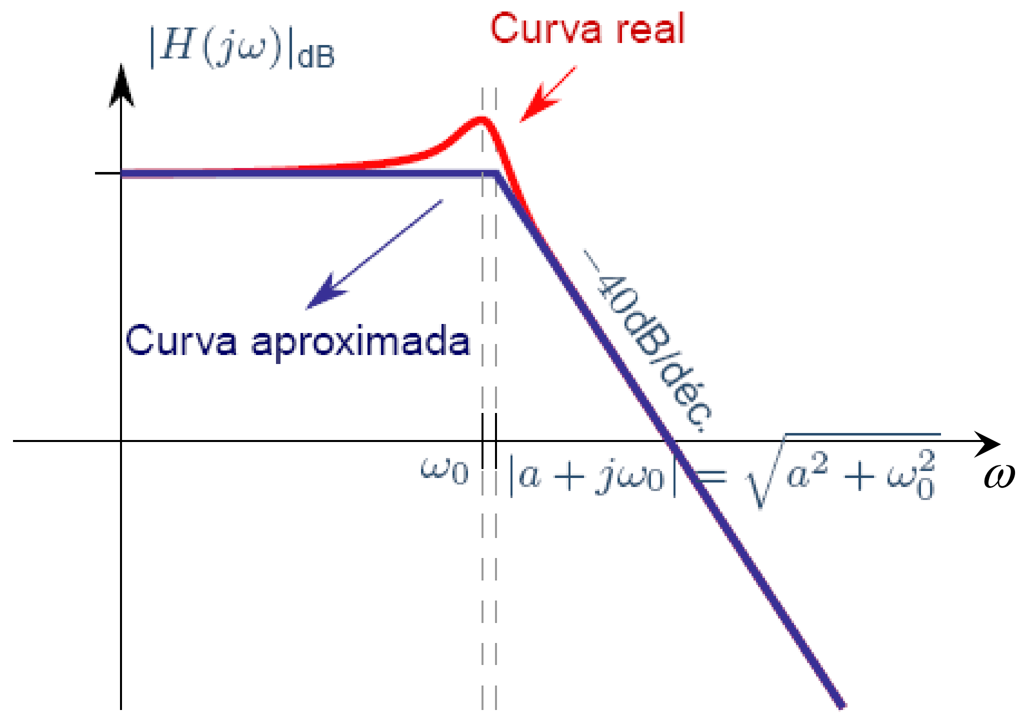


Filtro passa-baixo
pólo real duplo ($s = -a$)
$\zeta = 1$

Filtro passa-baixo

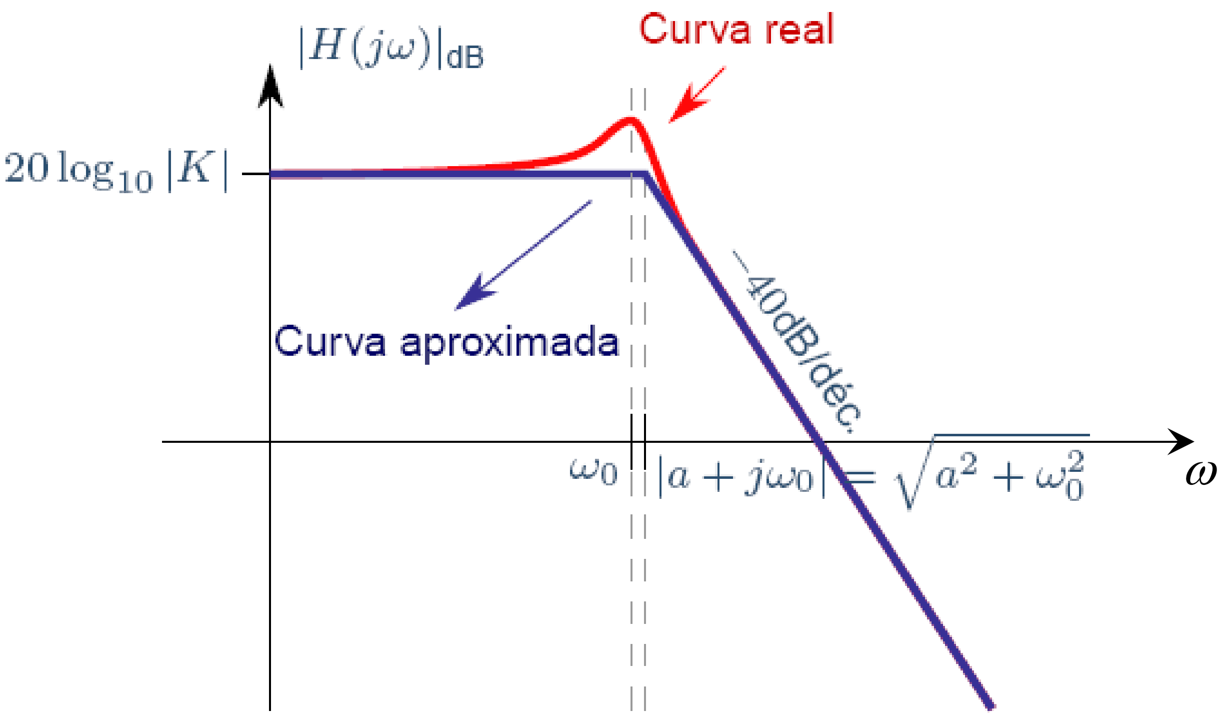
$$H(s)=\frac{a^2+\omega_0{}^2}{(s+a)^2+\omega_0{}^2}$$

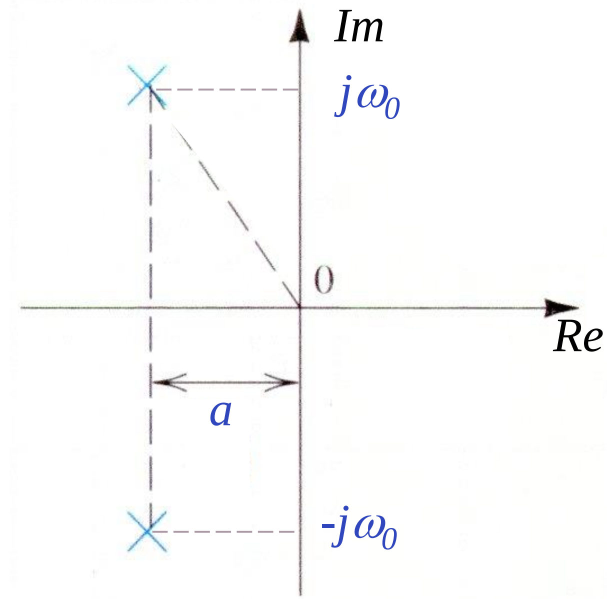




Filtro passa-baixo
par de pólos complexos conjugados
para $\zeta < 1$ $s=-a\pm j\omega_0$

Filtro passa-baixo

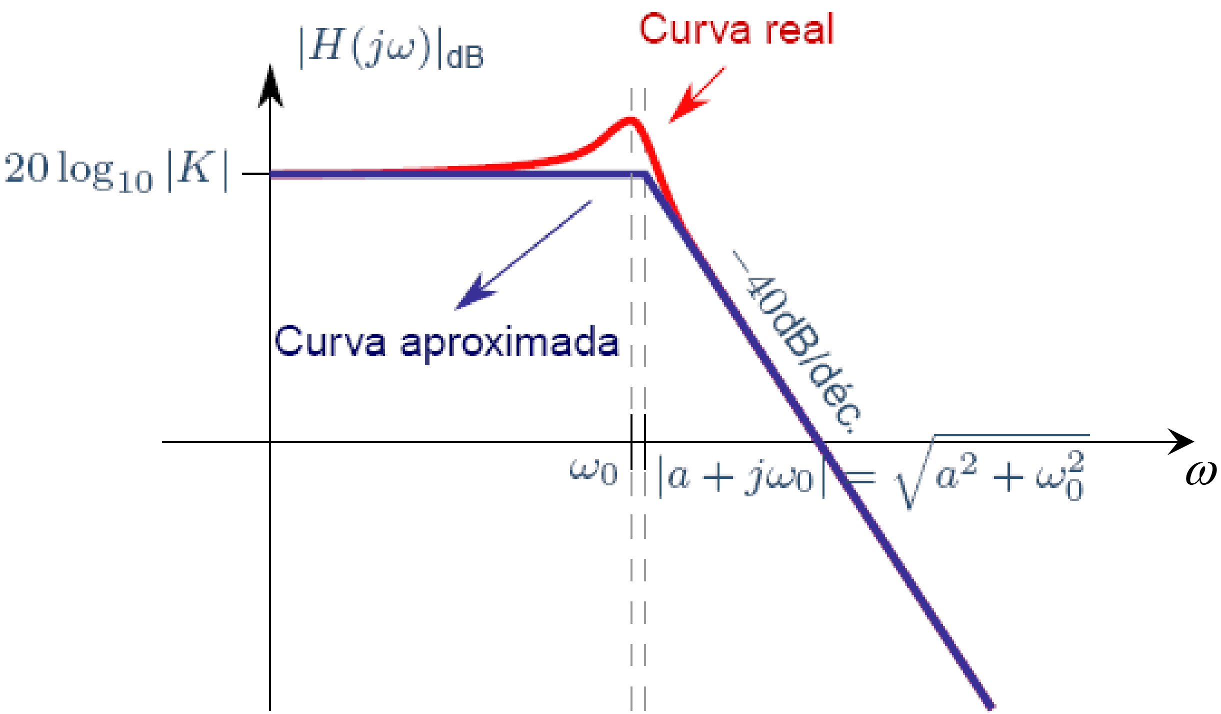


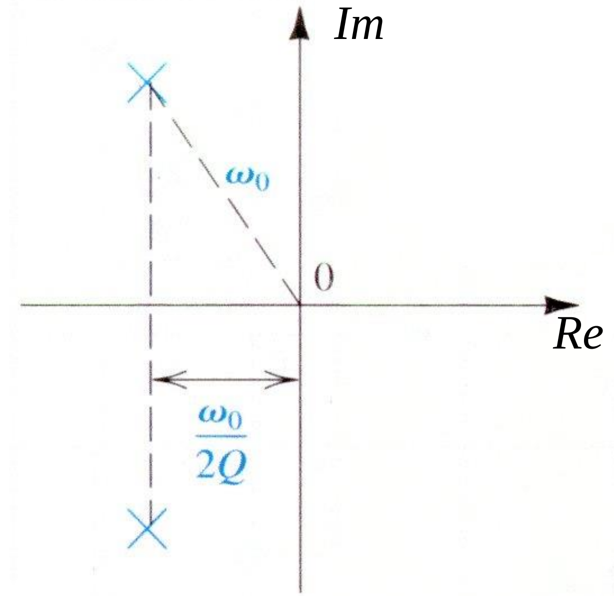


$$H(s) = K \cdot \frac{a^2 + \omega_0{}^2}{(s+a)^2 + \omega_0{}^2}$$

Filtro passa-baixo
par de pólos complexos conjugados
para $\zeta < 1$ $s = -a \pm j\omega_0$

Filtro passa-baixo





$$H(s) = K \cdot \frac{\omega_0^{\;2}}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^{\;2}} = K \cdot \frac{\omega_0^{\;2}}{s^2 + \frac{\omega_0 s}{Q} + \omega_0^{\;2}}$$

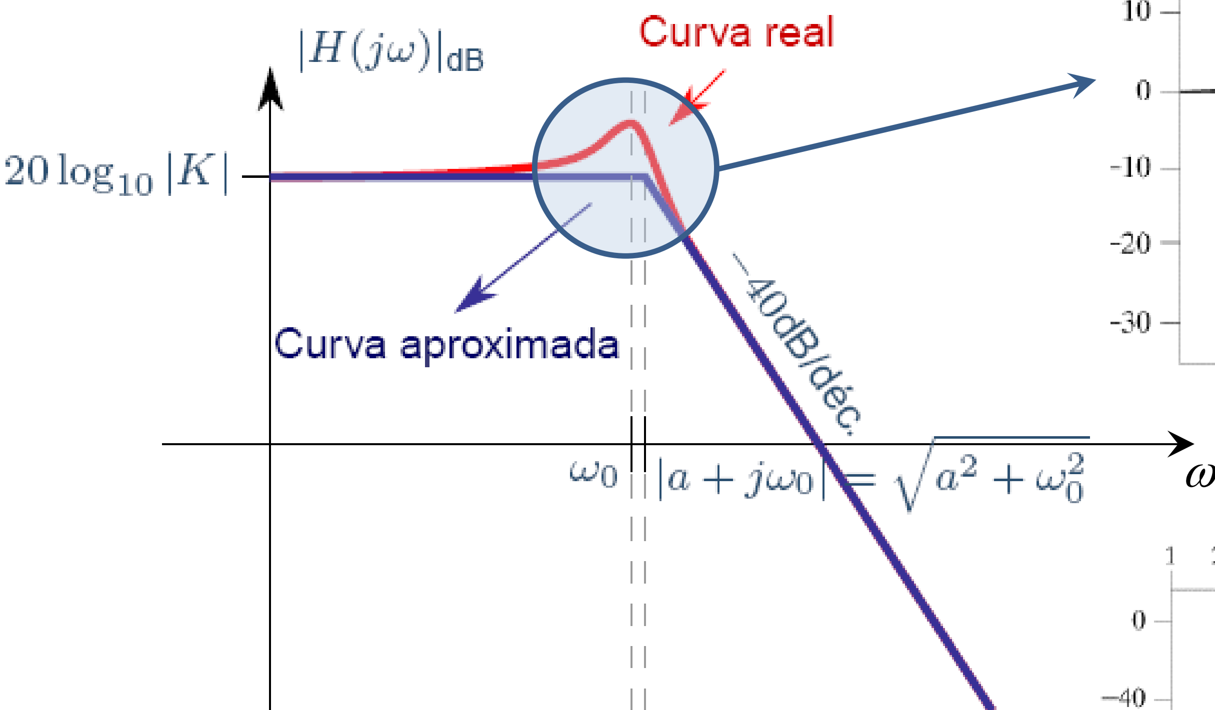
$$\zeta = \frac{1}{2Q}$$

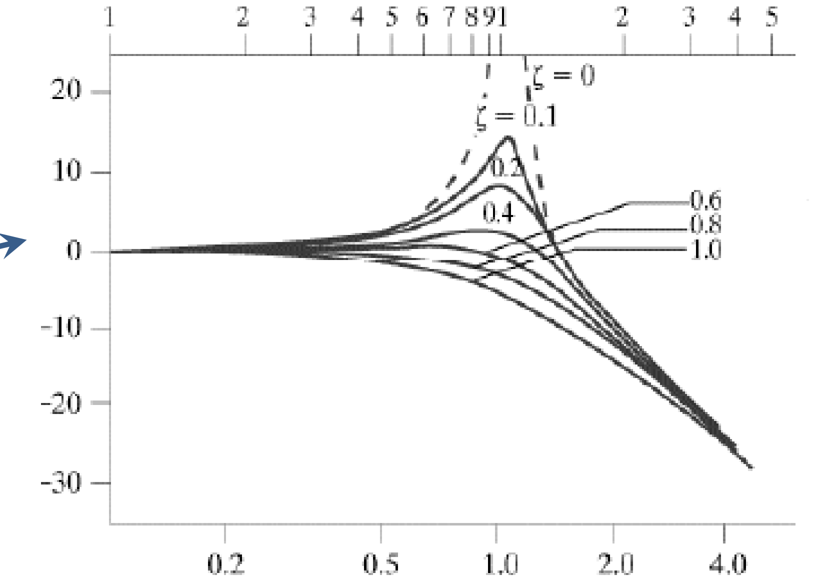
Filtro passa-baixo

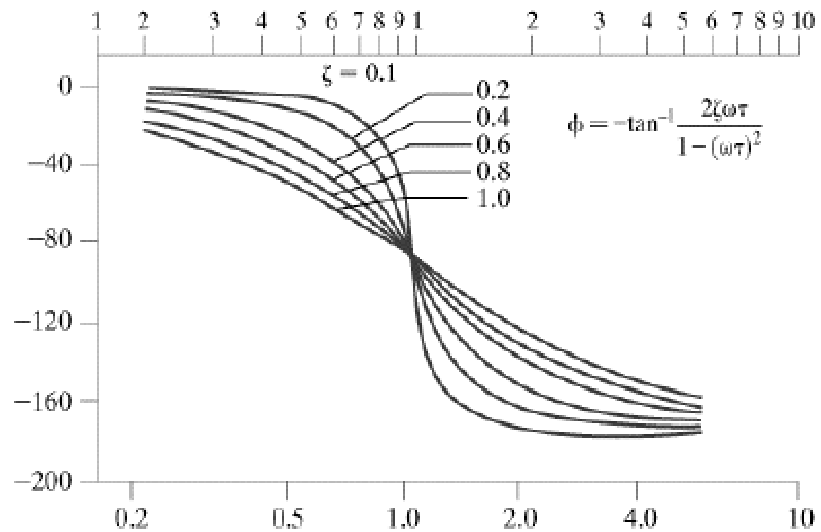
par de pólos complexos conjugados

para $\zeta < 1$ $\quad s = -\omega_0\zeta \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Filtro passa-baixo







$$H(s) = K \cdot \frac{{\omega_0}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + {\omega_0}^2}$$

Efeito de ζ (ou Q) no comportamento

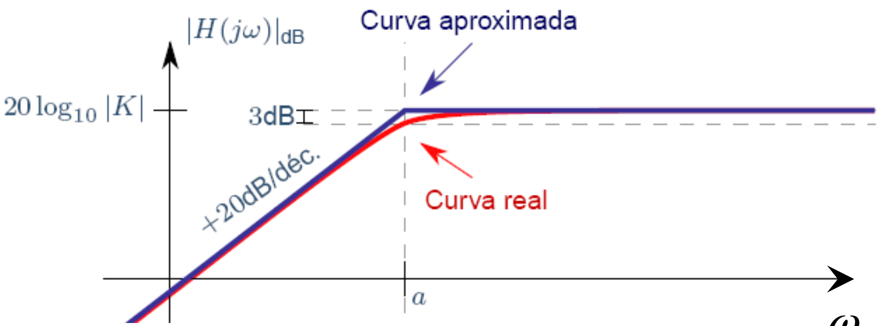
Filtro passa-baixo

par de pólos complexos conjugados

para $\zeta < 1$ $\quad s = -\omega_0\zeta \pm j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Filtros passa-alto

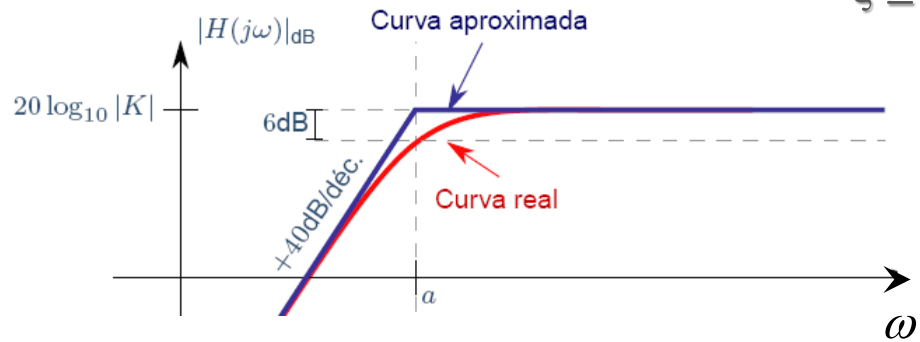
- 1ª ordem



$$H(s) = K\frac{s}{s+a}$$

- 2ª ordem
  - ✓ Pólos reais

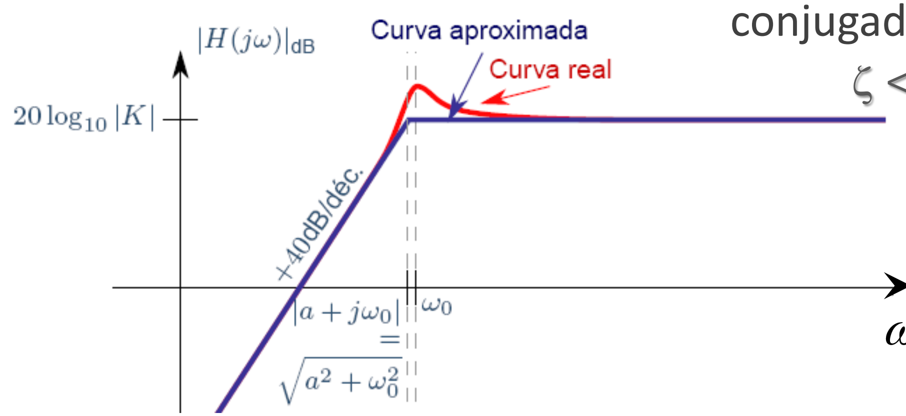
$\zeta \geq 1$



se $\zeta = 1$ $\quad H(s) = K\frac{s^2}{(s+a)^2}$

  - ✓ Pólos complexos conjugados

$\zeta < 1$

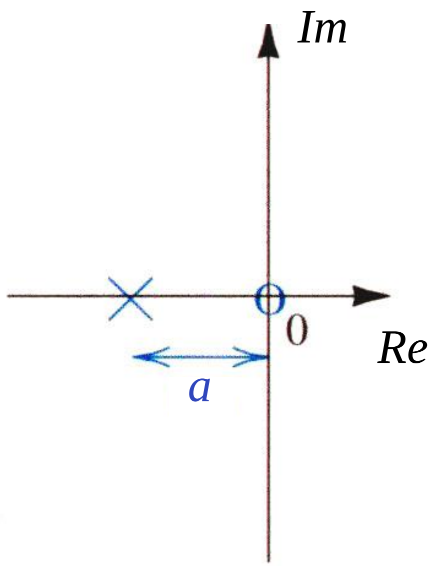


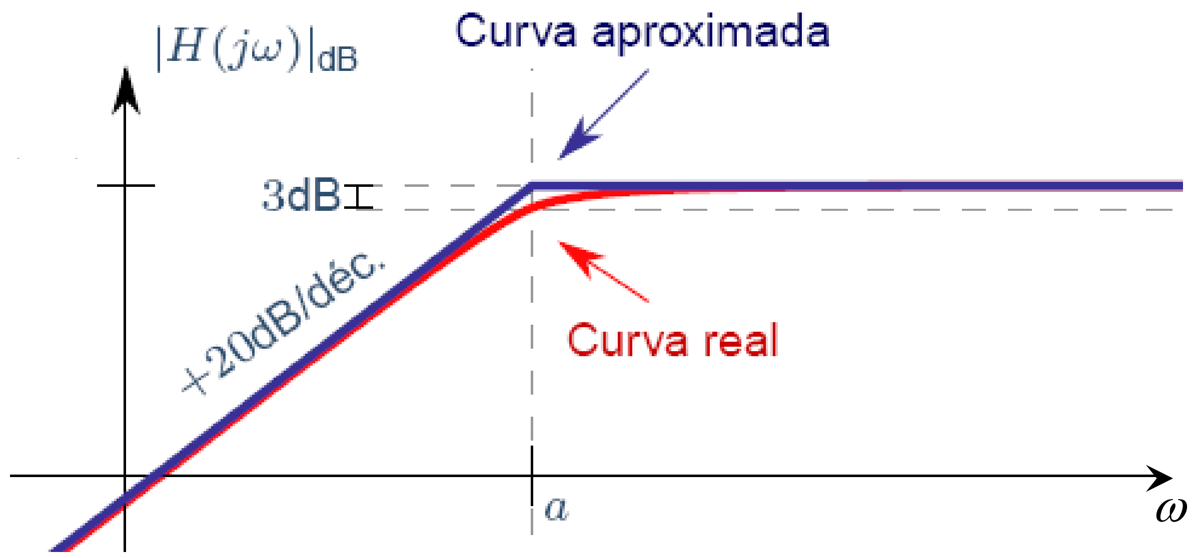
$\zeta < 1$

$$H(s) = K\frac{s^2}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

Filtro passa-alto

$$H(s) = \frac{s}{(s+a)}$$



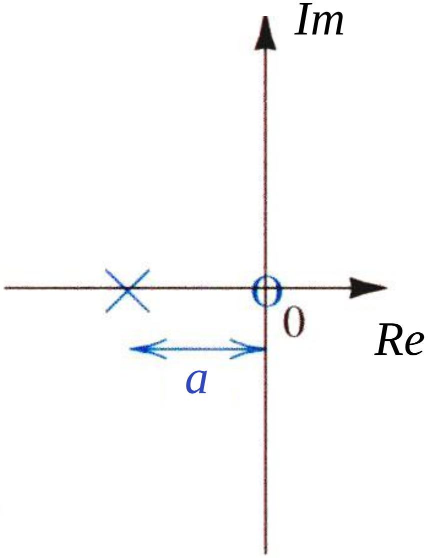


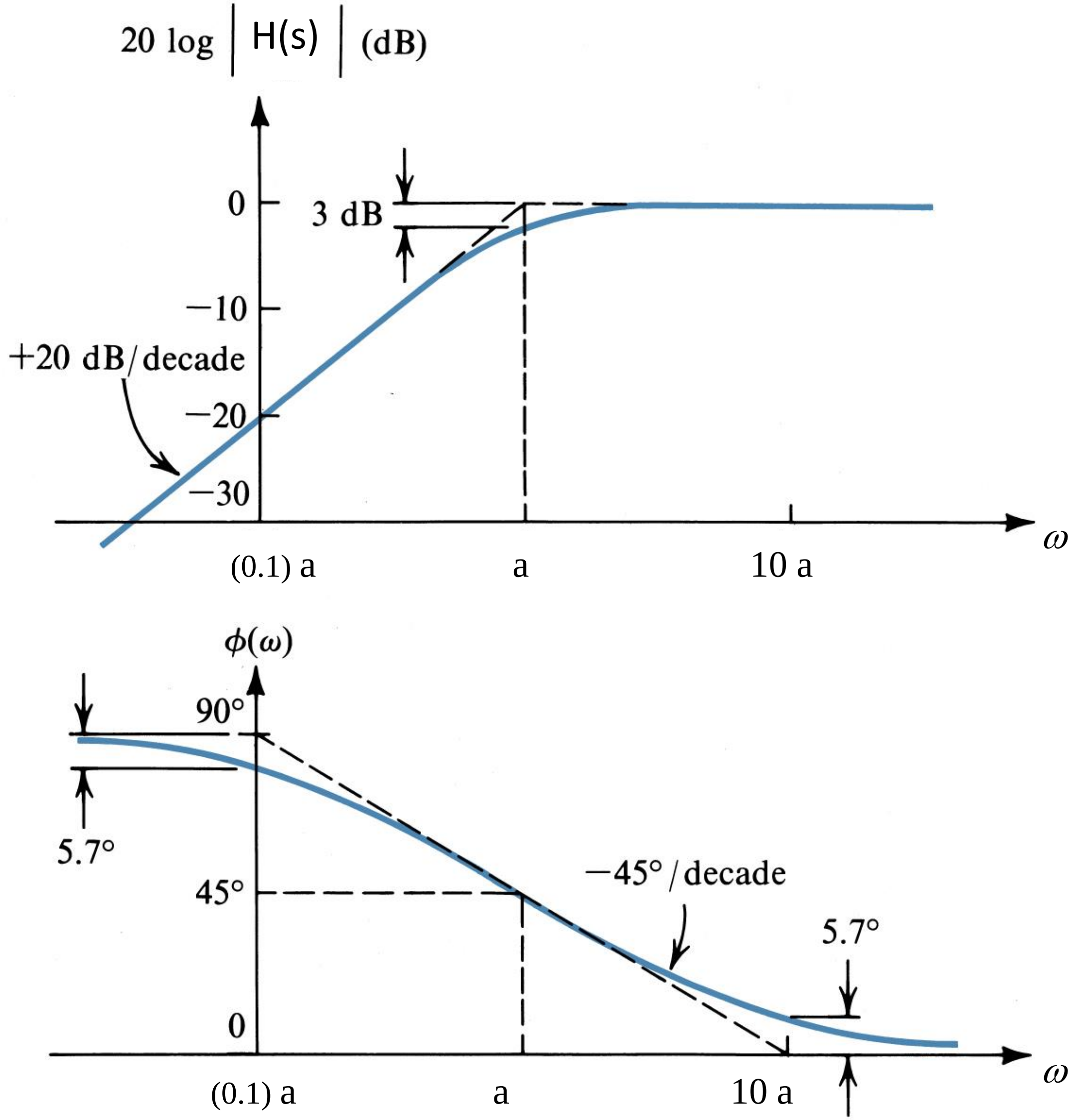
Filtro passa-alto
de 1ª ordem

Filtro passa-alto
zero na origem ($s=0$)
pólo real ($s=-a$)

Filtro passa-alto

$$H(s)=\frac{s}{(s+a)}$$



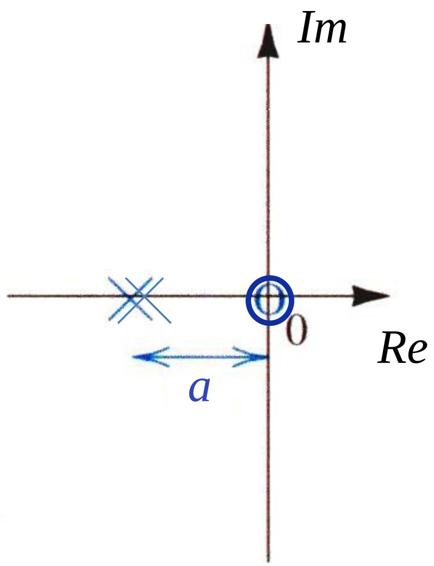


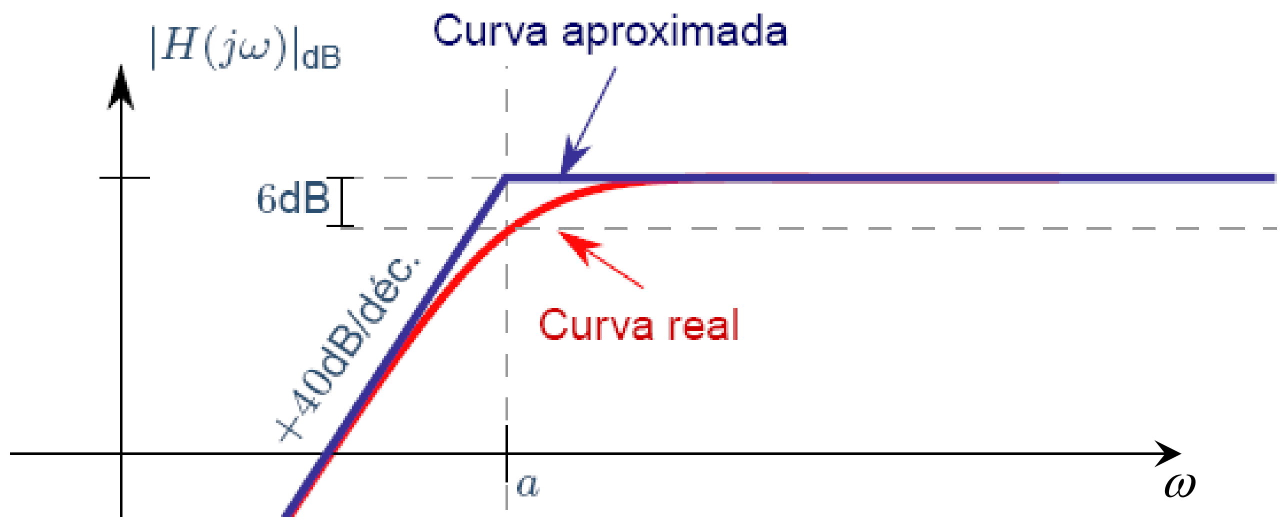
Filtro passa-alto
de 1ª ordem

Filtro passa-alto
um <u>zero</u> ($s=0$)
e um <u>pólo</u> ($s=-a$)

Filtro passa-alto

$$H(s) = \frac{s^2}{(s+a)^2}$$





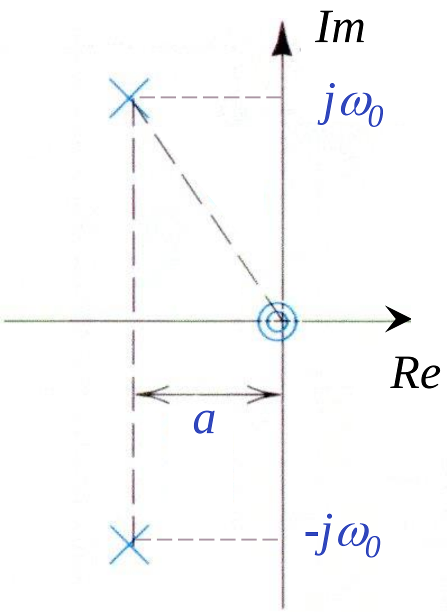
Filtro passa-alto

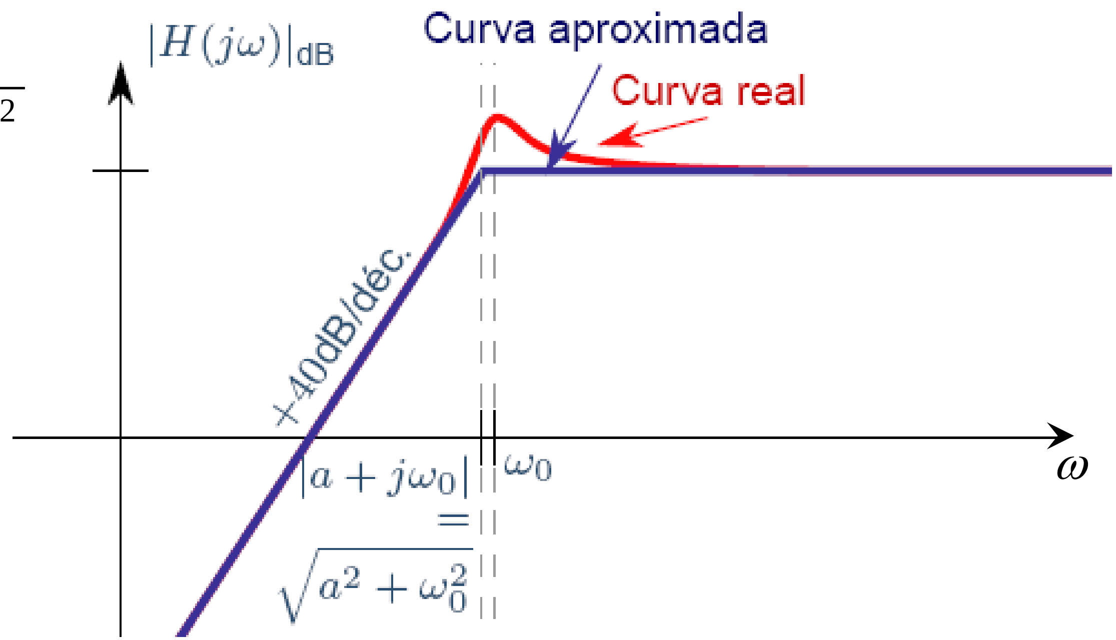
zero duplo na origem ($s=0$)

para $\zeta = 1$ pólo real duplo ($s=-a$)

Filtro passa-alto

$$H(s) = K \cdot \frac{s^2}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$



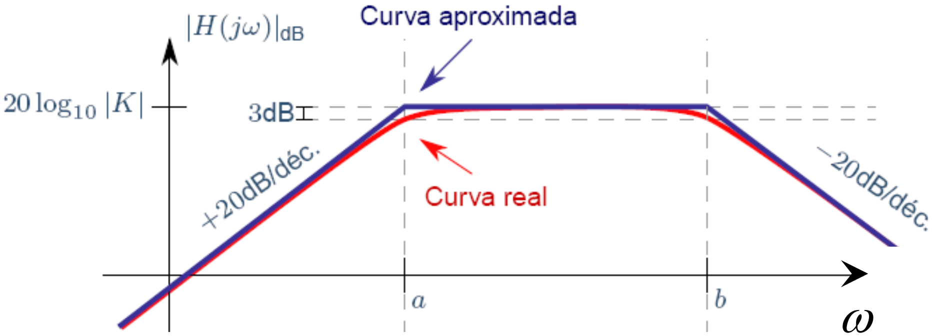


Filtro passa-alto
par de pólos complexos conjugados
para $\zeta < 1$ $s = -a \pm j\omega_0$

Filtros passa-banda

✓ Pólos reais $\zeta > 1$

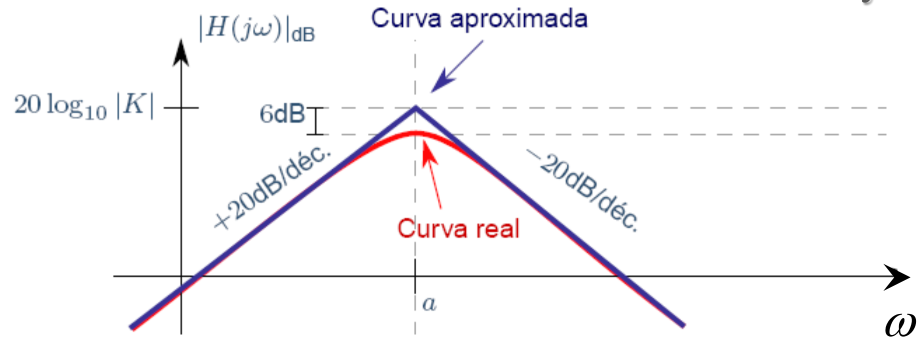
(não-sobrepostos)



$$H(s) = K \underbrace{\frac{s}{s+a}}_{\text{Passa-alto}} \overbrace{\frac{b}{s+b}}^{\text{Passa-baixo}}$$

✓ Pólo real duplo

$\zeta = 1$

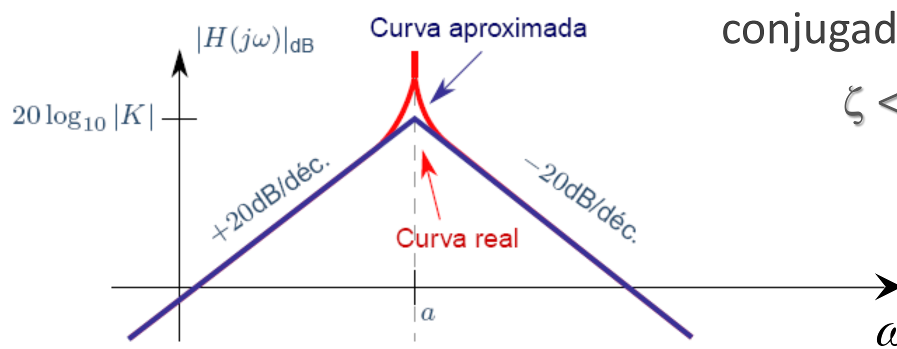


$\zeta = 1$

$$H(s) = K\frac{s}{(s+a)^2}$$

✓ Pólos complexos conjugados

$\zeta < 1$

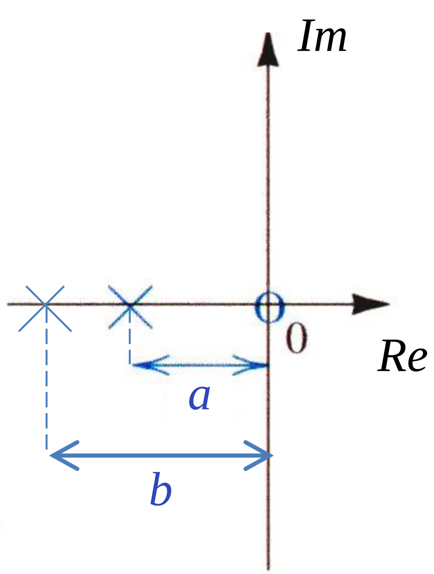


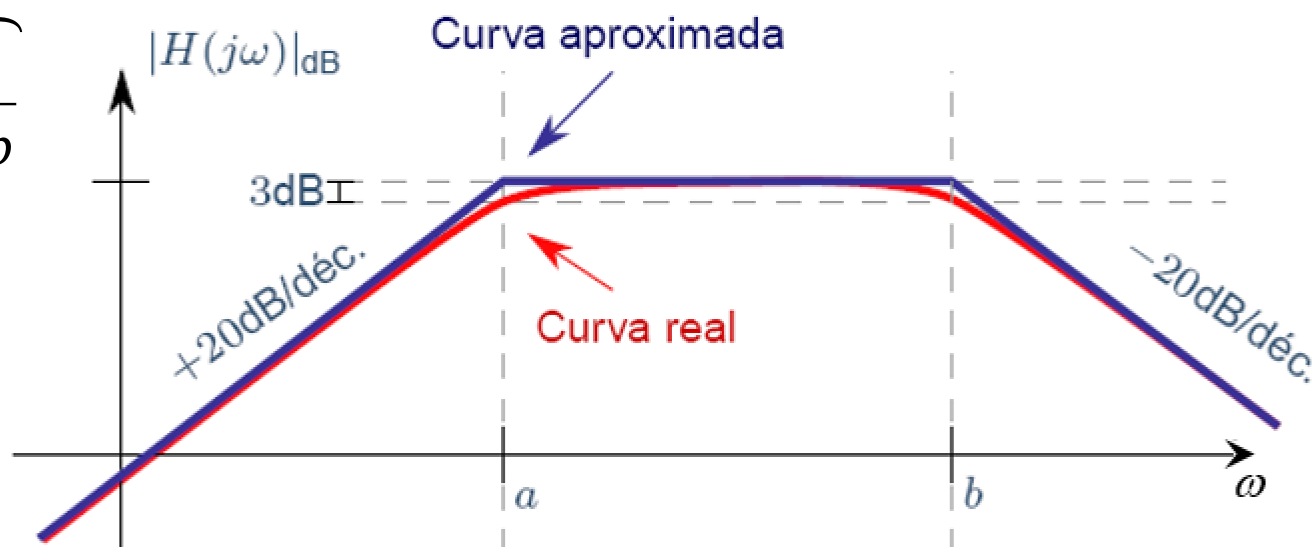
$\zeta < 1$

$$H(s) = K\frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

Filtro passa-banda

$$H(s) = K \cdot \underbrace{\frac{s}{s+a}}_{\text{Passa-alto}} \cdot \overbrace{\frac{b}{s+b}}^{\text{Passa-baixo}}$$

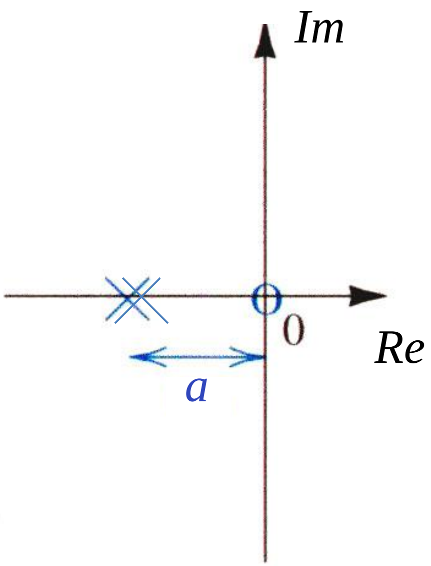


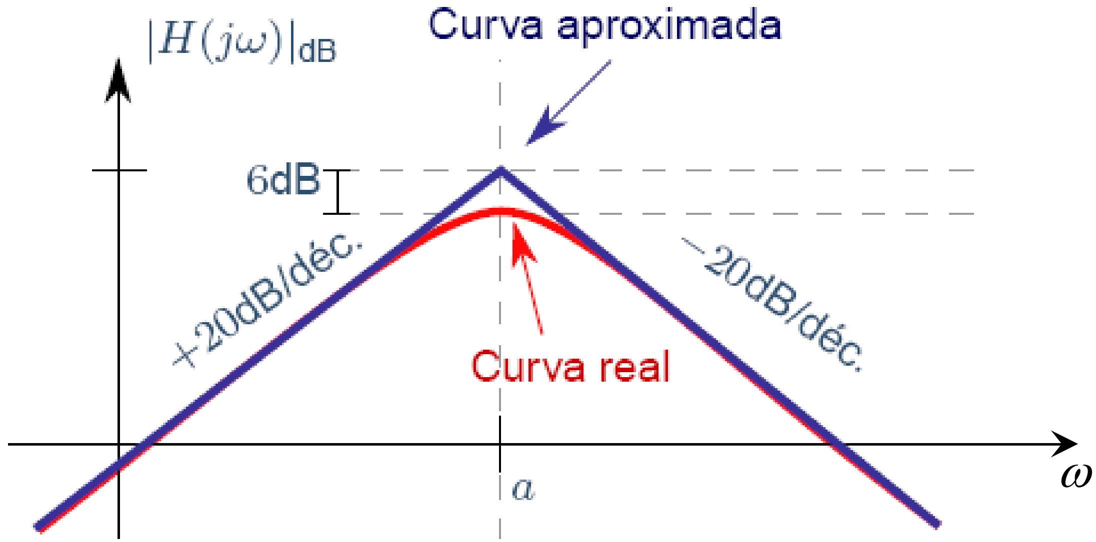


Filtro passa-banda
zero na origem ($s=0$)
para $\zeta > 1$ pólos reais ($s=-a$ e $s=-b$)

Filtro passa-banda

$$H(s) = K \cdot \frac{s \cdot a}{(s+a)^2}$$



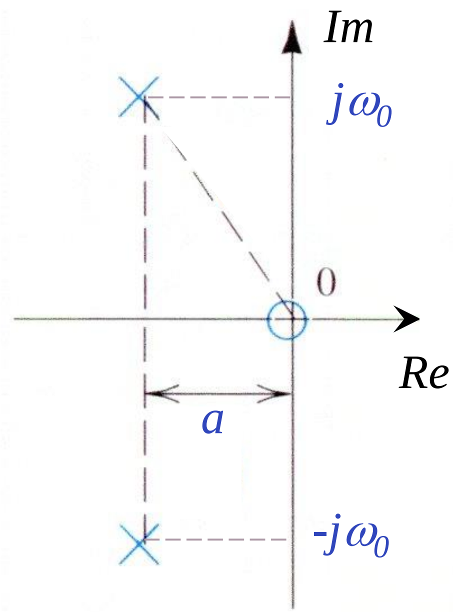


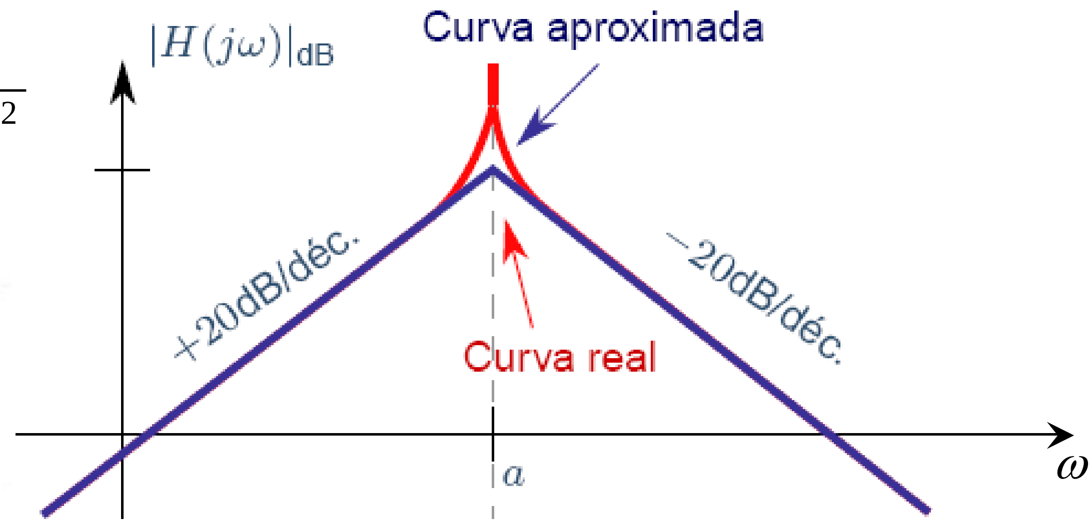
para $\zeta = 1$

Filtro passa-banda
zero na origem ($s=0$)
pólo real duplo ($s=-a$)

Filtro passa-banda

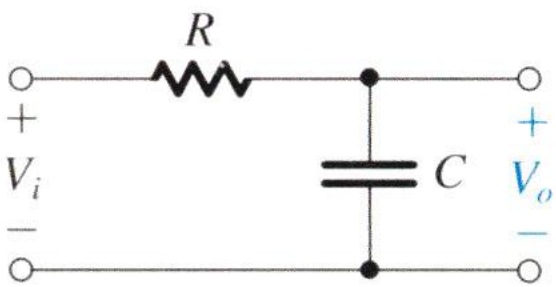
$$H(s) = K \cdot \frac{s}{(s+a)^2 + \omega_0^{\,2}}$$





Filtro passa-banda
par de pólos complexos conjugados
para $\zeta < 1$ $s = -a \pm j\omega_0$

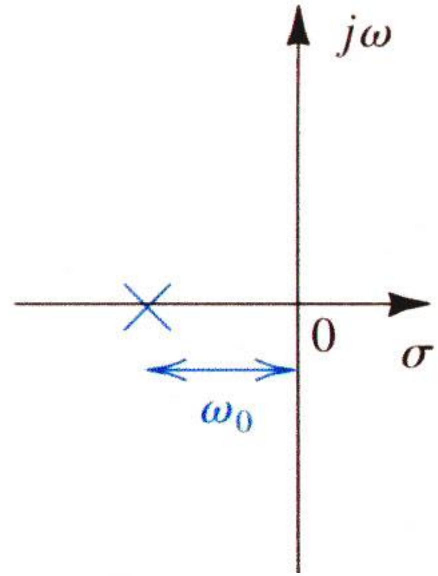
Filtro passa-baixo

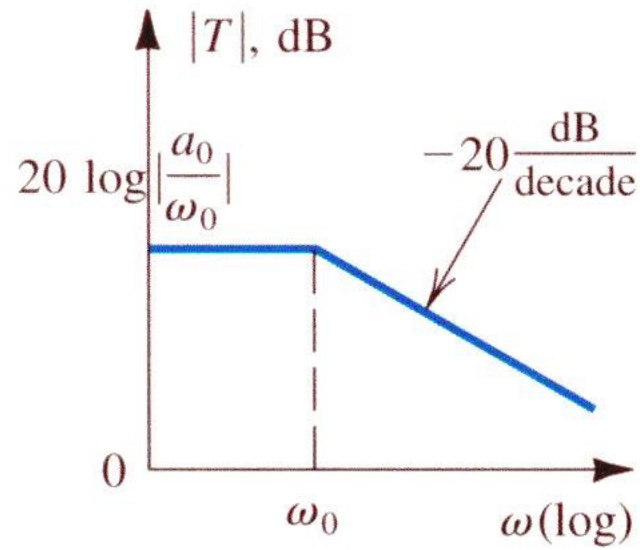


$$CR = \frac{1}{\omega_0}$$

$$\text{dc gain} = 1$$

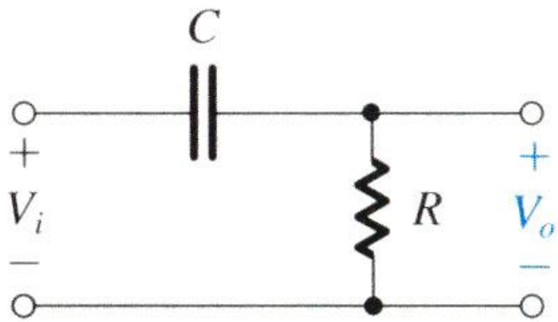
$$T(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0}$$





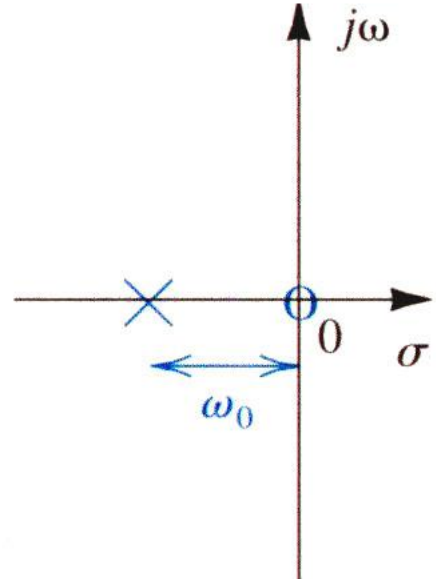
Passa-baixo de 1ª ordem
Análise no domínio da frequência

Filtro passa-alto

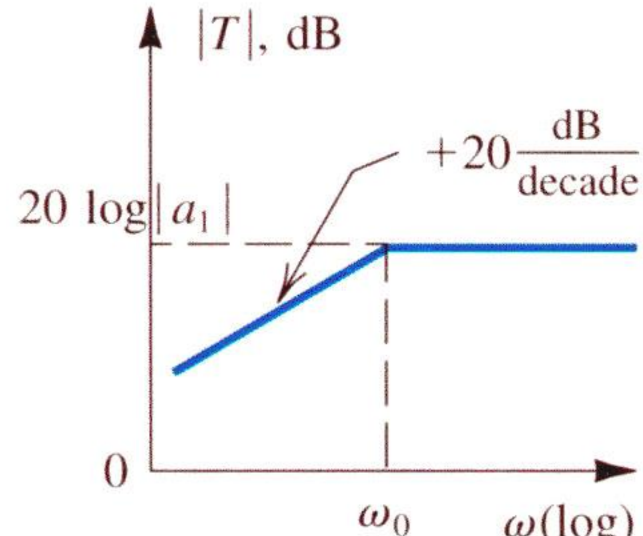


$$CR = \frac{1}{\omega_0}$$

High-frequency gain = 1



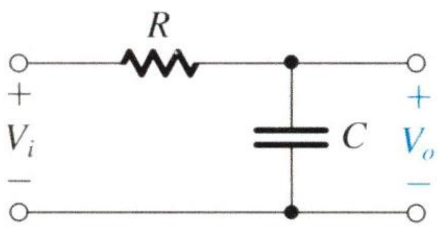
$$T(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0}$$



Passa-alto de 1ª ordem
Análise no domínio da frequência

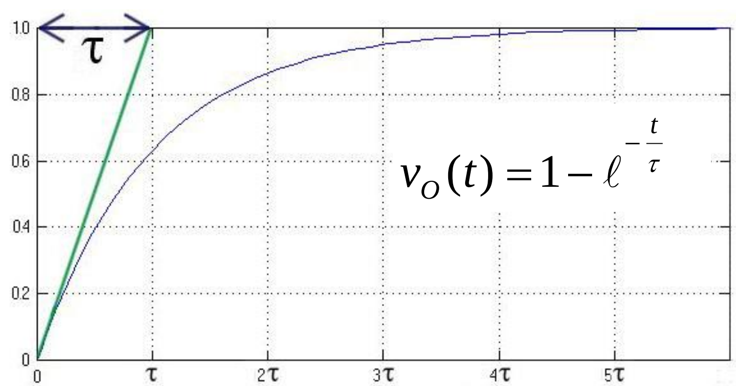
Filtros

$$H(S)=\frac{v_O(S)}{v_i(S)}=\frac{1/SC}{1/SC+R}=\frac{1}{SCR+1}$$

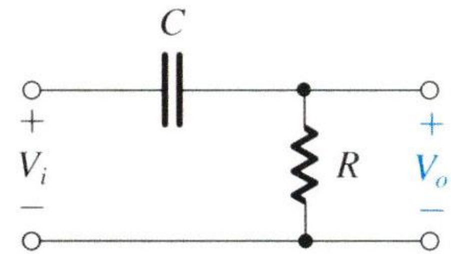


$$v_O(t)\ +\ RC\frac{\partial v_O(t)}{\partial t}=v_i(t)$$

$$v_O(t)\ =v_C(t)$$

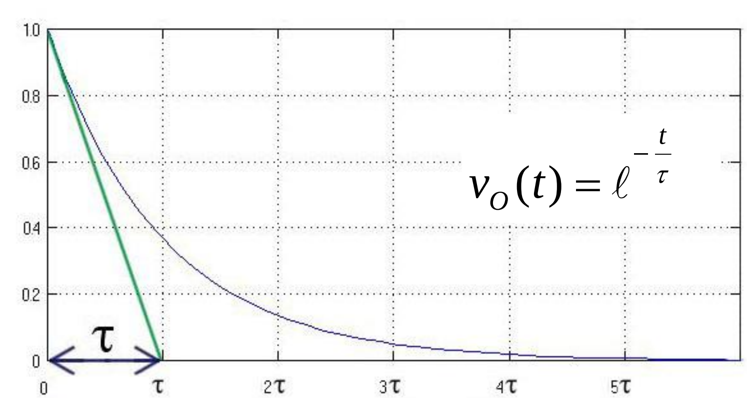


$$H(S)=\frac{v_O(S)}{v_i(S)}=\frac{R}{1/SC+R}=\frac{SCR}{SCR+1}$$

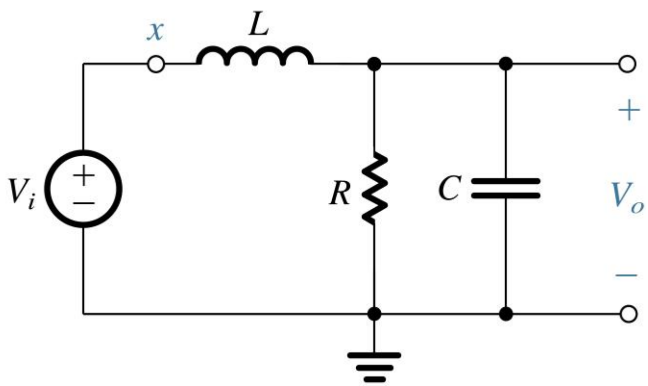


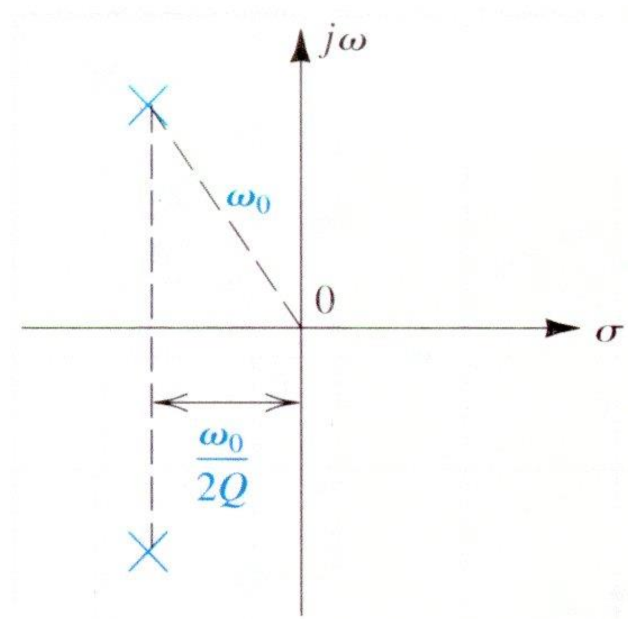
$$v_C(t)\ +\ RC\frac{\partial v_C(t)}{\partial t}=v_i(t)$$

$$v_O(t)\ =v_i(t)-v_C(t)$$



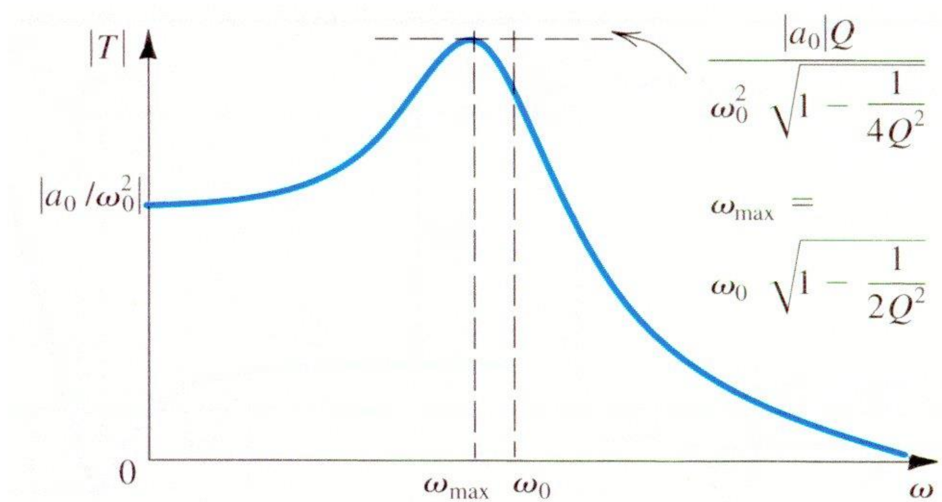
Filtros





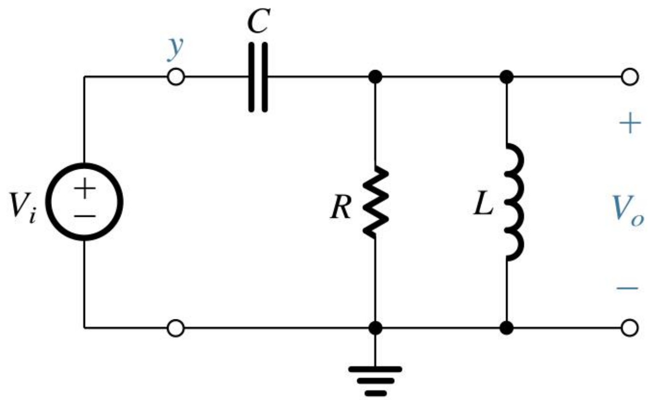
$$T(s) = \frac{a_0}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

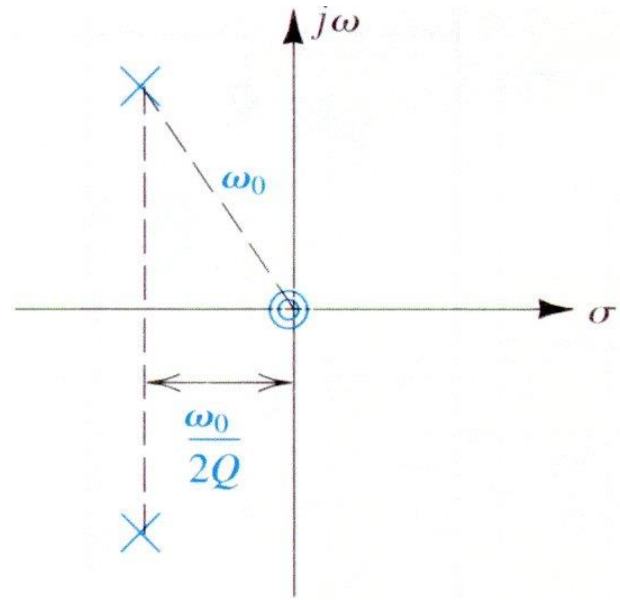
$$\text{dc gain} = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$



Passa-baixo de 2ª ordem
Análise no domínio da frequência

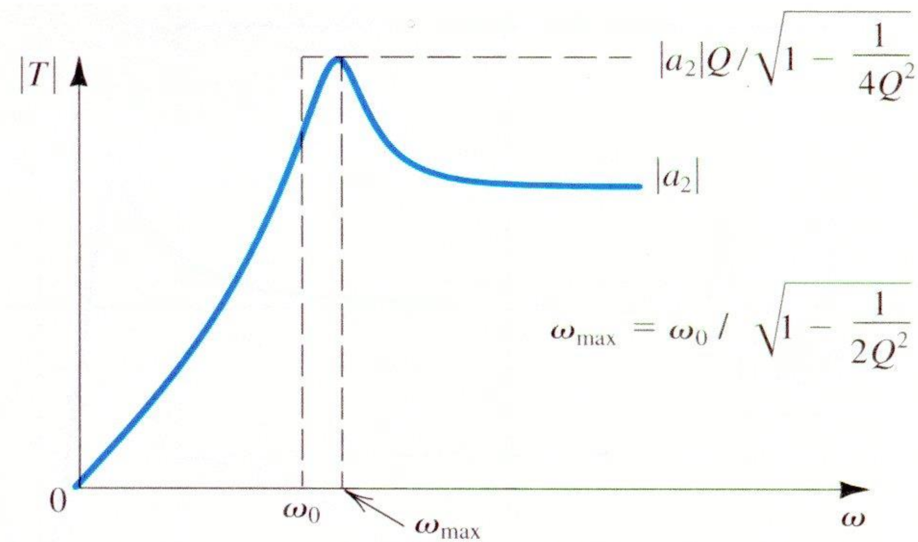
Filtros





$$T(s) = \frac{a_2 s^2}{s^2 + s\dfrac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

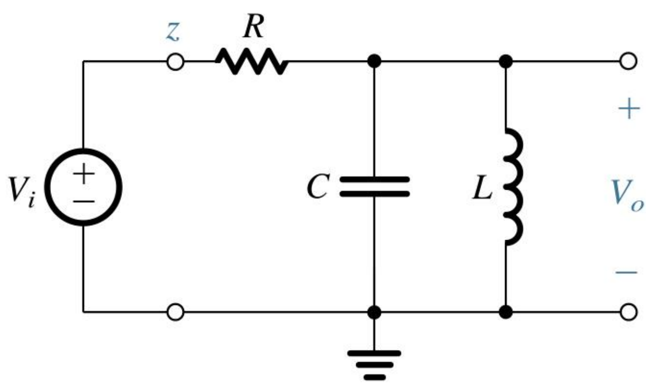
High-frequency gain $= a_2$

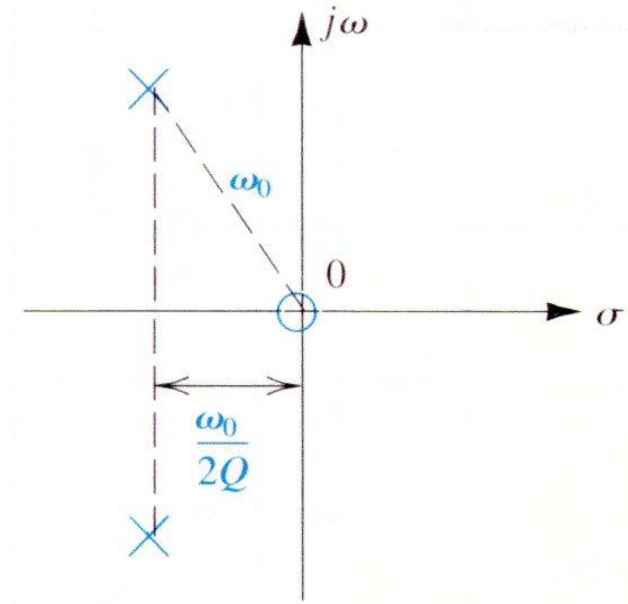


Filtro passa-alto de 2ª ordem

Passa-alto de 2ª ordem
Análise no domínio da frequência

Filtros



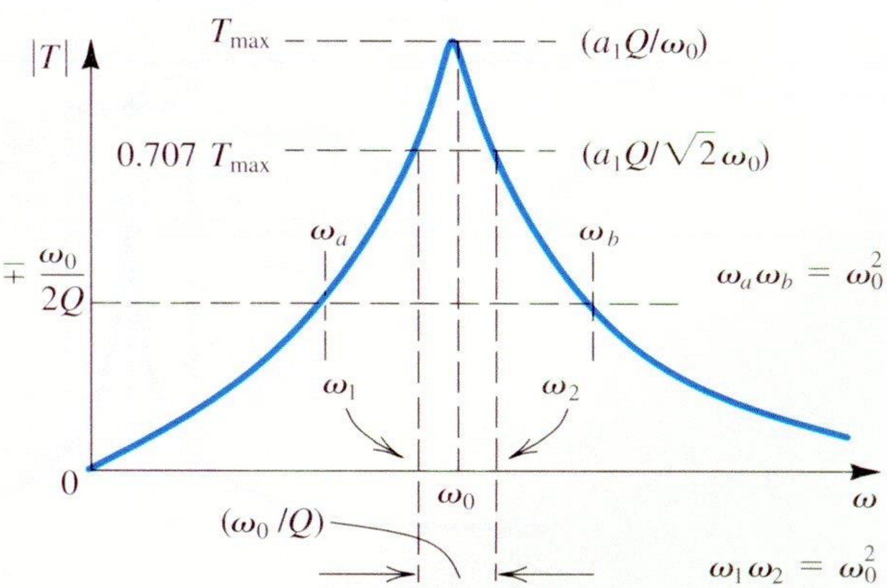


$$T(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

Center-frequency gain

$$= \frac{a_1 Q}{\omega_0}$$

$$\omega_1, \omega_2 = \omega_0\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \mp \frac{\omega_0}{2Q}$$



Filtro passa-banda

Passa-banda de 2ª ordem
Análise no domínio da frequência

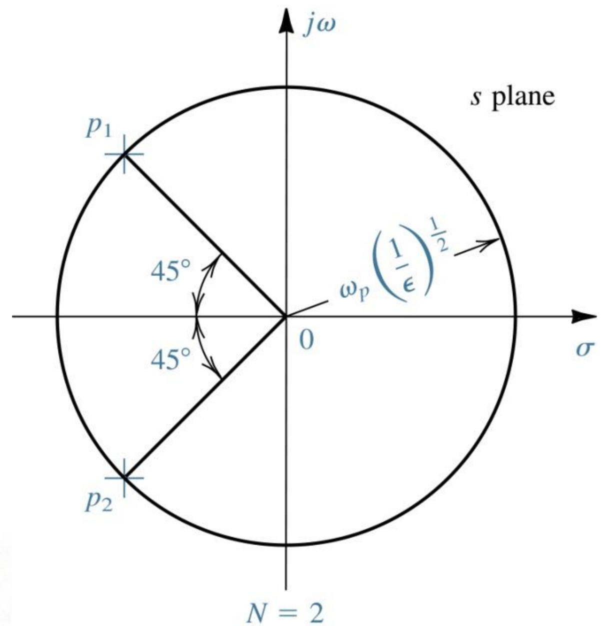
Filtros

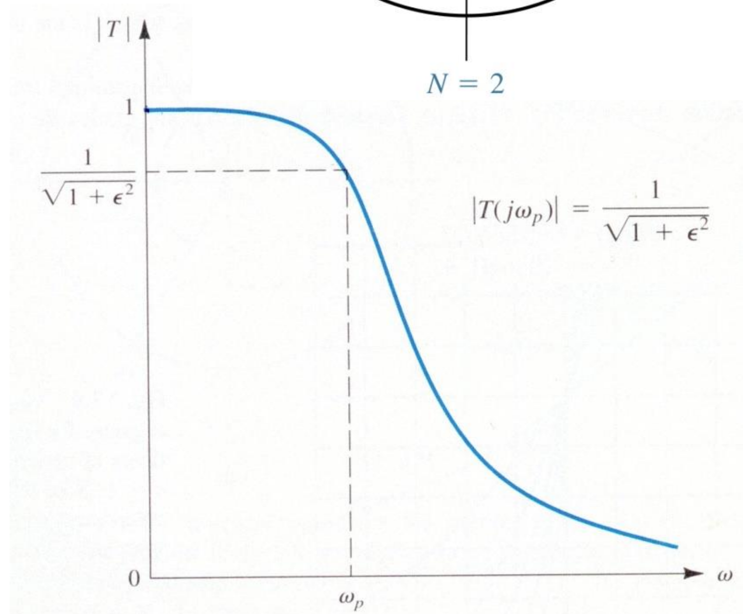
$$T(S) = \frac{\omega_O^{\,2}}{S^2 + \dfrac{\omega_O S}{Q} + \omega_O^{\,2}}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \quad \longleftrightarrow \quad \zeta = 0.707$$

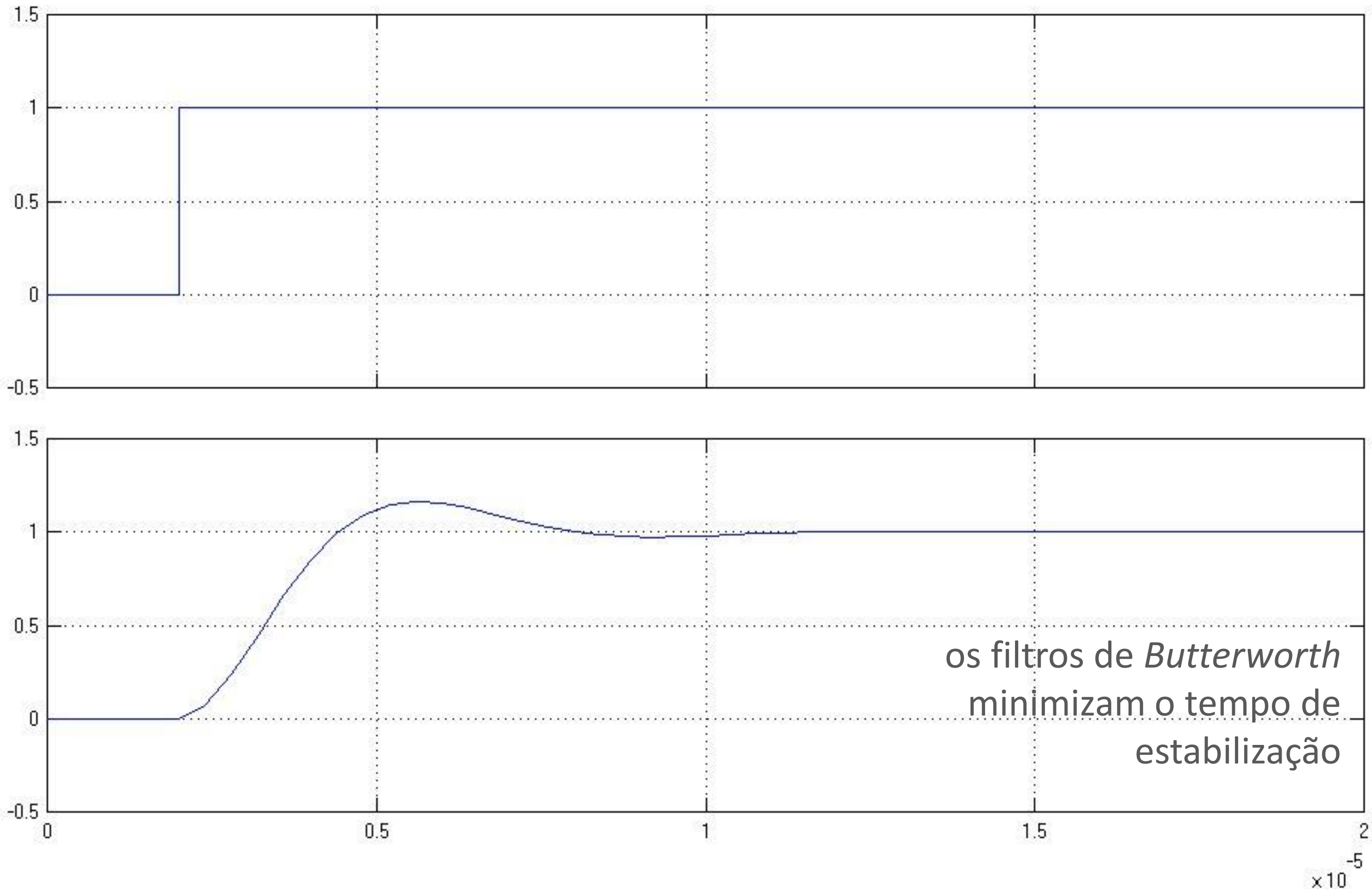
$$\left|T(S = j\omega_O)\right| = \left|\frac{\omega_O^{\,2}}{-\omega_O^{\,2} + j\dfrac{\omega_O\omega_O}{Q} + \omega_O^{\,2}}\right| = Q$$

$$20\log\left|T(j\omega_O)\right| = -3\text{dB}$$





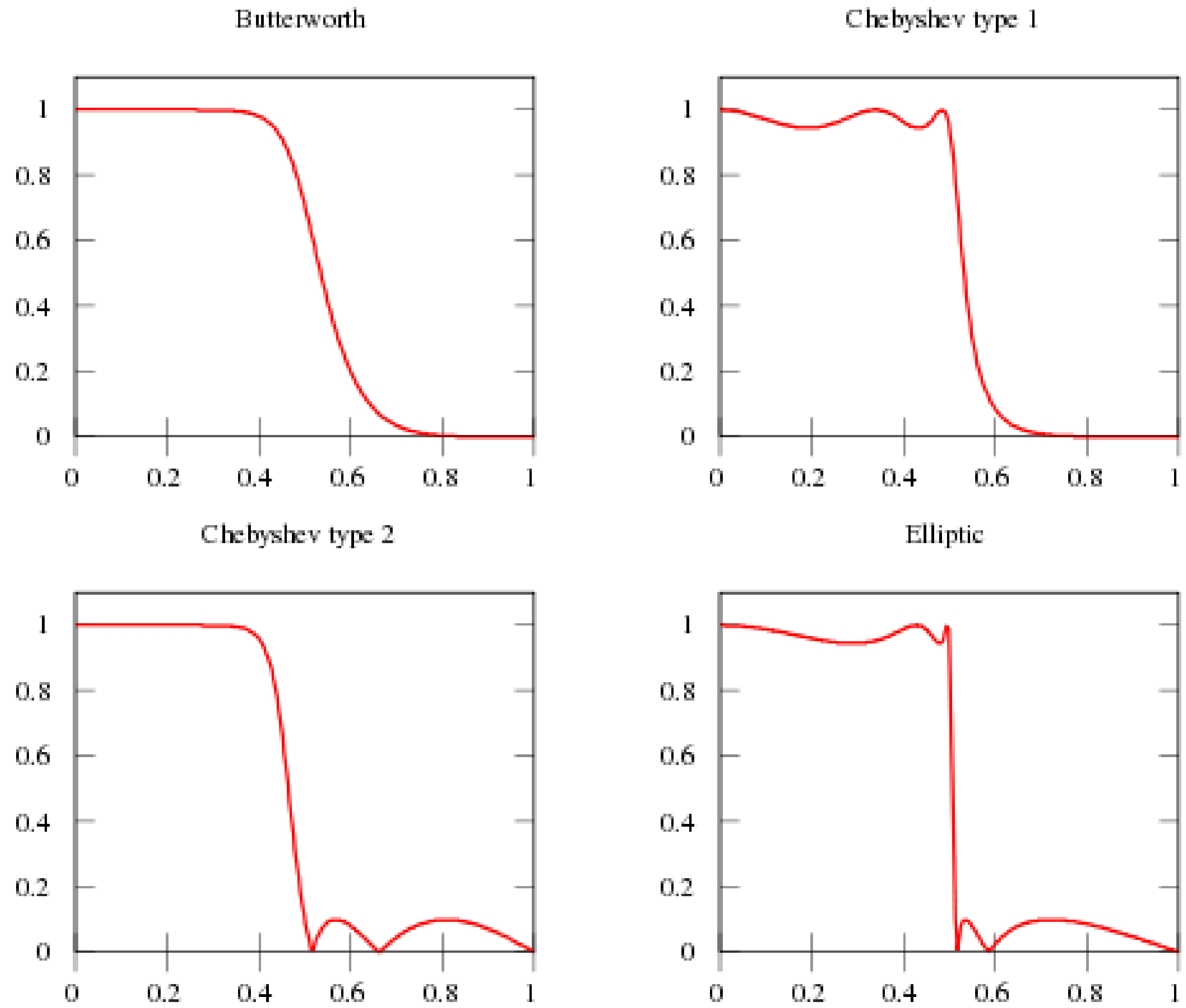
Filtros



os filtros de *Butterworth* minimizam o tempo de estabilização

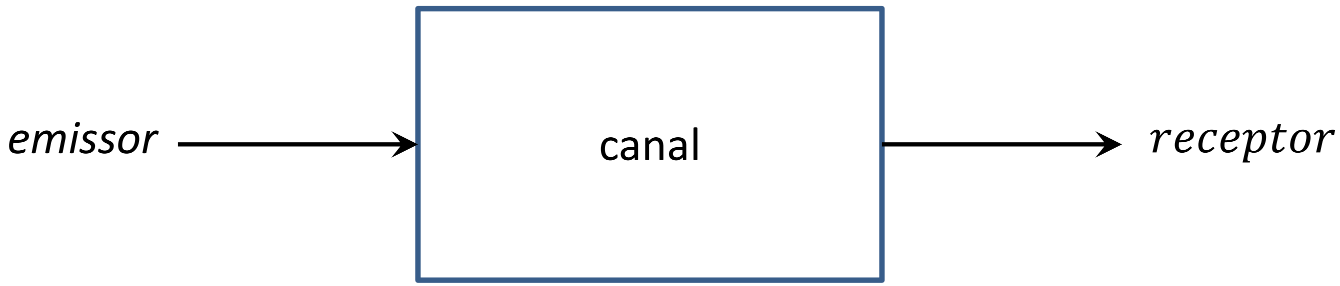
Filtro de Butterworth de 2ª ordem

Filtros



Filtros comuns: Butterworth, Chebyshev e elíptico

Sistemas de transmissão guiados e não guiados



- **Sistemas de transmissão guiados**
  - utiliza condutores para conduzir o sinal
  - as <u>características do meio</u> têm relevância
- **Sistemas de transmissão não-guiados**
  - sistemas sem fios
  - a largura de banda da <u>antena</u> tem relevância

Meio físico de transmissão de informação

- É o caminho físico ou canal entre o emissor e o receptor num sistema de transmissão de dados

- **Sistemas guiados**
  (cabos, linhas, guias, fibra)
  - Par trançado ou entrelaçado
  - Cabo coaxial
  - Guias de onda
  - Fibra óptica

- **Sistemas não-guiados**
  (ar, vazio, espaço livre)
  - Rádio
  - Satélite
  - (Tele)Móvel
  - Óptico

Meio físico e modos de transmissão

Sentido

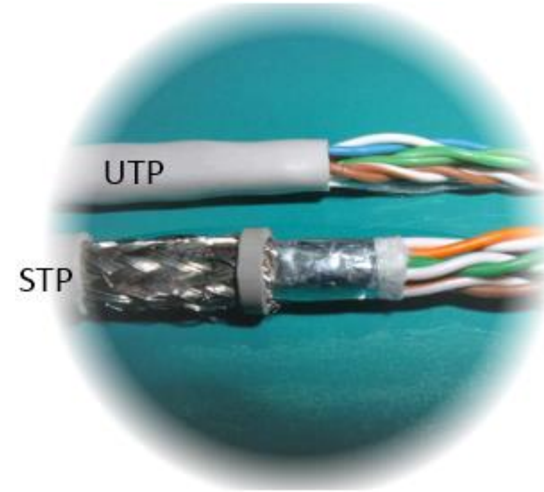
- Simplex (um só sentido) $\longrightarrow$
- Half duplex (dois sentidos, um de cada vez) $\rightleftarrows$
- Full duplex (dois sentidos em simultâneo) $\longleftrightarrow$

Saltos – tipo de ligação

- Linha de vista (direct link)
- Ponto a ponto
- Multi-ponto

Cabo trançado ou entrelaçado (twisted-pair)

- Um par (ou vários pares) de condutores entrançados
  - O entrançar reduz a interferência (dois condutores paralelos fazem uma antena simples, mas entrançados não)
- Usado para comunicações em edifícios (normalmente para redes de telefone)
- Disponíveis com e sem baínha
  - UTP - unshielded twisted pair
  - STP - shielded twisted pair
- Os cabos podem conter centenas de pares
  - Os pares vizinhos geralmente têm diferentes comprimentos de entrançamento (5-15 cm) para reduzir a interferência (crosstalk)
- Barato



Cabo coaxial

- Par de condutores separados por um material isolante
  - o conductor é geralmente um fio de cobre separado de uma bainha metálica por um material isolador

- A boa blindagem do sinal possibilita maiores distâncias e melhores velocidades de transmissão

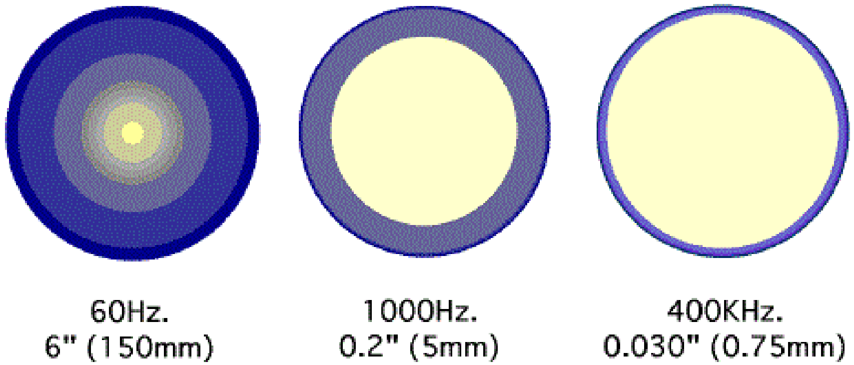
- Usado em televisão por cabo e para redes locais (tem vindo a ser substituído pela fibra óptica)
  - Os cabos de 50-ohm são usados em transmissão digital
  - Os cabos de 75-ohm são usados em transmissão analógica

Efeito pelicular (*skin effect*)

- **Definição**: é a tendência de uma corrente alternada se distribuir num condutor de modo que a densidade de corrente é maior junto à superfície, e decresce à medida que nos aproximamos do centro do condutor

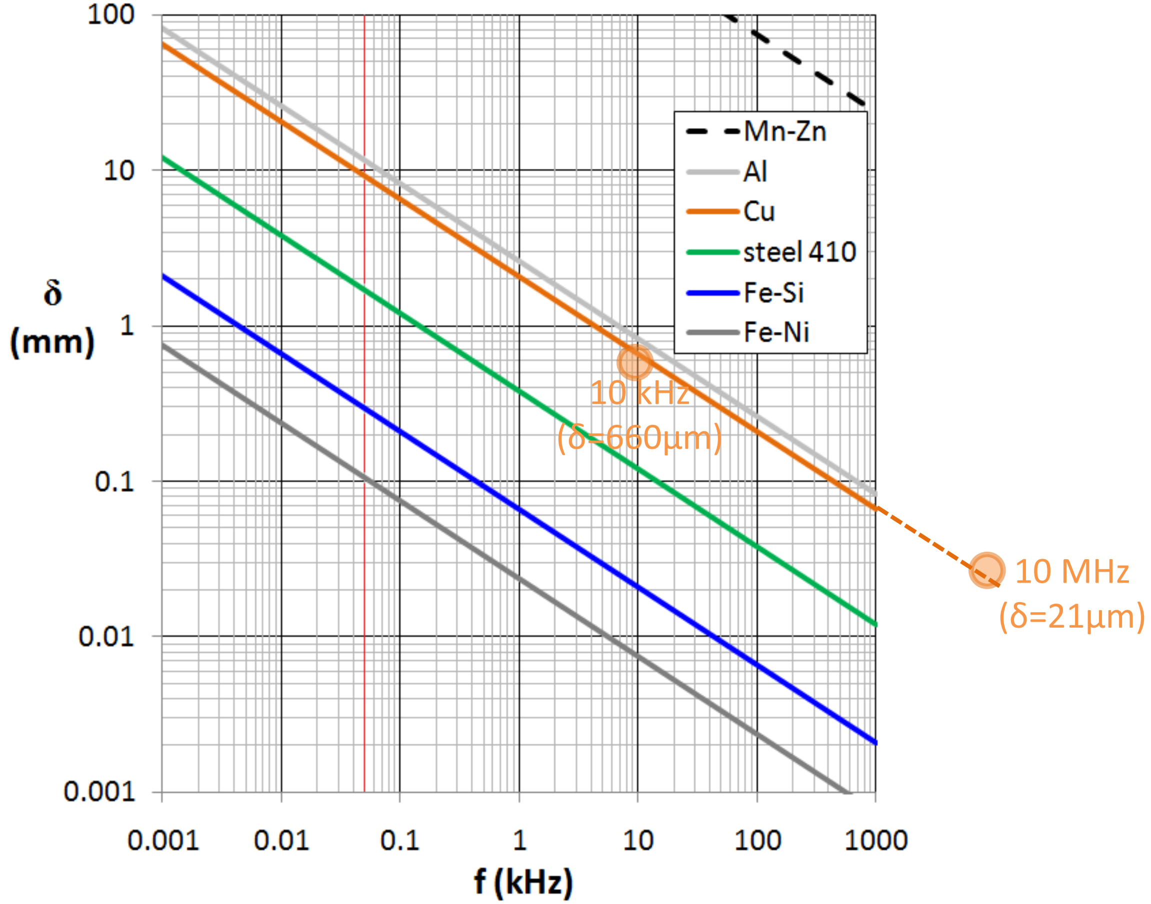
- A corrente flui maioritariamente na "pele" do condutor, entre a superfície e um nível interior denominado por distância pelicular (skin depth) δ

- O aumento da corrente e o aumento da frequência do sinal levam ao aumento da resistência eléctrica



  - (e.g.) Cobre, 10 kHz (δ=660µm); 10 MHz (δ=21µm)

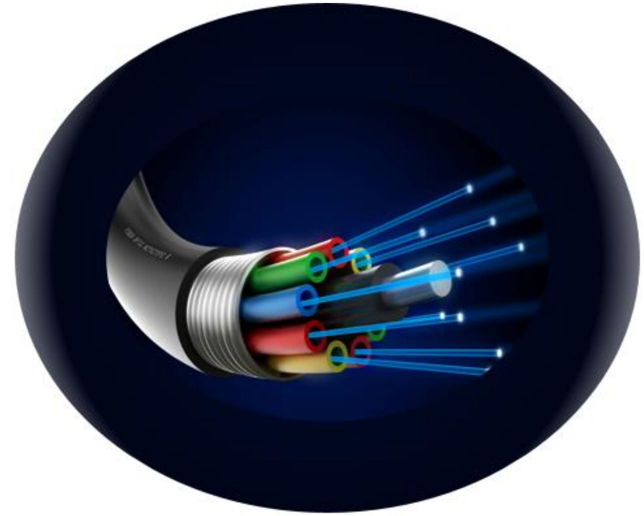
Efeito pelicular (*skin effect*)



- (e.g.) Cobre, 10 kHz (δ=660µm); 10 MHz (δ=21µm)

Fibra óptica

- Três componentes:
  - fonte de luz (led, laser)
  - sistema de transmissão
  - detector



- O detector converte a luz em impulsos eléctricos (on/off)
- Os raios de luz viajam em núcleos de vidro ou plástico
- Transmissão uni-modo ou multi-modo
- A luz com ângulos rasos propaga-se ao longo da fibra mas os raios com ângulos maiores são absorvidos pelo material que envolve a fibra
- Não são afetadas pelo campo electromagnético nem radiam energia (pelo que são muito seguras)

Índice de refracção [$\boldsymbol{n}$]

- **Definição**: relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz em determinado meio

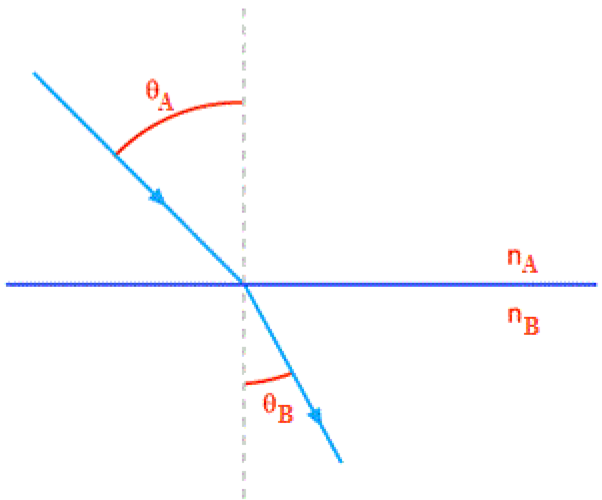
$$n_{(meio)} = {}^{v_{(vácuo)}}/_{v_{(meio)}} = {}^{c}/_{v_{(meio)}}$$

Lei de Snell-Descartes

- **Definição**: os senos dos ângulos de incidência e refracção são diretamente proporcionais às velocidades da onda nos respectivos meios

$$n_A \cdot sin\theta_A = n_B \cdot sin\theta_B$$

$$v_B \cdot sin\theta_A = v_A \cdot sin\theta_B$$



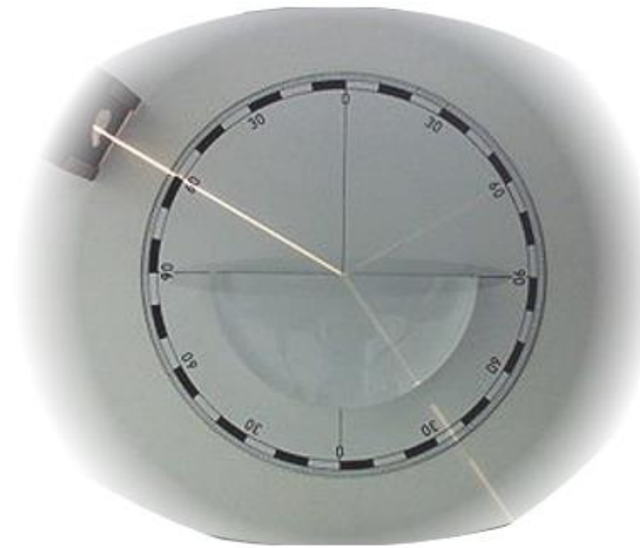
Índices de refracção

➢ <u>Valores de índices de refracção:</u>

- Vácuo: 1,0000
- Ar: 1,0003 (apróx. 20°C)
- Água: 1,3321 (pura, apróx. 20°C)
- Gelo: 1,3100
- Álcool: 1,3600
- Vidro: 1,5 a 1,9
- Acrílico: 1,49
- Glicerina: 1,47
- Quartzo: 1,54
- Zircônio: 1,92
- Diamante: 2,4200

Refracção e reflexão de um feixe de luz

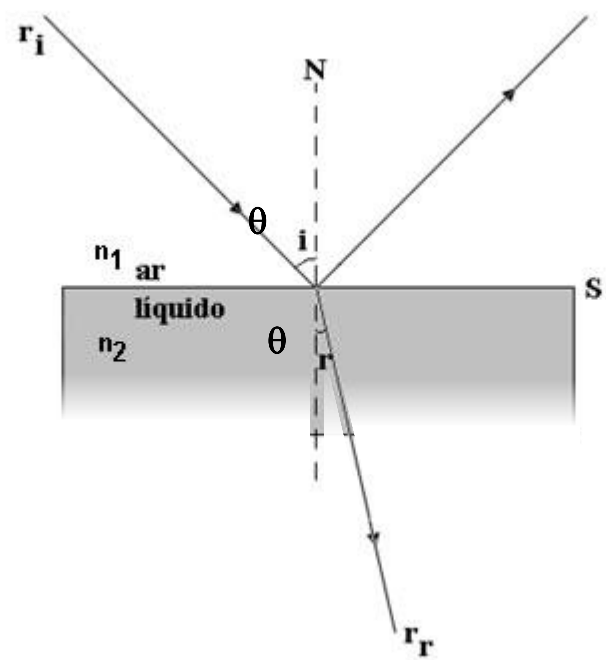
- Na transição entre dois meios o feixe incidente é <u>reflectido</u> e <u>refractado</u>



- O ângulo crítico de incidência $\boldsymbol{\theta_{crítico}}$ a partir do qual não há refracção é dado por:

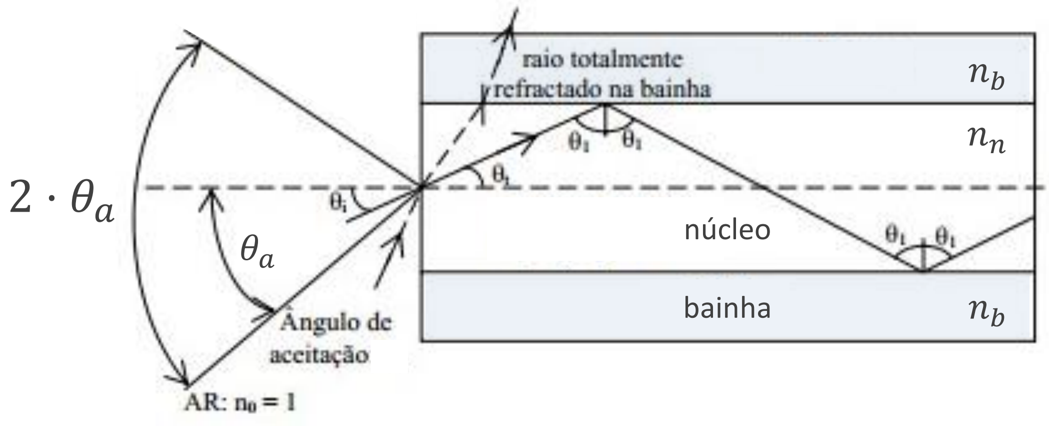
$$\theta_{crítico} = \arcsin\frac{n_r}{n_i}$$

(para ângulos de incidência superiores a $\theta_{crítico}$ o feixe é totalmente reflectido)



Propagação em fibra óptica

- O ângulo de aceitação θ_a define o <u>cone de aceitação</u>



- o ângulo máximo θ_a que permite a penetração na fibra e a transmissão sem refracção na bainha é dado por:

$$\theta_a = \arcsin \sqrt{n_n^2 - n_b^2}$$

Propriedades do meio

- O meio de transmissão afecta a energia do sinal
  - a resposta (amplitude e fase) do meio varia com a frequência ***H(s)***
  - a atenuação limita a distância
  - o meio pode introduzir ruído (maior relevância nos meios não-guiados)
- Largura de banda
  - quanto mais elevada, maior é a taxa de transmissão
- Velocidade de propagação
  - depende da constante dieléctrica (permitividade) do meio $\boldsymbol{\varepsilon}$
- Atenuação
  - depende da distância de propagação (ℓ : distância)
    - guiado: $10^{\alpha\ell}$ (α depende da frequência)
    - não-guiado: ℓ^n (n=1, espaço livre; n=2, com obstáculos)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Velocidade de propagação [$\boldsymbol{v}$]

- **Definição**: É a velocidade $\boldsymbol{v}$ a que uma onda electromagnética se propaga num determinado meio (e.g. cabo coaxial) é dada por:

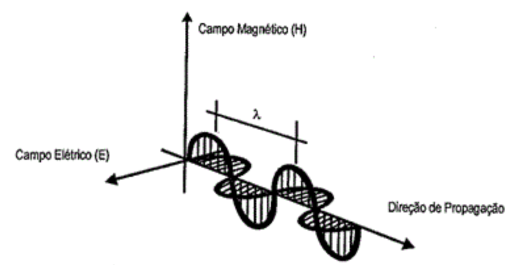
$$v = c \cdot v_F \qquad\qquad v = \lambda \cdot f$$

$$v_{TEM}^{(dieléctrico)} = c_{TEM}^{(vácuo)} \Big/ \sqrt{\varepsilon_r} \qquad\qquad n = c_{TEM}^{(vácuo)} \Big/ v_{TEM}^{(dieléctrico)}$$

- Factor de velocidade ($\boldsymbol{v_F}$):
percentagem da velocidade da luz em espaço livre

$$v_F = 1/n = 1/\sqrt{\varepsilon_r} = 1/c\sqrt{LC}$$

  - 85% é um valor típico para cabos coaxiais com dieléctrico de espuma



TEM (**T**ransverse **E**lectro**M**agnetic):
Configuração do campo electromagnético quando os campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ são perpendiculares à direção de propagação

Transmissão guiada (atenuação)

Meio	Freq. (Hz)	Perdas dB/km
Par de fios	1 k	0.05
Par entrançado (16 gauge)	10 k 300 k	2 6
Coaxial (1 cm diâmetro)	100 k 3 M	1 4
Fibra	2.4 10^{14}	0.5

$$P_{out} = 10^{-\left(\frac{\alpha \cdot l}{10}\right)} \cdot P_{in} \qquad P_{dBm}^{(out)} = P_{dBm}^{(in)} - L_{dB} \qquad L_{dB} = \alpha \cdot l$$

Distância [km]

Coeficiente de atenuação [dB/km]

Transmissão guiada ponto-a-ponto

Tipo	Ritmo de Tx.	Largura banda	Repetidor
Entrançado	4 Mb/s	3 MHz	2-5 km
Coaxial	500 Mb/s	350 MHz	1-10 km
Fibra	2 Gb/s	2 GHz	10-100 km

$$P_{[dBm]} = 10 \cdot log_{10} \frac{P_{[W]}}{1mW} \quad \xleftrightarrow{P_{[dBm]} \leftrightarrow P_{[W]}} \quad P_{[W]} = 1mW \cdot 10^{\frac{P_{[dBm]}}{10}}$$

$$G_{[dB]} = 10 \cdot log_{10}\ G \quad \xleftrightarrow{G_{[dB]} \leftrightarrow G} \quad G = 10^{\frac{G_{[dB]}}{10}}$$

Limite teórico para a capacidade do canal

- As características e a qualidade da transmissão dependem do <u>meio físico</u> e do <u>sinal</u>

- Os parâmetros mais importantes são:
  - Ritmo de transmissão
  - Largura de banda
  - Relação sinal/ruído (S/N)
  - Distância

- Teorema da **capacidade do canal** (lei de Shannon-Hartley)

$$C = B \cdot log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

Claude Shannon 1948

C : Capacidade do canal (bits/s)
B : Largura de banda (Hz)
S/N : Relação sinal ruído (ganho linear, não em dB)

Linhas de transmissão

- Geralmente o comprimento dos fios pode ser ignorado $\lambda \gg d$
(i.e. a tensão num dado ponto do fio é igual à tensão em todo o fio)

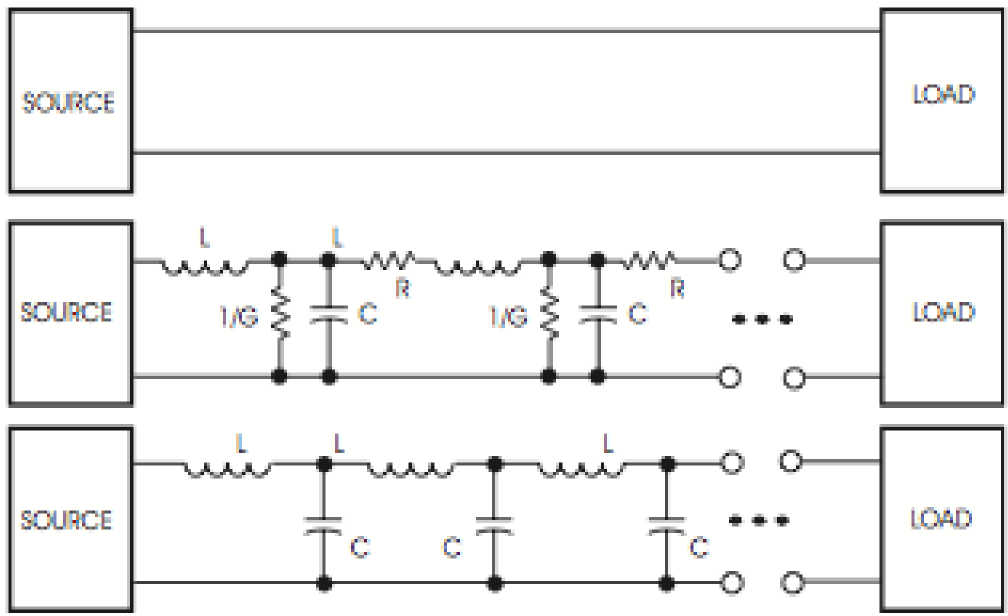
… mas, quando o sinal varia a alta frequência (ou o fio é muito longo) temos que $\lambda \ll$ pelo que devemos considerar modelos de propagação em linha de transmissão

$$v = \lambda \cdot f \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = v \,/\, f \qquad\qquad d > \lambda/10$$

Exemplo: Um par entrançado é uma linha de transmissão quando o seu comprimento é comparável ao comprimento de onda λ do sinal (superior a um décimo de λ)

Linhas de transmissão

- Modelo: A linha é modelada por troços de condensadores e bobines infinitesimais com capacidades ***C*** e indutâncias ***L*** definidas por unidade de comprimento (*F/m* e *H/m*)



- este modelo pode incluir perdas (modeladas por *R* e *1/G*)

Parâmetros:
R e *L* do condutor real
C é a capacidade entre os dois condutores
G modela as correntes de fuga

Linhas de transmissão

➢ Exemplo de transmissão

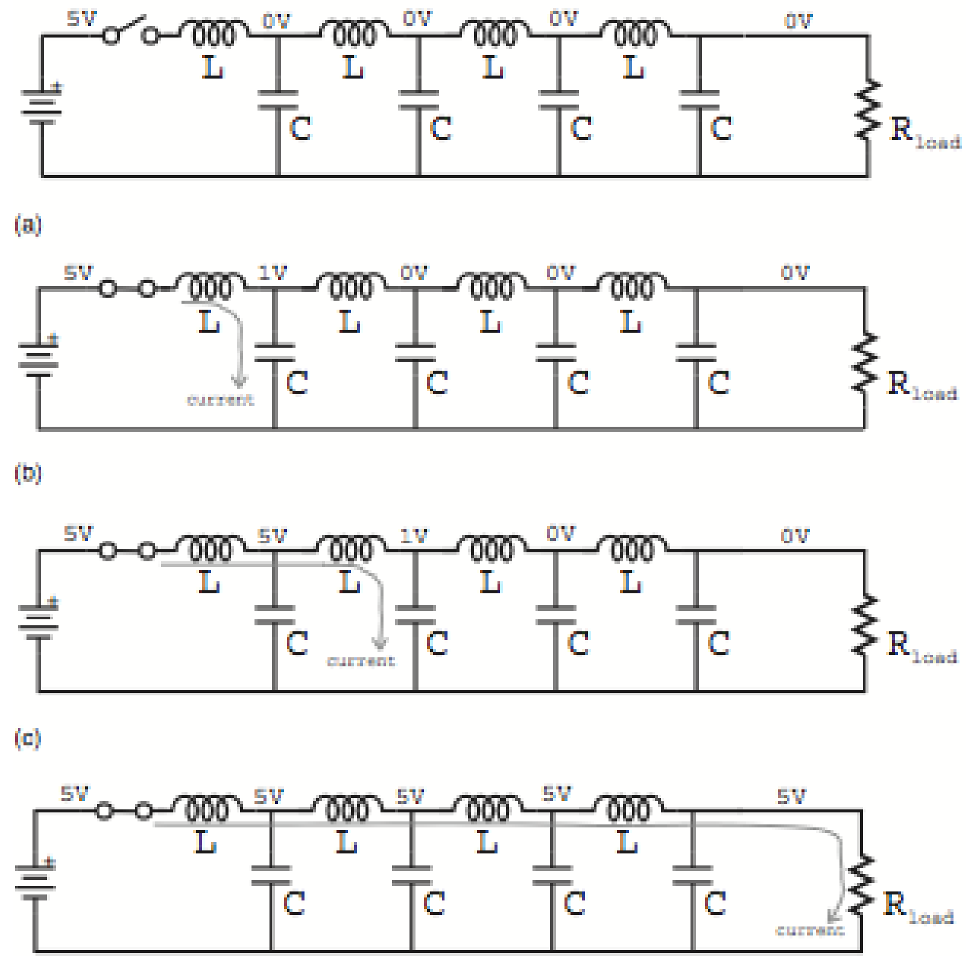
Uma pilha de 5V liga à carga R_{load} por uma linha de transmissão

(a) quando o interruptor fecha a corrente flui para a linha de transmissão mas não atinge a carga. Inicia-se a carga do 1º condensador

(b) à medida que o primeiro estágio carrega completamente a corrente flui para o segundo estágio

(c) depois de todos os estágios carregarem é que a corrente atinge a carga. Este tempo designa-se:

τ - <u>atraso de propagação da linha</u>

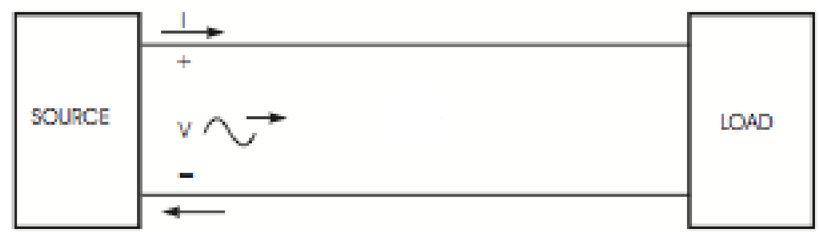


$$\tau = d / v$$

Impedância característica da linha [Z_0]

- A impedância Z_o vista pela fonte depende apenas dos parâmetros C e L e designa-se por impedância característica da linha

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\,; \qquad Z_0^{(perdas)} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

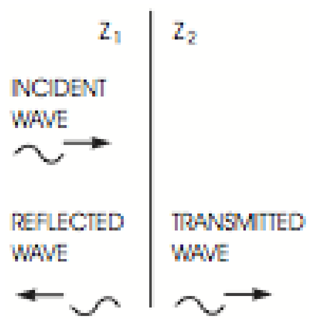


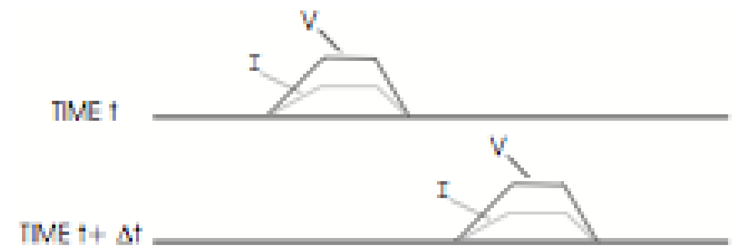
$$Z_0 \cong \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln\left(\frac{D}{d}\right)$$

Cabo coaxial:
d – diâmetro do condutor interior
D – diâmetro interno do condutor exterior

Coeficientes de reflexão $[\ \rho_v , \Gamma_v\ ]$

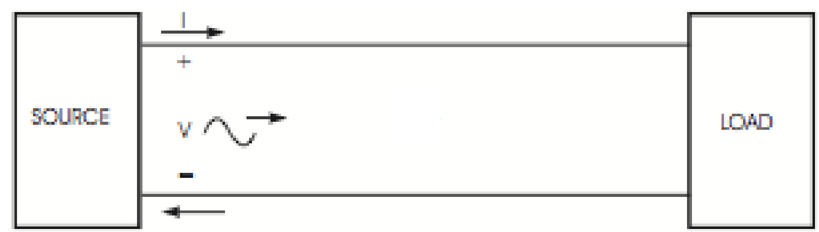
- As reflexões ocorrem nas fronteiras da linha e definem-se para a <u>onda reflectida</u> ρ_v e para <u>onda transmitida</u> Γ_v





$$\rho_v = \frac{V_{ref}}{V_{inc}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\Gamma_v = \frac{V_{tra}}{V_{inc}} = 1 + \rho_v$$



<u>Exemplo</u>:
Para um factor de velocidade $v_F = 0.7$
a onda viaja a uma velocidade de 210×10^6 m/s
ou seja, demora 4.76ns para viajar 1 metro

Linha não-adaptada (reflexões)

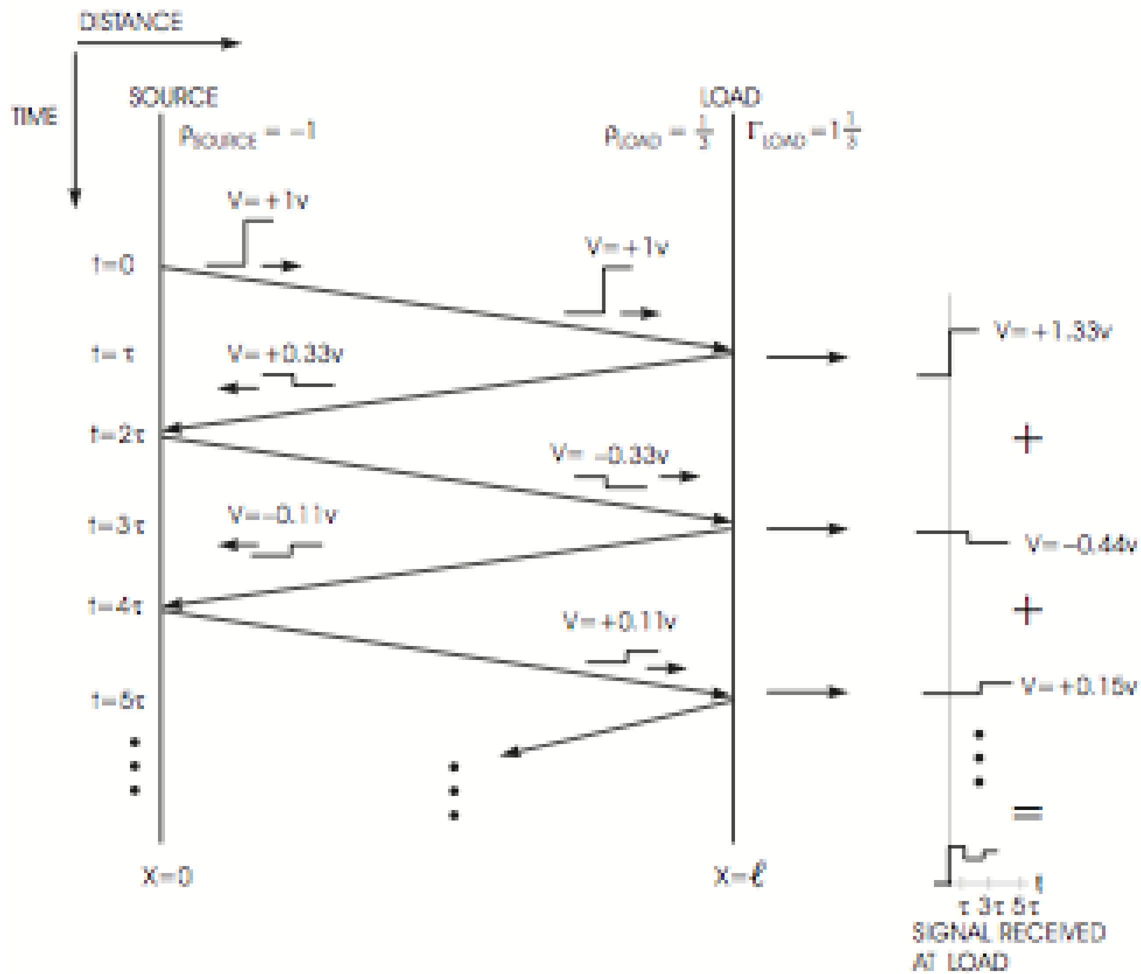
- Exemplo

A fonte produz um degrau de 1V

Ao fim de τ segundos esta onda atinge a carga

Como a impedância do cabo é diferente da impedância da carga, parte da onda é refletida, e parte é transmitida

O efeito final é que a carga recebe uma onda que é a sobreposição da onda incidente original com todas as outras ondas subsequentes



$$\rho_v = \frac{V_{ref}}{V_{inc}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

$$\Gamma_v = \frac{V_{tra}}{V_{inc}} = 1 + \rho_v$$

Linha não-adaptada (reflexões)

➢ Exemplo

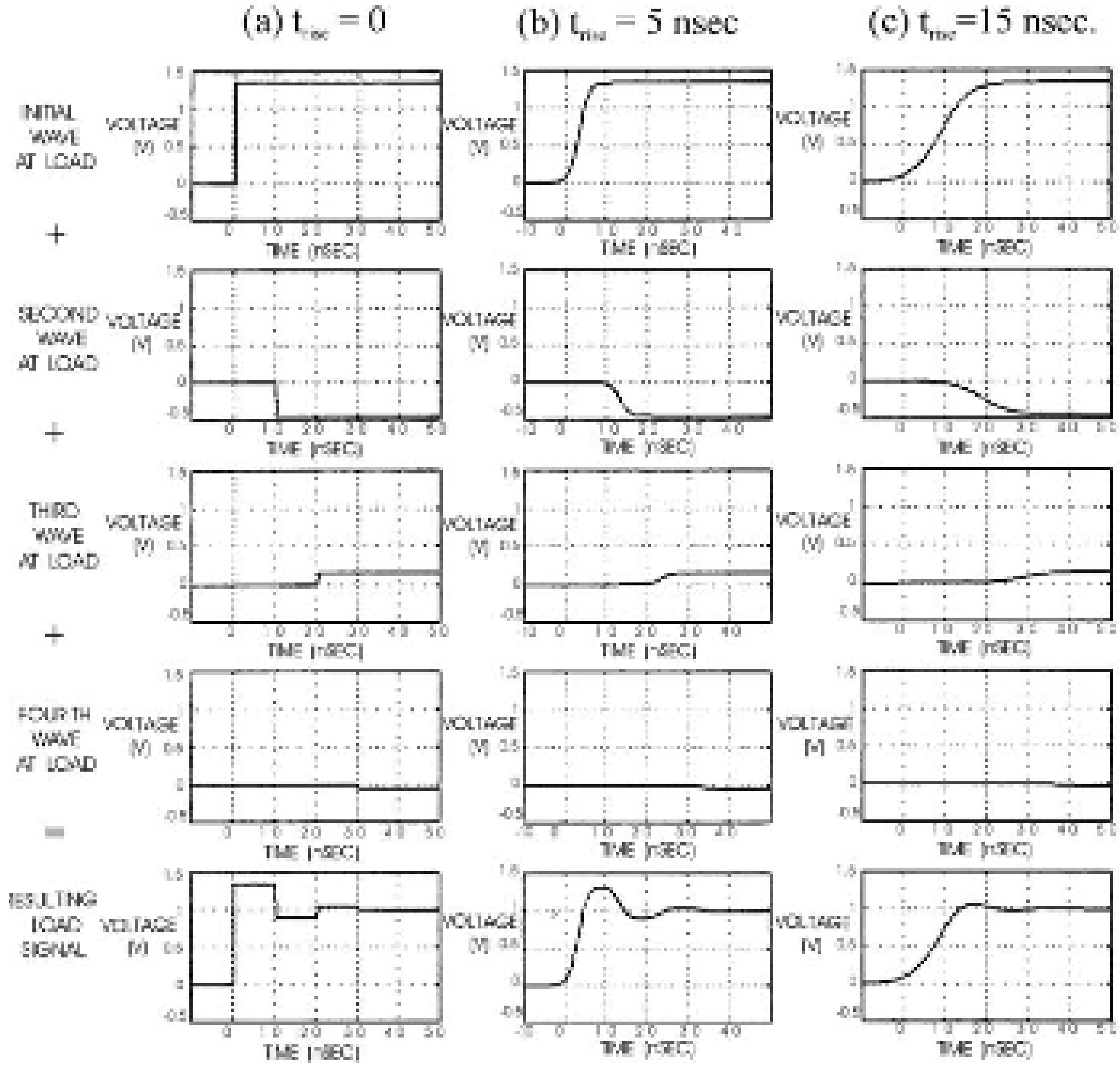
Ondas reais têm tempos de subida (t_{rise}) superiores a zero

Atraso da linha: $\tau = 5\ ns$

(a) $t_{rise} = 0$
(b) $t_{rise} \approx \tau$
(c) $t_{rise} > \tau$

A amplitude das reflexões não depende do tempo de subida t_{rise} afeta apenas a forma da sobreposição das ondas

Se $t_{rise} > 6\tau$ estamos na condição de baixas frequências



$$\rho_v = \frac{V_{ref}}{V_{inc}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

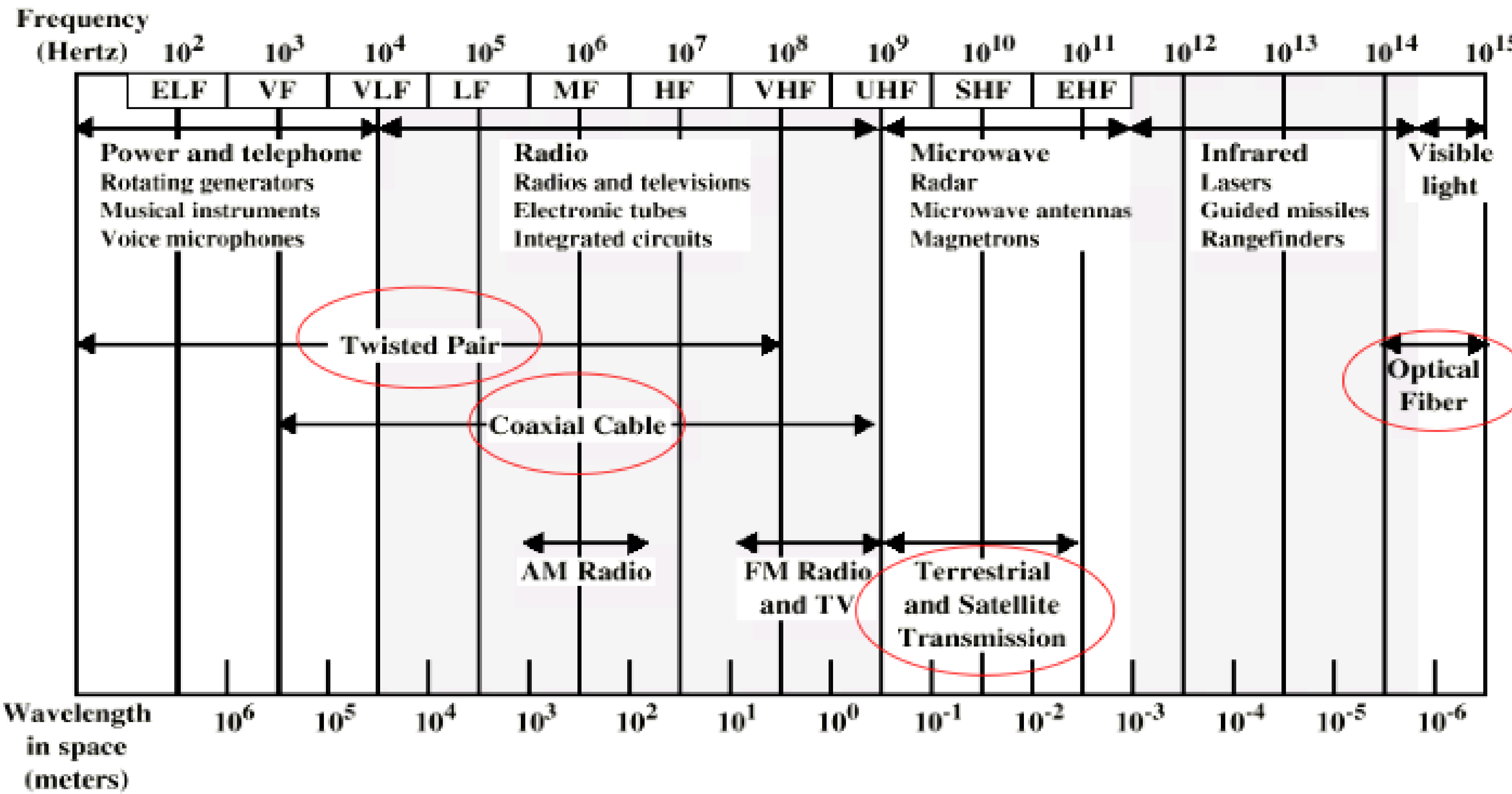
$$\Gamma_v = \frac{V_{tra}}{V_{inc}} = 1 + \rho_v$$

Sistemas de transmissão não-guiada

- **Sistemas não-guiados**
  (propagação em espaço livre)

  - Rádio
  - Satélite
  - (Tele)Móvel
  - Óptico

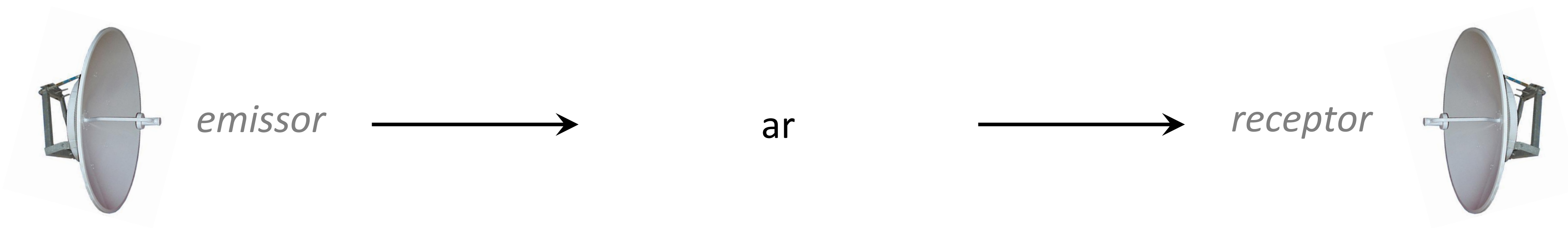
Espectro electromagnético



Mapa de ocupação do espectro electromagnético

$$c = \lambda \cdot f \approx 3 \cdot 10^8 m/s$$

Sistemas de transmissão rádio



- **Sistemas de transmissão não-guiados**
  - sistemas de transmissão sem fios
  - as características das antenas têm relevância
  - atenuação devido à propagação em espaço livre

Orçamento de potência

$G_{dB}^{(trans)}$ $L_{dB}^{(ar)}$ $G_{dB}^{(recep)}$

emissor → ar → receptor

$P_{dBm}^{(in)}$ $P_{dBm}^{(out)}$

$$P_{dBm}^{(out)} = P_{dBm}^{(in)} + G_{dB} - L_{dB}$$

- Num sistema em linha de vista a principal fonte de **atenuação** da potência do sinal é devida à propagação **em espaço livre** (*free-space path-loss*, ***PL*** – path loss)

$$PL_{dB} = L_{dB}^{(ar)}$$

Orçamento de potência

- Num sistema de telecomunicações (guiado ou não-guiado) o orçamento de potência permite considerar todos os **ganhos** G_{dB} e **perdas** L_{dB} desde o transmissor, passando pelo meio, até ao receptor

$$P_{dBm}^{(out)} = P_{dBm}^{(in)} + G_{dB} - L_{dB}$$

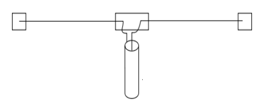
- **Outras** perdas podem advir de **obstáculos, atenuação do cabo** ou dos **conectores** de ligação.
- Os ganhos podem resultar dos **ganhos das antenas** (tanto de transmissão como de recepção) ou de **repetidores/amplificadores**

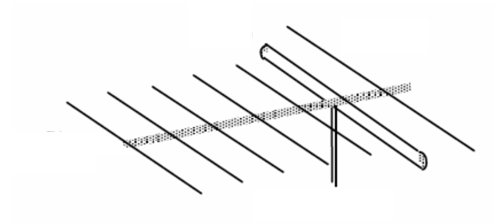
Antenas

- São dispositivos que convertem potência eléctrica em ondas electromagnéticas (e vice-versa)

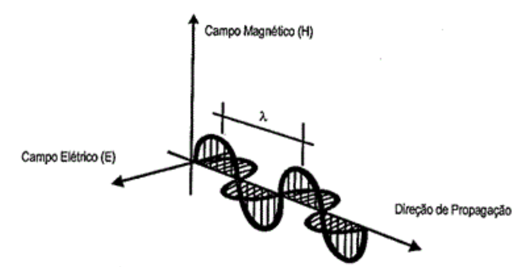
  - parabólicas

  - dipolos e agregados





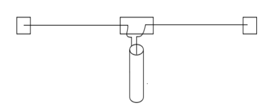
- Um transmissor força uma **corrente AC** na antena provocando um **campo magnético** oscilante. A carga em movimento provoca um campo eléctrico oscilante, estes campos **produzem uma onda** electromagnética (TEM) que **radia em espaço livre**

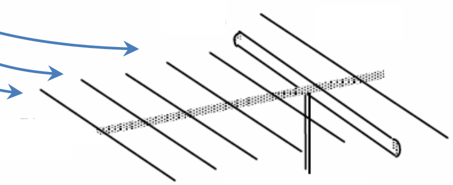


Antenas

- parabólicas

- dipolos e agregados



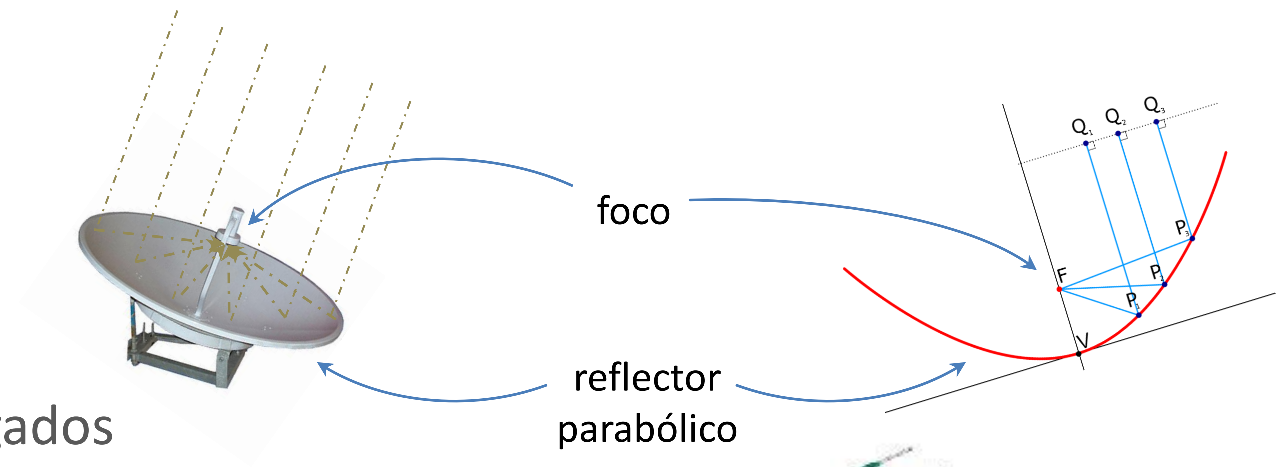


➢ as antenas podem incluir elementos directores ou reflectores tais como cornetas, elementos **reflectores** ou **reflector parabólico** de forma a obter um <u>padrão de radiação mais direccional</u>

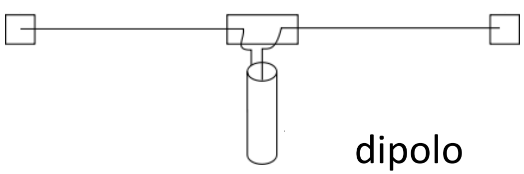
Antenas

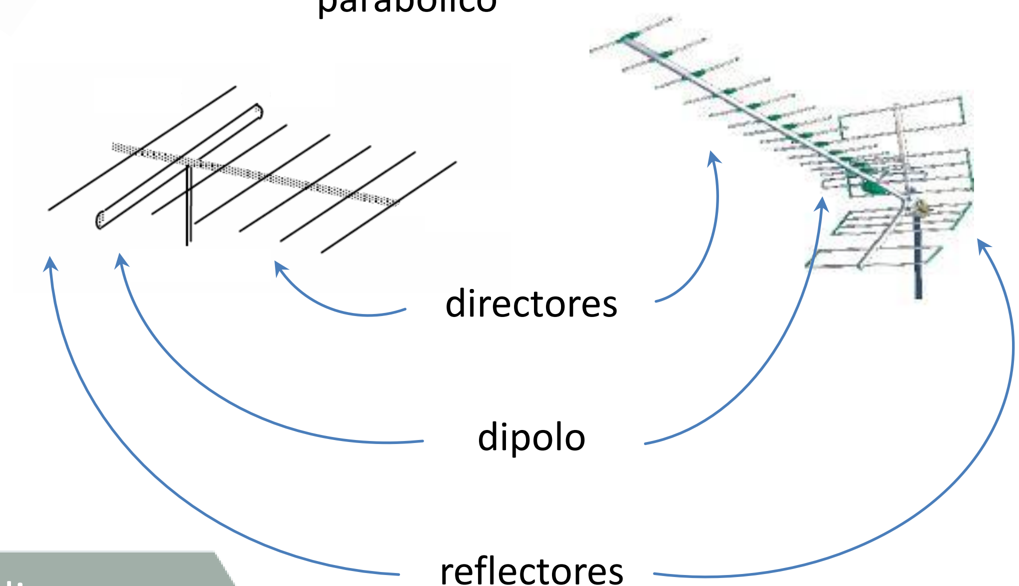
➢ Elementos de uma antena:

- parabólicas



- dipolos e agregados





Padrão de radiação

... antena pode ser:

- **Omnidirecional** ou **isotrópica**
  ... se radiar (ou receber) o mesmo valor em todas as direções
  (simetria em relação ao centro)

- **Direccional**
  ... se radiar (ou receber) preferencialmente numa direção
  (e.g. simetria axial)

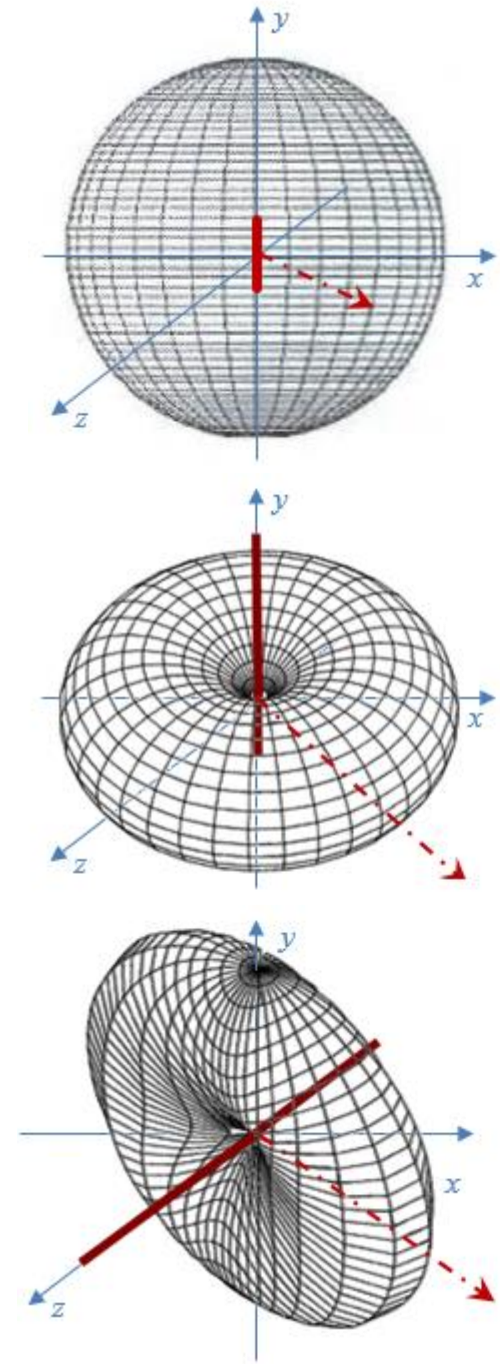


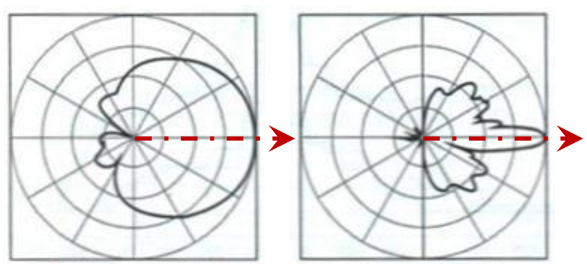
Diagrama de radiação

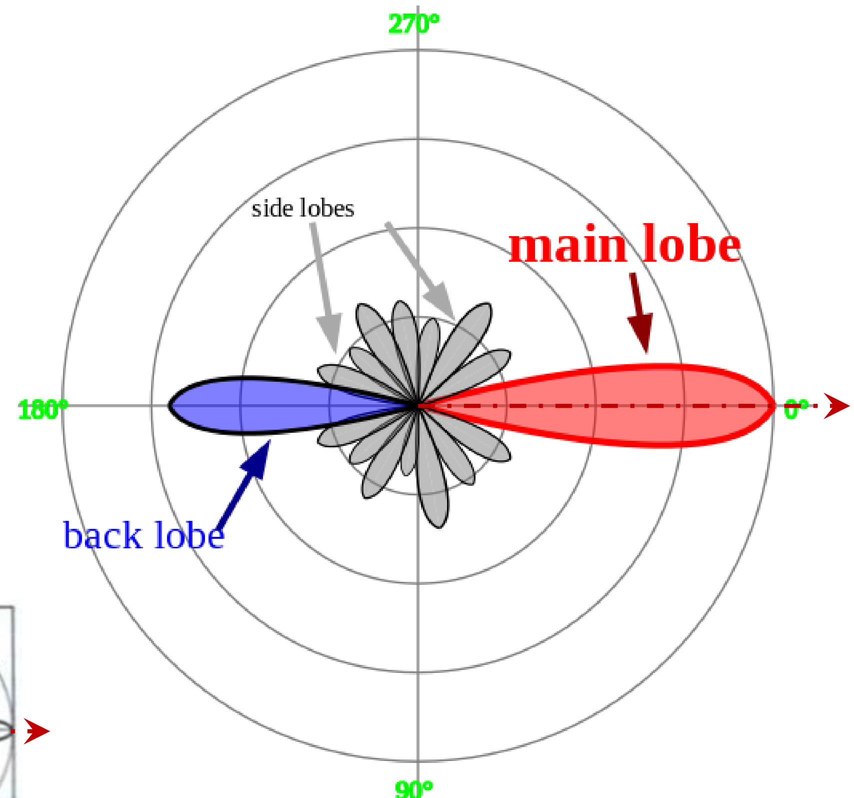
- **Padrão de radiação** é uma figura que representa a força relativa da radiação emitida pela antena

- Geralmente apresenta máximos em determinadas direcções (**lóbulos**) e mínimos (nulos) noutras

  - o lóbulo principal é o maior dos lóbulos e é nessa direção que se calcula o **ganho da antena** G

  - exemplos:





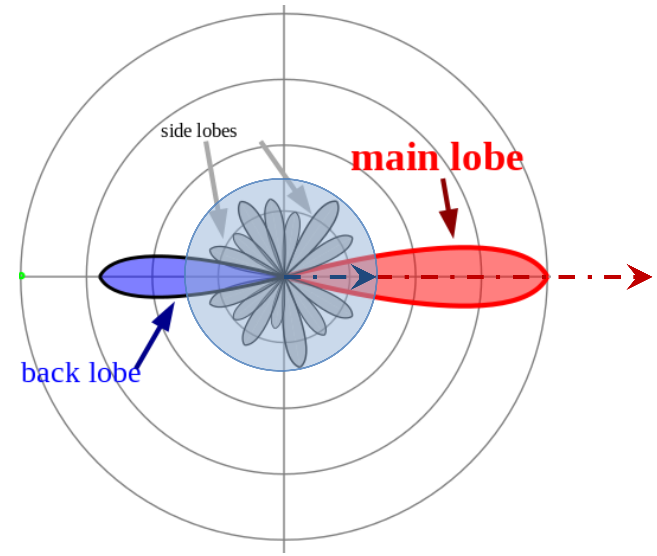
Ganho da antena [G]

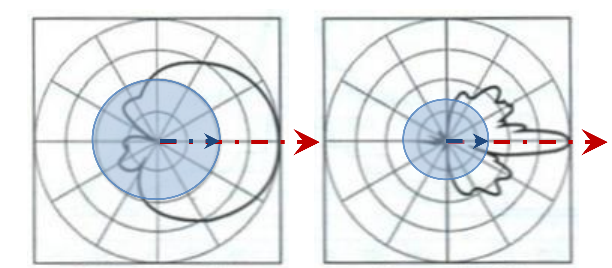
- O Ganho G é a razão entre a **intensidade de radiação** $[W/m^2]$ (na direcção máxima) e a intensidade de radiação $[W/m^2]$ de uma antena isotrópica equivalente (no mesmo ponto)

$$G_{dBi} = 10 \cdot \log_{10}(G)$$

- pode ser medido em *dBi* (refere-se à antena isotrópica) ou, em *dBd* se a referência for um dipolo

(<u>nota</u>: *0 dBd = 2.15 dBi*)



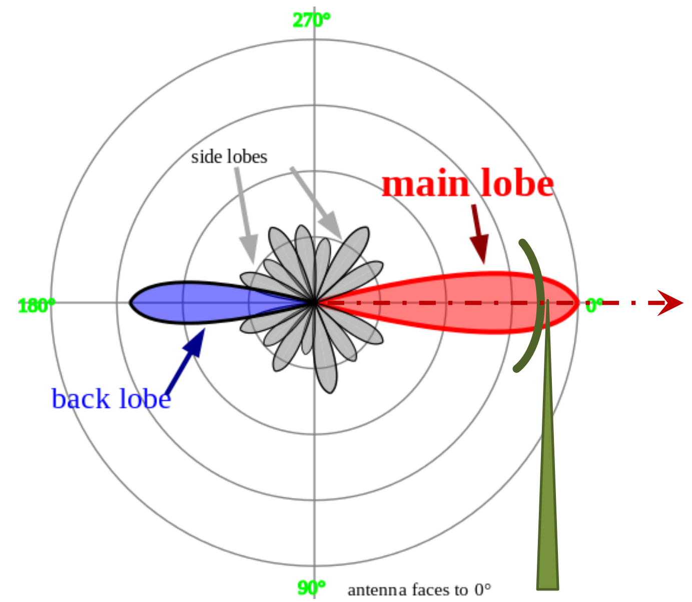


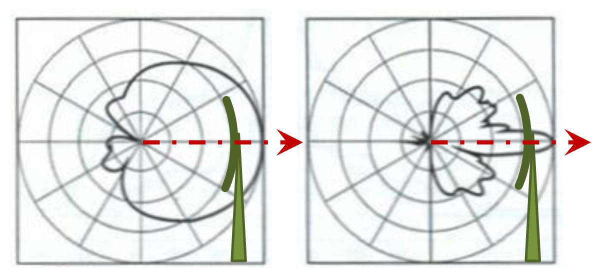
Abertura (ou área efectiva) [A_{ef}]

- **Abertura ou área efectiva** A_{ef} indica a porção de potência de uma onda electromagnética que a antena entrega aos seus terminais, expressa em função de uma área equivalente

$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G$$

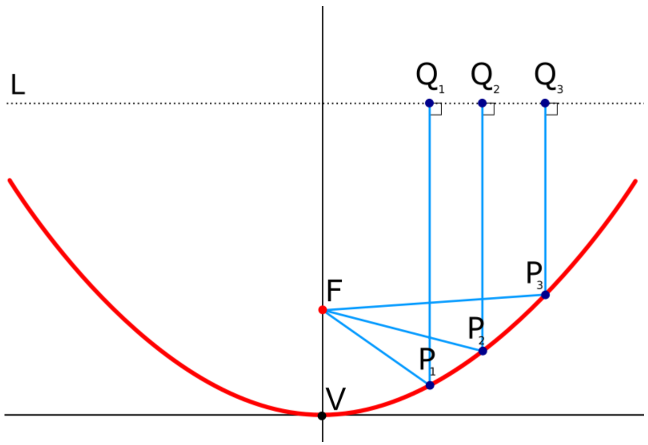
- exemplo: se uma onda passar num dado local com um fluxo de $1pW/m^2$ e uma antena nesse local tiver uma abertura de $12m^2$,então ela entrega aos terminais $12pW$ de potência RF ($30\mu V$ @ $75\ ohm$)





Antenas parabólicas

- usam um refletor de secção parabólica para orientar as ondas na direcção do receptor (foco)



- Área efectiva (abertura) $$A_{ef} = \pi r^2$$
- Ganho $$G = \frac{4\pi(\pi r^2)}{\lambda^2}$$

Antenas parabólicas:
r – raio da antena
πr^2 – área efectiva da antena

Antenas

... relação entre área efectiva e ganho de uma antena

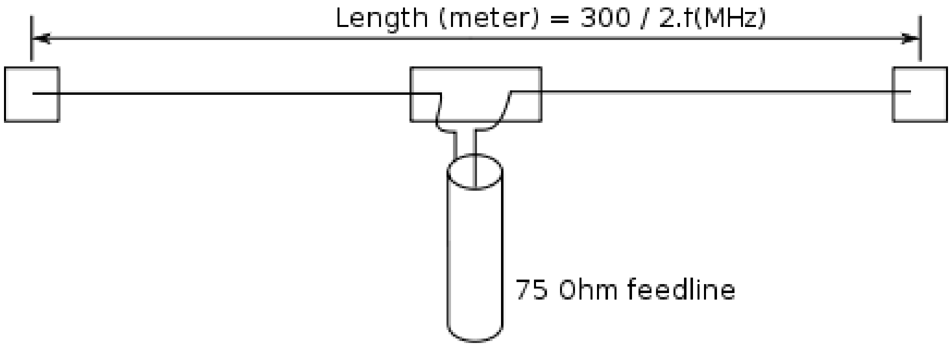
$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \qquad \text{em que} \qquad \lambda = c/f$$

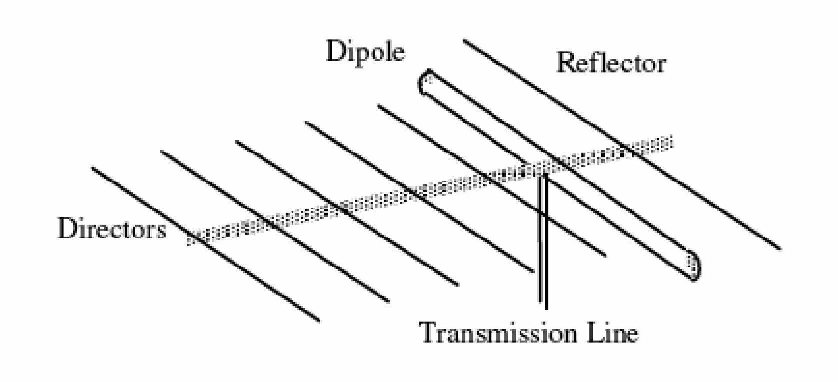
- conversão entre unidades de ganho de antenas (*dBi*, *dBd*)

$$G_{dBi} = 10 \cdot \log_{10}(G)$$

$$G_{dBd} = G_{dBi} - 2.15 \qquad \Leftarrow \qquad G_{dBd} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{G}{1.64}\right)$$

Dipolos e agregados

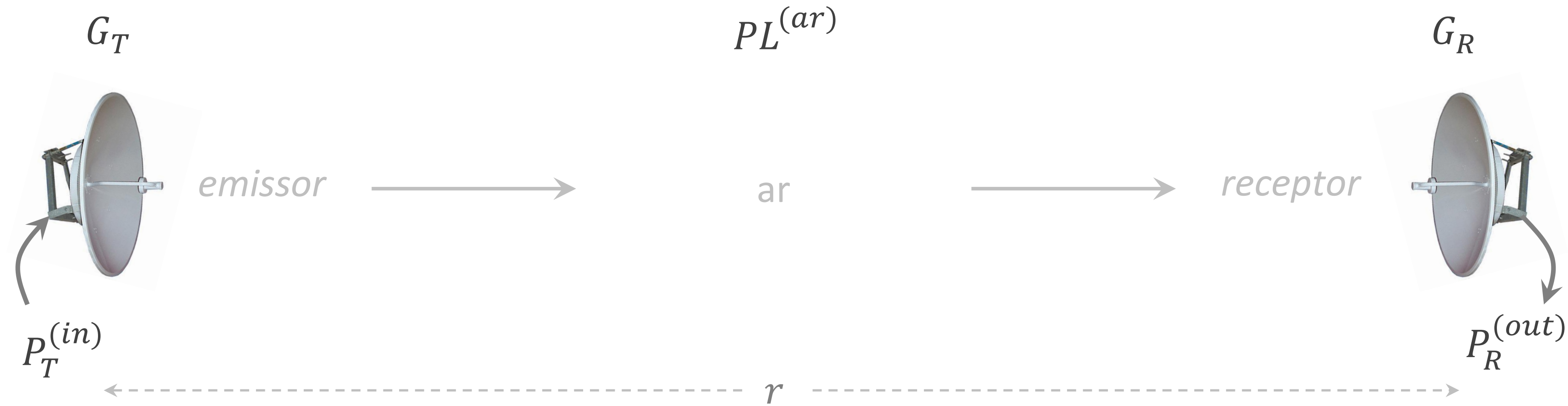




Sobre um plano de massa, uma antena de um quarto de onda tem um ganho duas vezes maior (+3dB) que um dipolo de meio comprimento de onda (ou 5.19dBi), e uma resistência de radiação de 36.8Ω.

O comprimento elétrico da antena pode ser reduzido com uma indutância ligada em série (por vezes enrolada em hélice)

Equação de Friis



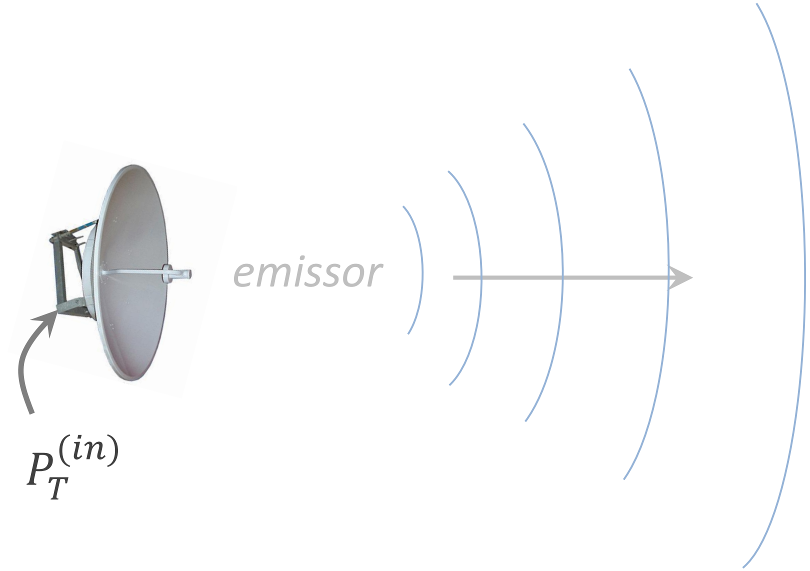
$$\frac{P_R}{P_T} = G_T\ G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{P_R}{P_T} = \frac{A_{ef}^{(T)}\ A_{ef}^{(R)}}{\lambda^2 r^2}$$

- Dada uma antena que transmite uma potência P_T, a potência P_R recebida pela antena receptora é proporcional ao produto das aberturas de ambas as antenas (à distância r)

G_R , G_T – ganhos das antenas

$A_{ef}^{(T)}$, $A_{ef}^{(R)}$ – áreas efectivas das antenas

PL - Atenuação em espaço livre



$$S = P_T \frac{1}{4\pi r^2}$$

Incorpora dois efeitos:

- Espalhamento da energia electromagnética em espaço livre devida à dispersão esférica (inverse square law)

$$P_R = S \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

- Influência da abertura da antena na potência recebida

$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

$$PL = \frac{P_T}{P_R} = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2$$

➢ As perdas por propagação correspondem à perda da força de sinal (de uma onda electromagnética) resultante da propagação em linha de vista (sem obstáculos) e em espaço livre

S – densidade especial de potência [W/m^2]
r – distância ao emissor