

**iscte**

INSTITUTO  
UNIVERSITÁRIO  
DE LISBOA

**U LISBOA**

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA

---

## **Calibração do Modelo de *Jarrow & Yildirim* (2003) para a determinação do preço das obrigações *TIPS***

Ana Marisa Silva Sousa

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:

Professor Doutor João Pedro Vidal Nunes, Professor Catedrático,  
ISCTE-IUL

Outubro, 2023

---

Departamento de Finanças (IBS)  
Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da  
Universidade de Lisboa

**Calibração do Modelo de *Jarrow & Yildirim* (2003) para a  
determinação do preço das obrigações *TIPS***

Ana Marisa Silva Sousa

Mestrado em Matemática Financeira

Orientador:  
Professor Doutor João Pedro Vidal Nunes, Professor Catedrático,  
ISCTE-IUL

Outubro, 2023

*Para os Pais e Irmão.*



## Agradecimento

*Somos um aglomerado de informação que se perde, mas que não deixa de nos moldar.  
Somos moldados por coisas de que já nem nos lembramos.  
Patrícia Ribeiro, Os Homens Nunca Saberão Nada Disto*

Valorizar a importância das pessoas que nos apoiam e nos inspiram ao longo da nossa vida é imprescindível.

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, ao Professor Doutor João Pedro Nunes, pela sua inspiração, pela partilha de conhecimento, pela compreensão e constante disponibilidade ao longo da dissertação.

À minha colega de Mestrado Beatriz B. pela motivação contínua, pelo companheirismo e pela partilha de apontamentos.

À minha colega de Faculdade Rita G. pelo seu apoio emocional e partilha de ideias.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram e motivaram, sobretudo nos momentos menos bons. Em especial à Soraia, ao João, à Adriana, ao Pedro, à Daniela S., por serem um apoio inabalável e por estarem sempre ao meu lado .

E também à Luana, à Lili, ao Bruno, ao Ângelo, à Bia, à Diana, à Eduarda, à Patrícia, à Beatriz S., à Amanda , à Cíntia, e à Daniela Mat., pela partilha de momentos incríveis e por tornarem esta jornada mais leve.

Sem esquecer da minha companheira de percurso académico, a Daniela Mor., sem a qual a minha experiência nestes anos não teria sido a mesma.

E em especial à Catarina, à minha amiga de infância, pela sua calma, pelos conselhos, e pela sua dedicação e apoio no meu sucesso.

Em último lugar, quero agradecer à minha família. Não poderia deixar de agradecer aos meus Avós, pela partilha das suas experiências de vida, por me educarem e por terem estado sempre dispostos a cuidar de mim.

Ao meu Pai, por me fazer ver o mundo de uma forma menos complexa e dar importância às coisas mais simples da vida.

À minha Mãe, o maior pilar da minha vida, a quem recorro nos momentos mais difíceis, a quem devo o que sou e o que conquistei.

Ao meu Irmão, ao Marcos, por me lembrar que existe sempre uma solução, pela sua paciência e tranquilidade, por me ajudar a tornar numa pessoa melhor.



## Resumo

Este trabalho aplica o modelo proposto por (Jarrow & Yildirim, 2003) para a determinação do preço das obrigações *TIPS*. Este modelo considera uma abordagem Gaussiana para as taxas de juro *forward* reais e nominais e a extensão do modelo *Vasicek* (1977) para descrever a dinâmica das mesmas; e assume um movimento geométrico Browniano para o índice de inflação. O objetivo principal é avaliar o desempenho do modelo proposto por Jarrow & Yildirim (2003) para a estimação dos preços das obrigações *TIPS*. A fórmula que sugerimos para o cálculo do *fair value* das obrigações *TIPS* é muito semelhante à obtida pelos autores. A principal contribuição deste trabalho, relativamente ao modelo original, é caracterizada pelo uso das cotações fixas dos *swaps* de inflação e pela inclusão da hipótese de deflação durante o período ativo da obrigação. A instabilidade atual nos mercados financeiros e o aumento previsível da mesma, motiva a consideração de todos os cenários de evolução de preços possíveis. Nos mercados financeiros para os derivados indexados à inflação tem se verificado um crescimento significativo e, assim, começam a surgir novas oportunidades de proteção contra o risco, como é o caso dos *swaps* de inflação. Por essa razão, foram escolhidos para obter melhores resultados de estimação do preço das *TIPS*. Neste sentido, será avaliado o desempenho do processo de estimação proposto por (Jarrow & Yildirim, 2003) e o novo processo de estimação que agora propomos.

**Palavras-chave:** Modelo de *Jarrow & Yildirim*, obrigações *TIPS*, *swaps* de inflação, risco de deflação.

**Classificação JEL:** C13, E31





## Abstract

This dissertation applies the (Jarrow & Yildirim, 2003) approach to determine the fair value of a specific inflation-linked security: a Treasury Inflation-Protected Security (TIPS). Under this model, both the real and nominal forward rates follow a Gaussian distribution, and the term of the structure of these rates is described by the Vasicek (1977) model; finally the inflation index follows a geometric Brownian motion.

The aim is to evaluate the performance of the modified (Jarrow & Yildirim, 2003) model for the estimation of TIPS prices, concerning the previously mentioned model. We propose a similar pricing formula for TIPS. The role of this second approach in pricing TIPS is to consider the fixed inflation swap rates in the estimation process of TIPS bond prices and the incorporation of the deflation hypothesis. Nevertheless, the current instability in financial markets and its projected increase warrant the consideration of all possible prices evolution. There has been a significant growth in the financial markets for inflation-linked derivatives and, therefore, new opportunities for risk protection have begun to emerge, like inflation swaps. For this reason, these financial products have been chosen to obtain better results for pricing TIPS bonds. This way, the performance of the estimation process proposed by Jarrow & Yildirim (2003) will be evaluated against our model augmented with information on inflation swaps and the possibility of a deflation.

**Key words:** Jarrow & Yildirim Model, Treasury Inflation-Protected Securities (TIPS) bonds, inflation swaps, deflation risk.

**JEL Classification:** C13, E31



# Índice

Agradecimento	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Capítulo 1. Introdução	1
Capítulo 2. Preliminares Matemáticos	5
2.1. Processo de Itô	5
2.2. Distribuição Normal	6
2.3. Outros resultados	8
Capítulo 3. Descrição do Modelo	11
3.1. Notação, Definições e Pressupostos	11
3.2. Estrutura temporal das taxas <i>forward</i> (e dos respectivos fatores de desconto) e do índice de inflação	13
3.3. Estrutura temporal das taxas <i>forward</i> (e respectivos fatores de desconto) e do índice de inflação sob a medida de risco neutro	15
Capítulo 4. Obrigações TIPS	21
4.1. Notação, Definições e Pressupostos	21
4.2. Pricing das obrigações TIPS	22
Capítulo 5. Swaps de inflação	31
5.1. Notação, Definições e Pressupostos	31
5.2. Determinação do <i>fair value</i> da taxa fixa do <i>swap</i> de inflação	32
Capítulo 6. Estimação do preço de obrigações TIPS	35
6.1. Abordagem Jarrow & Yildirim	35
6.1.1. Parâmetros de volatilidade	35
6.1.2. Parâmetros para o Índice de Inflação	39
6.2. Abordagem <i>swaps</i> de inflação	41
6.3. Estimação do preço das obrigações TIPS	44
Capítulo 7. Conclusões	49

Referências Bibliográficas	51
Anexos	53
Anexo A	53
Anexo B	54
Anexo C	55
Anexo D	57
Anexo E	59
Anexo F	61
Anexo G	63
Anexo H	67
Anexo I	69
Anexo J	71
Anexo K	72

## Lista de Figuras

- 1 Índices de inflação *CPURSNA (US CPI Urban Consumers NSA-Not Seasonally Adjusted)* mensais 40
- 2 Índices de inflação *CPURSNA(US CPI Urban Consumers NSA-Not Seasonally Adjusted)* diários 40



## Lista de Tabelas

1	Parâmetros de volatilidade estimados segundo a abordagem <i>J&amp;Y</i>	38
2	Parâmetros relativos à inflação estimados a partir de dados históricos - abordagem <i>J&amp;Y</i>	41
3	Parâmetros associados à inflação estimados de acordo com a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	43
4	Parâmetros estimados alternativos	48
5	Parâmetros estimados alternativos	48
1	Variâncias dos diferenciais de fatores de desconto para as taxas nominais genéricas ' <i>US Generic Govt</i> '	53
2	Variâncias dos diferenciais de fatores de desconto para as taxas reais genéricas ' <i>Generic Inflation Indexed United States Government Bond</i> '	53
3	Iterações da regressão não-linear para a estimação dos parâmetros $\alpha_n$ e $\sigma_n$	54
4	Iterações da regressão não-linear para a estimação parâmetros $\alpha_r$ e $\sigma_r$	54
5	Valores iniciais da regressão não-linear para a estimação parâmetros $\rho_{nr}$ , $\rho_{nI}$ , $\rho_{rI}$ $\sigma_I$ de acordo com a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	55
6	Iterações da regressão não-linear para a estimação parâmetros $\rho_{nr}$ , $\rho_{nI}$ , $\rho_{rI}$ $\sigma_I$ de acordo com a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	56
7	Lista das obrigações <i>TIPS</i> recolhidas e indicação das obrigações admissíveis para avaliação da <i>performance</i> das abordagens consideradas	57
8	Lista das obrigações <i>TIPS</i> recolhidas e indicação das obrigações admissíveis para avaliação da <i>performance</i> das abordagens consideradas (continuação)	58
9	Estimação das <i>put option</i> segundo a abordagem <i>Jarrow &amp; Yildirim</i>	59
10	Estimação de preços das obrigações <i>TIPS</i> segundo a abordagem <i>Jarrow &amp; Yildirim</i>	60
11	Estimação das <i>put option</i> segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	61
12	Estimação de preços das obrigações <i>TIPS</i> segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	62
13	Estimação das <i>put option</i> a partir dos parâmetros alternativos estimados segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação	63
14	Estimação de preços das obrigações <i>TIPS</i> segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação alternativa 2	64

15	Estimação de preços das obrigações <i>TIPS</i> segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação alternativa 3	65
16	Estimação de preços das obrigações <i>TIPS</i> segundo a abordagem <i>Swaps</i> de Inflação alternativa 4	66
17	Estimação dos cupões ajustados das obrigações <i>TIPS</i> com pagamentos semestrais de cupões nos meses de janeiro e julho	67
18	Estimação dos cupões ajustados das obrigações <i>TIPS</i> com pagamentos semestrais de cupões nos meses de fevereiro e agosto	69
19	Estimação dos cupões ajustados das obrigações <i>TIPS</i> com pagamentos semestrais de cupões nos meses de fevereiro e agosto (continuação)	70
20	Estimação dos cupões ajustados das obrigações <i>TIPS</i> com pagamentos semestrais de cupões nos meses de abril e outubro	71
21	Estimação dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos	72
22	Estimação dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos (continuação)	73
23	Estimação dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos (continuação)	74



## CAPÍTULO 1

### Introdução

Tradicionalmente, o Tesouro Americano não apoiava as obrigações indexadas à inflação. No entanto, em 1989, Spiro publicou um artigo que demonstrava que essas mesmas obrigações estavam a começar a ter um forte impacto no Tesouro Americano. Em 1996, o Tesouro Americano anunciou que iria emitir títulos que formassem uma proteção contra a inflação de forma a reduzir o custo de empréstimo do governo e estimular o mercado a pensar nas expectativas de inflação de maneira diferente, bem como para minimizar o impacto da volatilidade no mercado. A partir do mesmo ano, começaram a ser emitidos títulos indexados ao índice CPI-U (*Consumer Price Index for All Urban Consumers*) e os bancos centrais e outras autoridades monetárias começaram a usar o mercado dos derivados de inflação como um outro “barómetro” das expectativas das taxas de inflação futuras. Como os títulos indexados à inflação são construídos para proteger os seus titulares dessa mesma inflação, dado que o pagamento de cada cupão é ajustado de acordo com a variação do índice de preços, a compra destes títulos significa que os seus investidores receiam um aumento da inflação no futuro. Além disso, o aumento da procura destes títulos poderá conduzir a uma diminuição das taxas de juro reais e, conseqüentemente, ao aumento da inflação esperada.

Recentemente, no segundo semestre de 2022, o Tesouro Americano lançou uma iniciativa para promover os títulos indexados à inflação, com o intuito de reduzir os seus custos ao longo do tempo. O interesse nos títulos indexados à inflação tem vindo a crescer devido às suas vantagens, que incluem a transferência de risco, o aumento de liquidez, a otimização do *timing* de mercado e a personalização de estratégias de *hedging* dos portfólios de acordo com as preferências individuais de cada investidor.

Títulos indexados à inflação são títulos cujos *cash flows* estão dependentes de algum índice, de modo a proteger tanto os investidores como os emitentes das flutuações de preços, refletidas no índice, e que ocorrem no mercado financeiro.

Neste trabalho vamos usar o índice de inflação CPURNSA (*US CPI Urban Consumers NSA-Not Seasonally Adjusted*), as obrigações TIPS (*Treasury Inflation-Linked Securities*) e os *swaps* de inflação (*inflation swaps*), como os títulos indexados à inflação.

Tal como indicado acima, os títulos indexados à inflação foram construídos para proteger tanto aos emitentes como aos investidores das mudanças do nível do preço real na economia. Por um lado, oferecem algum grau de poder de compra “certo” ao investidor (*bondholder*) e, por outro lado um custo financeiro ajustado à inflação “constante” ao emitente (*borrower*).

No entanto, não é possível obter um preço real certo para os títulos indexados à inflação devido à influência dos seguintes fatores: impostos; índice de preços usado para o cálculo da inflação; *lag* e volatilidade do índice de inflação.

O pagamento dos impostos, associados aos títulos, não é concretizado no momento em que ocorre o pagamento dos *cash flows*, que tem em conta a inflação (conhecida) de cada período. Isto quer dizer que o valor dos impostos pagos não está de acordo com a inflação utilizada no ajustamento dos *cash flows*.

Além disso, como o índice de preços é apenas uma aproximação de um conjunto específico de bens e serviços, não representa as preferências individuais de cada investidor e por isso, cada investidor nunca estará completamente protegido do efeito da inflação.

Relativamente ao índice de inflação, há que ter em conta que o *lag* utilizado para o cálculo deste também afeta a obtenção do preço justo dos títulos indexados à inflação. Como este é diferente do *lag* entre os pagamentos consecutivos dos *cash flows*, os *cash flows* não estarão completamente protegidos da inflação. E, quanto maior for a diferença dos *lags*, menor será o poder de proteção deste produto financeiro. O efeito do *lag* do índice de inflação acentua-se em períodos de grande volatilidade da inflação.

Apesar do *lag* do índice de inflação contribuir para uma distorção do valor real dos *cash flows* pagos, não é possível eliminá-lo, dado que este é necessário para refletir a evolução dos preços ao longo do tempo. Para minimizar o problema do *lag* do índice de inflação, normalmente escolhe-se um índice de preços que seja publicado frequentemente, de preferência, uma vez por mês, e com um *lag* pequeno. Por esta razão o índice CPI-U é usualmente utilizado.

Apesar destes inconvenientes, os títulos indexados à inflação oferecem um grau elevado de proteção contra a inflação, especialmente quando comparados com os títulos convencionais.

O objetivo principal deste trabalho consiste na calibração do modelo descrito em (Jarrow & Yildirim, 2003), de agora em diante denominado como *J&Y*, para o *pricing* de obrigações *TIPS* (*Treasury Inflation-Linked Securities*). O modelo de *J&Y* tem como base a abordagem Gaussiana para as taxas *forward* reais e nominais, o movimento Browniano geométrico (*Geometric Brownian Motion*) para o índice de inflação e a extensão do modelo de Vasicek (1977) (*Extended Vasicek Model*), utilizado para descrever a dinâmica das taxas nominais e reais. O *pricing* de obrigações *TIPS* vai ser desenvolvido a partir das taxas *spot* nominais e reais, e do índice de inflação CPI-U, numa primeira abordagem. Numa segunda abordagem, com base na primeira, os coeficientes de volatilidade associados à inflação serão estimados a partir das cotações dos *swaps* de inflação (*inflation swaps*), ao invés de serem obtidos diretamente a partir dos dados históricos do índice de inflação CPI-U, das taxas *spot* nominais e das taxas *spot* reais.

Nesta tese pretendemos avaliar produtos indexados à inflação, mais especificamente, as obrigações *TIPS*. Para isso, vamos usar o modelo proposto por *J&Y* (2003). O modelo (Jarrow & Yildirim) (2003) adota o *framework* de Heath, Jarrow e Morton (1992) na

avaliação de obrigações *TIPS* e outros derivados. Deste modo, o modelo de *J&Y* usa a analogia da taxa de câmbio para construir um modelo Gaussiano a 3 fatores. Assim, na analogia da taxa de câmbio, são consideradas duas economias: a nominal (correspondente à moeda doméstica) e a real (que representa a moeda estrangeira), e o índice de inflação poderá ser interpretado como a taxa de câmbio entre as duas moedas.

Antes de prosseguir com o início do primeiro capítulo será apresentado um breve sumário deste trabalho. O ponto de partida consiste na reunião e desenvolvimento de conceitos gerais, que serão utilizados na demonstração de resultados importantes ao longo do trabalho, no Capítulo 2, Preliminares Matemáticos. De seguida, no Capítulo 3, vai ser especificado o modelo de (Jarrow & Yildirim) (2003) para a estrutura temporal das taxas de juro nominais e reais, bem como para o índice de inflação, sob a medida de probabilidade física bem como sob a medida de probabilidade de risco neutro. O Capítulo 4, consiste no desenvolvimento de uma fórmula de *pricing* para as obrigações *TIPS*, que terá em conta o cenário de deflação no período compreendido entre a data de emissão e a data de vencimento das obrigações, de acordo com (Rodrigues A.)(2009). O Capítulo 5 tem como foco o desenvolvimento de uma expressão matemática que permita encontrar o *fair value* da cotação fixa dos *swaps* de inflação.

Após o desenvolvimento da fórmula de *pricing* das obrigações *TIPS* e de uma expressão que constrói a cotação fixa do *swap* de inflação a partir de parâmetros de volatilidade, estamos em condições de prosseguir para o Capítulo 6. Neste capítulo, serão estimados os parâmetros associados às taxas *spot* reais e nominais e os parâmetros de volatilidade associados à inflação, de acordo com *J&Y* numa primeira parte; e numa segunda instância, serão utilizadas as cotações fixas dos *swaps* de inflação na estimação dos parâmetros que envolvem o índice de inflação. Posteriormente, são calculados os preços das obrigações *TIPS* segundo ambas as abordagens.

Por fim, no último capítulo, vamos refletir sobre os principais resultados do trabalho e sugerir novas pesquisas que permitam melhorar o modelo construído, assim como também mencionar métodos alternativos de estimação.



## CAPÍTULO 2

### Preliminares Matemáticos

O objetivo deste capítulo consiste em introduzir conceitos e resultados que serão utilizados ao longo do trabalho.

#### 2.1. Processo de Itô

DEFINIÇÃO 2.1. *Um processo estocástico  $X(t)$  é um processo de Itô se puder ser representado da seguinte forma*

$$dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t) \quad (2.1)$$

*i.e.*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, X(s)) dW(s) \quad (2.2)$$

onde  $W(t)_{t \geq 0}$  é um movimento Browniano gerado pela filtração  $\mathcal{F}(t)_{t \geq 0}$

Note -se que  $X(0)$  é  $\mathcal{F}(0)$ -mensurável e que os processos estocásticos  $\mu(t, X(t))$  e  $\sigma(t, X(t))$  são  $\mathcal{F}(t)$ -adapados. O termo  $\mu(t, X(t))$  é chamado de *drift* e representa a tendência do processo, enquanto que o termo  $\sigma(t, X(t))$  é denominado de difusão e corresponde à parte estocástica do processo, que descreve as flutuações aleatórias do processo ao longo do tempo.

DEFINIÇÃO 2.2. *O integral estocástico*

$$I(t) = \int_0^t g(s) dW(s) \quad (2.3)$$

*que satisfaz as seguintes condições*

1.  $\int_0^t \mathbb{E}[g(s)^2] dW(s) \leq \infty$  para todo  $t \geq 0$
2.  $g(t)$  é adaptado à filtração  $\mathcal{F}(t) = \sigma(W(s)), 0 \leq s \leq t$
3.  $W(t)$  é um movimento Browniano
4.  $g(t)$  pertence à classe  $C^2$

*é chamado de integral de Itô.*

PROPOSIÇÃO 2.1. *Isometria de Itô*

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t g(s) dW(s) \right)^2 \right] = \int_0^t \mathbb{E}[g(s)^2] dW(s) \quad (2.4)$$

De seguida são apresentados os lemas de Itô a 1, 2 e 3 dimensões, que serão utilizados para obter as equações diferenciais estocásticas de um ou mais processos de Itô.

LEMA 2.1. *Lema de Itô unidimensional*

Seja  $X$  um processo de Itô, descrito pela equação  $dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t)$ , e seja  $f$  uma função tal que  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^{1,2}$ . Então para todo o  $t \geq 0$

$$df(t, X(t)) = \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle(t) \quad (2.5)$$

LEMA 2.2. *Lema de Itô bidimensional*

Sejam  $X(t)$  e  $Y(t)$  dois processos de Itô, descritos pelas equações  $dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t)$  e  $dY(t) = \mu(t, Y(t)) dt + \sigma(t, Y(t)) dW(t)$ , respetivamente, e seja  $f$  uma função tal que  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^{1,2}$ . Então para todo o  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} df(t, X(t), Y(t)) &= \frac{\partial f(t, X(t), Y(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X(t), Y(t))}{\partial x} dX(t) \\ &+ \frac{\partial f(t, X(t), Y(t))}{\partial y} dY(t) + \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t))}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t))}{\partial y^2} d\langle Y, Y \rangle(t) + \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t))}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

LEMA 2.3. *Lema de Itô tridimensional*

Sejam  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$  dois processos de Itô, descritos pelas equações  $dX(t) = \mu(t, X(t)) dt + \sigma(t, X(t)) dW(t)$ ,  $dY(t) = \mu(t, Y(t)) dt + \sigma(t, Y(t)) dW(t)$  e  $dZ(t) = \mu(t, Z(t)) dt + \sigma(t, Z(t)) dW(t)$ , respetivamente, e seja  $f$  uma função tal que  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função  $C^{1,2}$ .

Então para todo o  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} df(t, X(t), Y(t), Z(t)) &= \\ &\frac{\partial f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial x} dX(t) + \frac{\partial f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial y} dY(t) \\ &+ \frac{\partial f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial z} dZ(t) + \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial x^2} d\langle X, X \rangle(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial y^2} d\langle Y, Y \rangle(t) + \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial z^2} d\langle Z, Z \rangle(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial x \partial y} d\langle X, Y \rangle(t) + \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial x \partial z} d\langle X, Z \rangle(t) \\ &+ \frac{\partial^2 f(t, X(t), Y(t), Z(t))}{\partial y \partial z} d\langle Y, Z \rangle(t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2. Distribuição Normal

DEFINIÇÃO 2.3. *Uma variável aleatória  $X$  segue uma distribuição Normal univariada, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2 > 0$ , se a sua função densidade de probabilidade for descrita como*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \quad (2.8)$$

para  $x \in \mathbb{R}$

Denote-se  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

PROPOSIÇÃO 2.2. *Seja  $X$  uma variável aleatória Normal, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ ,  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , então a função geradora de momentos de  $X$  é dada por*

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda X}\right) = \exp\left\{\mu\lambda + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\right\} \quad (2.9)$$

para  $\lambda \in \mathbb{R}$

PROPOSIÇÃO 2.3. *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias com distribuição Normal, com  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  e  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ . Então*

$$X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}) \quad (2.10)$$

onde  $\sigma_{XY}$  representa a covariância entre  $X$  e  $Y$

DEFINIÇÃO 2.4. *O vetor aleatório  $X = (X_1, \dots, X_k)$ , com  $X \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_{ii}^2)$  para todo  $1 \leq i \leq k$ , segue uma distribuição Normal multivariada de ordem  $k$ , com vetor média  $\mu$  e a matriz das variâncias e covariâncias  $\Sigma$ :*

$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_k]$$

e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \dots & \sigma_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \dots & \sigma_{kk}^2 \end{bmatrix},$$

se a sua função densidade de probabilidade for descrita como

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta^2(x)\right\} \quad (2.11)$$

onde

$$\Delta^2(x) = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$$

Denote-se  $X^k \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

PROPOSIÇÃO 2.4. *Seja  $X$  uma variável aleatória Normal multivariada de ordem  $k$ , com vetor média  $\mu$  e a matriz das variâncias e covariâncias  $\Sigma$ ,  $X^k \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , então a função geradora de momentos de  $X$  é dada por*

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda' X}\right) = \exp\left\{\lambda' \mu + \frac{1}{2}\lambda' \Sigma \lambda\right\} \quad (2.12)$$

para  $\lambda \in \mathbb{R}^k$

LEMA 2.4. *Seja  $(X, Y)$  uma vetor aleatório que segue uma distribuição Normal bivariada,  $(X, Y)' \sim \mathcal{N}^2(\mu, \Sigma)$ , com*

$$\mu = [\mu_1, \mu_2]$$

e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{XX}^2 & \sigma_{XY} = \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \sigma_{YX} = \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_{YY}^2 \end{bmatrix},$$

com  $|\rho| < 1$  e  $\sigma_{XY}$  definido no Lema 2.4. do mesmo capítulo.

Então, para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , vem

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp\{X\} \mathbb{I}_{Y \leq a} \right] = \exp \left\{ \mu_X + \frac{1}{2} \sigma_X^2 \right\} \Phi \left( \frac{a - \mu_Y - \rho\sigma_X\sigma_Y}{\sigma_Y} \right) \quad (2.13)$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração pode ser consultada em Rodrigues, A. (2009).  $\square$

### 2.3. Outros resultados

DEFINIÇÃO 2.5. *Um movimento Browniano (standard) (ou processo de Wiener) é um processo estocástico  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ , com as seguintes propriedades:*

1.  $W(0) = 0$

2.  $W(t)$  tem incrementos independentes:

$W(t_4) - W(t_3)$  é independente de  $W(t_2) - W(t_1)$ ,  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

3.  $W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ , com  $0 < s < t$

4.  $W(t)$  tem trajetórias contínuas

PROPOSIÇÃO 2.5. *Regra de Leibniz*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, s) ds \right) = f(x, g(x)) \frac{dg(x)}{dx} - f(x, f(x)) \frac{df(x)}{dx} + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} ds \quad (2.14)$$

Se  $g(x) = c$  é uma constante e  $f(x) = x$ , a regra de Leibniz pode ser escrita da seguinte forma:

PROPOSIÇÃO 2.6. *Caso particular da Regra de Leibniz*

$$\frac{d}{dx} \left( \int_c^x f(x, s) ds \right) = -f(x, x) + \int_x^c \frac{\partial f(x, s)}{\partial x} ds \quad (2.15)$$



PROPOSIÇÃO 2.7. *Teorema de Fubini* Seja  $f(x,y)$  uma função contínua e integrável, na região  $R$ , definida por  $a \leq x \leq b$  e  $c \leq y \leq d$ , então

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \quad (2.16)$$

A partir da proposição acima, podemos verificar que o integral duplo pode ser visto como dois integrais iterados e que a ordem de integração pode ser comutada.

PROPOSIÇÃO 2.8. *Teorema de Girsanov*

Sejam  $\mathbb{P}^1$  e  $\mathbb{P}^2$  duas medidas de probabilidade definidas no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Considerando que  $W^{\mathbb{P}^1}(t)$  é um movimento Browniano definido no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^1)$  e  $\mathcal{F}_t$  a filtração gerada por esse movimento Browniano.

Caso  $\lambda(t)$  seja um processo adaptado à  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  e verifique a condição de Novikov

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^1} \left[ \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \lambda(t)^2 dt \right\} \right] < \infty$$

então existe uma medida de probabilidade  $\mathbb{P}^2$  tal que:

1.  $\mathbb{P}^1$  e  $\mathbb{P}^2$  são medidas equivalentes

2. A derivada de radon-Nikodým de  $\mathbb{P}^2$  em relação a  $\mathbb{P}^1$  é dada por

$$\frac{d\mathbb{P}^2}{d\mathbb{P}^1} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp \left\{ -\int_0^t \lambda(s) dW^{\mathbb{P}^1}(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda(s)^2 ds \right\}$$

3. Verifica-se a seguinte relação entre as medidas de probabilidade  $\mathbb{P}^1$  e  $\mathbb{P}^2$

$$dW^{\mathbb{P}^2}(t) = dW^{\mathbb{P}^1}(t) + \lambda(t)dt \quad (2.17)$$



## CAPÍTULO 3

### Descrição do Modelo

#### 3.1. Notação, Definições e Pressupostos

A avaliação das *TIPS* vai ser feita a partir do modelo HJM (*Heath–Jarrow–Morton*). Por isso, o objetivo deste primeiro subcapítulo consiste, além de introduzir a notação utilizada ao longo do trabalho, em descrever alguns pressupostos necessários para entender o modelo que vai ser utilizado na valorização das *TIPS*.

Denote-se  $t_0$  como a data de emissão da obrigação *TIPS*, 0 como o momento atual e  $T^*$  como o horizonte temporal.

Relativamente aos pressupostos sobre o mercado, vamos assumir que o mercado não tem atrito, ou seja, que não há custos de transação.

O espaço de probabilidade usado vai ser o habitual  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega$  representa o espaço amostral,  $\mathcal{F}$  representa a  $\sigma$ -álgebra associada e  $\mathbb{P}$  representa a medida de probabilidade física.

Considere-se também os movimentos Brownianos  $(W_n^{\mathbb{P}}(t), W_r^{\mathbb{P}}(t), W_I^{\mathbb{P}}(t))$ , com  $t_0 \leq 0 \leq T^*$  e  $W_n^{\mathbb{P}}(0) = W_r^{\mathbb{P}}(0) = W_I^{\mathbb{P}}(0) = 0$ .

Assim, podemos definir o movimento Browniano a 3 dimensões, com  $0 \leq t \leq T^*$ , como  $\mathbf{W}^{\mathbb{P}}(t) = (W_n^{\mathbb{P}}, W_r^{\mathbb{P}}, W_I^{\mathbb{P}})(t)$ .

Relativamente aos 3 movimentos Brownianos acima, podemos definir a seguinte matriz constante, simétrica e semi-definida positiva  $\rho$  como a matriz de correlação:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{nr} & \rho_{nI} \\ \rho_{nr} & 1 & \rho_{rI} \\ \rho_{nI} & \rho_{rI} & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos agora introduzir a notação utilizada ao longo do trabalho.

NOTAÇÃO 3.1. *Denote-se  $r$  como a taxa real e  $n$  como a taxa nominal.*

NOTAÇÃO 3.2. *Denote-se  $I(t)$  como o índice de inflação CPI-U (Consumer Price Index for All Urban Consumers) no momento  $t$ , em unidades monetárias por unidade CPI-U.*

*Note-se que o índice é sempre calculado com um lag de 2 meses.*

De seguida serão apresentados dois conceitos definidos a partir do índice inflação  $I(t)$ .

DEFINIÇÃO 3.1. *A taxa de inflação observada no período  $[t, T]$  é obtida a partir dos índices de inflação associados aos momentos  $t$  e  $T$ :*

$$TI(t, T) = \frac{I(T) - I(t)}{I(t)} \quad (3.1)$$

DEFINIÇÃO 3.2. *O fator de ajustamento da inflação no período  $[t, T]$  é definido diretamente a partir da taxa de inflação observada no intervalo de tempo  $[t, T]$  como*

$$\frac{I(T)}{I(t)} = 1 + TI(t, T) \quad (3.2)$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $t < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < T$ , vem

$$\begin{aligned} 1 + TI(t, T) &= (1 + TI(t, t_1)) (1 + TI(t_1, t_2)) \dots (1 + TI(t_{n-1}, T)) \\ &= \left(1 + \frac{I(t_1) - I(t)}{I(t)}\right) \left(1 + \frac{I(t_2) - I(t_1)}{I(t_1)}\right) \dots \left(1 + \frac{I(T) - I(t_{n-1})}{I(t_{n-1})}\right) \\ &= \frac{I(t_1)}{I(t)} \frac{I(t_2)}{I(t_1)} \dots \frac{I(t_{n-1})}{I(t_{n-2})} \frac{I(T)}{I(t_{n-1})} \end{aligned}$$

□

Em relação às duas próximas obrigações é de se fazer notar que a sua data de vencimento será  $T^*$  ou antes, e considere-se  $0 \leq t \leq T \leq T^*$ .

NOTAÇÃO 3.3. *Denote-se  $P_n(t, T)$  como o preço, em unidades monetárias, no momento  $t$ , de uma obrigação de cupão-zero nominal (nominal zero-coupon bond), com maturidade  $T$ , valor facial 1 e que garante o pagamento de 1 unidade monetária no vencimento  $T$ .*

NOTAÇÃO 3.4. *Denote-se  $P_r(t, T)$  como o preço, em unidades monetárias, no momento  $t$ , de uma obrigação de cupão-zero real (real zero-coupon bond), com maturidade  $T$ , valor facial 1 e que garante o pagamento de  $I(T)/I(t)$  unidades monetárias no vencimento  $T$ .*

Os autores consideraram a seguinte analogia: os preços nominais correspondem aos preços domésticos e os preços reais correspondes aos preços estrangeiros; deste modo, o índice de inflação corresponde à taxa de câmbio entre as "moedas" nominal e real.

Vamos proceder com as seguintes definições.

DEFINIÇÃO 3.3. *A taxa forward instantânea no momento  $t$ , para o momento  $T$ , denotada por  $f_k(t, T)$ , é dada por:*

$$f_k(t, T) = \frac{-\partial \log(P_k(t, T))}{\partial T} \quad (3.3)$$

*E daqui vem que, o factor de desconto a aplicar no intervalo  $[t, T]$ , é igual a:*

$$P_k(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f_k(t, s) ds \right\} \quad (3.4)$$

*para  $k \in \{r, n\}$  e  $0 \leq t \leq T \leq T^*$ .*

DEFINIÇÃO 3.4. *A taxa spot instantânea no momento  $t$  pode ser escrita como uma taxa forward:*

$$r_k(t) = f_k(t, t) \quad (3.5)$$

para  $k \in \{r, n\}$  e  $0 \leq t \leq T \leq T^*$ .

DEFINIÇÃO 3.5. *Define-se o valor da money market account ou savings account como:*

$$B_k(t) = \exp \left\{ \int_t^T r_k(s) ds \right\} \quad (3.6)$$

Considerando que  $r_k(\cdot)$  é um processo estocástico quase-sempre integrável e  $k \in \{r, n\}$ , pode ser escrito também de forma equivalente:

$$\begin{cases} dB_k(t) = r_k(t)B_k(t)dt \\ B_k(0) = 1 \end{cases} \quad (3.7)$$

É de notar que, além da ausência de custos de transação e de restrições nas negociações, se considera que não há diferença entre as taxas de cupão e os ganhos de capital. No entanto, alguns trabalhos como o de *Elton, Gruber, Agrawal, e Mann* (2001), concluíram que a diferença referida anteriormente pode ter impacto nas taxas das obrigações e tal poderá ser estudado em trabalhos futuros.

De forma a assegurar que o modelo é livre de arbitragens, temos que garantir que não existem oportunidades de arbitragem no mercado financeiro. Para isso, vamos começar por introduzir as seguintes definições:

NOTAÇÃO 3.5. *Denote-se por  $P_r^*(t, T)$  o fator de desconto real monetarizado à inflação, sem ajustamento da sua data de emissão e com maturidade em  $T$ , sendo dado por:*

$$P_r^*(t, T) = I(t)P_r(t, T) \quad (3.8)$$

NOTAÇÃO 3.6. *Denote-se por  $B_r^*(t, T)$  o valor da money market account tendo em conta a inflação, sendo dado por:*

$$B_r^*(t) = I(t)B_r(t) \quad (3.9)$$

### 3.2. Estrutura temporal das taxas *forward* (e dos respetivos fatores de desconto) e do índice de inflação

A partir da abordagem de Jarrow & Yildirim (2003), vamos começar por assumir que a dinâmica temporal das taxas de juro *forward* nominais e reais com maturidade no momento  $T$  é descrita pelo modelo *Vasisek* (1977). Importa salientar, que os mesmos autores consideram que as taxas *forward* real e nominal são normalmente distribuídas e que o índice de inflação segue um movimento Browniano geométrico.

DEFINIÇÃO 3.6. *A taxa forward instantânea nominal, denotada por  $f_n(t, T)$ , com maturidade em  $T$ , segue o seguinte processo estocástico:*

$$df_n(t, T) = \alpha_n(t, T) dt - \sigma_n(t, T) dW_n^{\mathbb{P}}(t) \quad (3.10)$$

DEFINIÇÃO 3.7. A taxa forward instantânea real, denotada por  $f_r(t, T)$ , com maturidade em  $T$ , segue o seguinte processo estocástico:

$$df_r(t, T) = \alpha_r(t, T) dt - \sigma_r(t, T) dW_r^{\mathbb{P}}(t) \quad (3.11)$$

Note-se que  $a_k(t, T)$  é um valor aleatório e  $\sigma_k(t, T)$  é uma função determinística do tempo, com  $k \in \{r, n\}$  e  $t \leq s \leq T$ .

O facto da função volatilidade ser uma função determinística do tempo implica que a estrutura temporal da taxa de juro nominal, bem como da taxa de juro real, sigam uma distribuição Gaussiana. Trabalhos como o de Musiele e Rutkowski (1997) mostram que este pressuposto é bastante significativo uma vez que simplifica o processo computacional.

Ainda de acordo com a abordagem de  $J^{\mathcal{E}}Y$ , é possível definir a dinâmica do índice de inflação da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 3.8. O índice de inflação segue o seguinte processo estocástico:

$$dI(t) = \mu_I(t)I(t) dt + \sigma_I(t)I(t) dW_I^{\mathbb{P}}(t) \quad (3.12)$$

Note-se que  $\mu_I(t)$  é um valor aleatório e  $\sigma_I(t)$  é uma função determinística do tempo, com  $k \in \{r, n\}$  e  $t \leq s \leq T$ .

Definidas as dinâmicas das taxas de juro *forward* nominal e real, vamos agora demonstrar uma Proposição, que será importante em resultados futuros.

Antes de começar a descrição do modelo sob a medida de risco neutro, é fundamental obter a dinâmica do processo dos preços de uma obrigação de cupão-zero nominal/real sob a medida física. Tal processo é descrito pela proposição abaixo:

PROPOSIÇÃO 3.1.

$$dP_k(t, T) = P_k(t, T)[r_k(t) + A_k(t, T) + \frac{1}{2}S_k(t, T)^2]dt + P_k(t, T)S_k(t, T)dW_k^{\mathbb{P}}(t) \quad (3.13)$$

com

$$A_k(t, T) = - \int_t^T \alpha_k(t, s)ds \text{ e } S_k(t, T) = \int_t^T \sigma_k(t, s)ds$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração pode ser consultada em Rodrigues, A. (2009), (Lemma 2.1.5, Chapter 2), mas é agora resumida para conveniência do leitor.

Na equação (3.4)

$$P_k(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f_k(t, s) ds \right\}$$

defina-se

$$Y_t = - \int_t^T f_k(t, s) ds$$

Então  $P_k(t, T) = e^{Y_k(t)}$

Aplicando o Lema de Itô unidimensional (Lema 2.1 do Capítulo 2), temos

$$dP_k(t, T) = P_k(t, T)dY_k(t) + \frac{1}{2}P_k(t, T)Y_k(t)^2$$

Desenvolvendo  $dY_k(t)$ ,

$$dY_k(t) = d\left(-\int_t^T f_k(t, s) ds\right) = -d\left(\int_t^T f_k(t, s) ds\right)$$

Assumindo que  $f_k$  contínua e integrável, aplique-se o Caso Particular da Regra de Leibniz dado pela Proposição 2.5. do Capítulo 2,

$$\begin{aligned} dY_k(t) &= -f_k(t, T)T' + f_k(t, T)dt - \int_t^T \frac{df_k(t, s)}{ds} ds \\ &= f_k(t, t)dt - \int_t^T \frac{df_k(t, s)}{ds} ds = r_k(t)dt - \int_t^T df_k(t, s) ds \\ &= r_k(t)dt - \int_t^T [\alpha_k(t, s)dt - \sigma_k(t, s)dW_k^{\mathbb{P}}(t)] ds \end{aligned}$$

Uma vez que as funções  $\alpha_n(t, T)$  e  $\sigma_k(t, T)$  são funções bem-comportadas, aplique-se o Teorema de Fubini (Proposição 2.7., Capítulo 2),

$$dY_k(t) = r_k(t)dt - \left(\int_t^T \alpha_k(t, s) ds\right)dt - \left(\int_t^T \sigma_k(t, s) ds\right)dW_k^{\mathbb{P}}(t)$$

Substituindo  $dY_k(t)$  em  $dP_k(t, T)$ ,

$$\begin{aligned} dP_k(t, T) &= P_k(t, T) \left[ r_k(t, T) - \left(\int_t^T \alpha_k(t, s) ds\right)dt - \left(\int_t^T \sigma_k(t, s) ds\right)dW_k^{\mathbb{P}}(t) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_t^T \sigma_k(t, s) ds\right)^2 dt \\ &= P_k(t, T) \left[ r_k(t) + A_k(t, T) + \frac{1}{2}(S_k(t, T))^2 \right] dt + S_k(t, T)P_k(t, T)dW_k^{\mathbb{P}}(t) \end{aligned}$$

com  $A_k(\cdot)$  e  $S_k(\cdot)$  definidos na Proposição.  $\square$

### 3.3. Estrutura temporal das taxas *forward* (e respectivos fatores de desconto) e do índice de inflação sob a medida de risco neutro

Com o propósito de provar a livre arbitragem do modelo, vamos começar por especificar os preços  $P_n(\cdot)$ ,  $B_r^*(t, T)$  e  $P_r^*(t, T)$  em relação à *money market account*. Posteriormente, vamos verificar quais as condições necessárias para que estes preços sejam  $\mathbb{Q}$ -martingalas, o que corroborará a ausência de oportunidades de arbitragem no modelo.

**DEFINIÇÃO 3.9.** *Os três processos  $P_n(\cdot, T)$ ,  $B_r^*(\cdot, T)$  e  $P_r^*(\cdot, T)$  descrevem um mercado completo e livre de arbitragem se existir uma medida de probabilidade equivalente à medida de probabilidade  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{Q}$ , cujo numerário é a money market account nominal, tal que*

$$Z_n(t, T) = \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} \tag{3.14}$$

$$Z_I(t) = \frac{B_r^*(t, T)}{B_n(t, T)} = \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)} \tag{3.15}$$

$$Z_r(t, T) = \frac{P_r^*(t, T)}{B_n(t, T)} = \frac{I(t)P_r(t)}{B_n(t)} \quad (3.16)$$

sejam  $\mathbb{Q}$ -martingalas.

DEFINIÇÃO 3.10. Dados os movimentos Brownianos  $(W_n(\cdot), W_r(\cdot), W_I(\cdot))$ ,  $\mathbb{Q}$  é uma medida de probabilidade equivalente a  $\mathbb{P}$ , se pelo Teorema de Girsanov, existem prêmios de risco de mercado  $(\lambda_n(t), \lambda_r(t), \lambda_I(t) : t \in [0, T])$ , tal que:

$$\begin{aligned} W_k^{\mathbb{Q}}(t) &= W_k^{\mathbb{P}}(t) - \int_0^t \lambda_k(s) ds \\ \iff dW_k^{\mathbb{Q}}(t) &= dW_k^{\mathbb{P}}(t) - \lambda_k(t) dt, \quad k \in \{r, n, I\}, \quad 0 \leq s \leq t \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 3.2. Os seguintes processos  $Z_n(\cdot, T)$ ,  $Z_I(\cdot)$  e  $Z_r(\cdot, T)$  são  $\mathbb{Q}$ -martingalas se e só se verificarem as seguintes condições:

$$\alpha_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds + \lambda_n(t) \right) \quad (3.17)$$

$$\alpha_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds + \sigma_I(t) \rho_{rI} + \lambda_r(t) \right) \quad (3.18)$$

$$\mu_I(t) = r_n(t) - r_r(t) - \sigma_I(t) \lambda_I(t) \quad (3.19)$$

DEMONSTRAÇÃO. (i) Aplicando o Lema de Itô bidimensional (Capítulo 2, Lema 2.2.) a  $Z_n(t, T) = \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}$ ,

$$d\left(\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}\right) = \frac{dP_n(t, T)}{B_n(t)} - \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)^2} dB_n(t)$$

Substituindo  $P_n(t, T)$  pela expressão (3.13) ( $k=n$ ) e  $dB_n(t)$  pela expressão (3.7) ( $k=n$ ), vem

$$d\left(\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}\right) = \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} \left( A_n(t, T) + \frac{1}{2} S_n(t, T)^2 \right) dt + \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} S_n(t, T) dW_n^{\mathbb{P}}(t)$$

Aplicando agora o Teorema de Girsanov dado pela (Capítulo 2, Proposição 2.8.), temos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P_n(t, T)}{B_n(t)}\right) &= \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} \left( A_n(t, T) + \frac{1}{2} S_n(t, T)^2 \right) dt + \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} S_n(t, T) (\lambda_n(t) dt + dW_n^{\mathbb{Q}}(t)) \\ &= \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} \left( A_n(t, T) + \frac{1}{2} S_n(t, T)^2 + \lambda_n(t) S_n(t, T) \right) dt + \frac{P_n(t, T)}{B_n(t)} S_n(t, T) dW_n^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$



Para que  $\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}$  seja uma  $\mathbb{Q}$  martingala a seguinte condição tem que se verificar:

$$\begin{aligned} A_n(t, T) + \frac{1}{2}S_n(t, T)^2 + \lambda_n(t)S_n(t, T) &= 0 \\ \iff - \int_t^T \alpha_n(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right)^2 + \lambda_n(t) \int_t^T \sigma(t, s) ds &= 0 \end{aligned}$$

Derive-se ambos o membros em ordem a  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left( - \int_t^T \alpha_n(t, s) ds \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dT} \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right)^2 + \lambda_n(t) \frac{d}{dT} \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right) &= 0 \\ \iff -\alpha_n(t, T) + \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \frac{d}{dT} \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right) + \lambda_n(t) \sigma_n(t, T) &= 0 \\ \iff -\alpha_n(t, T) + \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \sigma_n(t, T) + \lambda_n(t) \sigma_n(t, T) &= 0 \\ \iff \alpha_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds + \lambda_n(t) \right) & \end{aligned}$$

(ii) Aplicando o Lema de Itô Tridimensional (Capítulo 2, Lema 2.2.) a  $Z_I(t) = \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}$ ,

$$\begin{aligned} d \left( \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)} \right) &= \frac{P_r(t,T)}{B_n(t)} dI(t) + \frac{I(t)}{B_n(t)} dP_r(t,T) - \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)^2} dB_n(t) \\ &\quad - \frac{P_r(t,T)}{B_n(t)^2} dI(t) dB_n(t) + \frac{1}{B_n(t)} dI(t) dP_r(t,T) - \frac{I(t)}{B_n(t)^2} dP_r(t,T) dB_n(t) \end{aligned}$$

Substituindo  $dB_n(t)$ ,  $dI(t)$  e  $dP_r(t,T)$ , respetivamente, pelas expressões (3.7) ( $k=n$ ), (3.12) e (3.13) ( $k=n$ ):

$$\begin{aligned} d \left( \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)} \right) &= \\ \frac{P_r(t,T)}{B_n(t)} \left[ \mu_I(t)I(t) dt + \sigma_I(t)I(t) dW_I^{\mathbb{P}}(t) \right] + \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)} \left[ r_r(t) + A_r(t, T) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}S_r(t, T)^2 dt + S_r(t, T) dW_r^{\mathbb{P}}(t) \right] - \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)^2} r_n(t) B_n(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{B_n(t)} \sigma_I(t)I(t)P_r(t, T) S_r(t, T) dW_I^{\mathbb{P}}(t) dW_r^{\mathbb{P}}(t) \\ &= \frac{P_r(t,T)I(t)}{B_n(t)} \left[ \mu_I(t) + r_r(t) + A_r(t, T) + \frac{1}{2}S_r(t, T)^2 - r_n(t) + \sigma_I(t)S_r(t, T)\rho_{Ir} \right] dt \\ &\quad + \frac{P_r(t,T)I(t)}{B_n(t)} \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{P}}(t) + \frac{P_r(t,T)I(t)}{B_n(t)} S_r(t, T) dW_r^{\mathbb{P}}(t) \end{aligned}$$

Aplicando agora o Teorema de Girsanov dado pela Proposição 2.8. do Capítulo 2, temos

$$\begin{aligned} d\left(\frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}\right) &= \frac{P_r(t, T)I(t)}{B_n(t)} \left[ \mu_I(t) + r_r(t) + A_r(t, T) + \frac{1}{2}S_r(t, T)^2 - r_n(t) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_I(t)S_r(t)\rho_{rI} + \sigma_I(t)\lambda_I(t) + S_r(t, T)\lambda_r(t) \right] \\ &\quad + \frac{P_r(t, T)I(t)}{B_n(t)} \left[ \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{Q}} + S_r(t, T) dW_r^{\mathbb{Q}} \right] \end{aligned}$$

Para que  $\frac{I(t)P_r(t, T)}{B_n(t)}$  seja uma  $\mathbb{Q}$  martingala a seguinte condição tem que se verificar:

$$\begin{aligned} \mu_I(t) + r_r(t) + A_r(t, T) + \frac{1}{2}S_r(t, T)^2 - r_n(t) + \sigma_I(t)S_r(t)\rho_{rI} + \sigma_I(t)\lambda_I(t) + S_r(t, T)\lambda_r(t) &= 0 \\ \iff \mu_I(t) + r_r(t) - \int_t^T \alpha_r(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right)^2 - r_n(t) \\ &\quad + (\lambda_r(t) + \sigma_I(t)\rho_{rI}) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds + \sigma_I(t)\lambda_I(t) = 0 \end{aligned}$$

Derive-se ambos os membros em ordem a  $T$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left( \mu_I(t) + r_r(t) - \int_t^T \alpha_r(t, s) ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right)^2 - r_n(t) \right. \\ \left. + (\lambda_r(t) + \sigma_I(t)\rho_{rI}) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds + \sigma_I(t)\lambda_I(t) \right) &= 0 \\ \iff -\alpha_r(t, T) + \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \sigma_r(t, T) + (\lambda_r(t) + \sigma_I(t)\rho_{rI})\sigma_r(t, T) &= 0 \\ \iff \alpha_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds + \sigma_I(t)\rho_{rI} + \lambda_r(t) \right) \end{aligned}$$

(iii)  $Z_n(t, T) = \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)}$  pode ser escrito como

$$\frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)} = \frac{I(t) \exp\left\{\int_0^t r_r(s) ds\right\}}{\exp\left\{\int_0^t r_n(s) ds\right\}} = I(t) \exp\left\{\int_0^t r_r - r_n(s) ds\right\}$$

Aplice-se agora o Lema de Itô dado pelo Lema 2.1. do Capítulo 2 à expressão obtida anteriormente:

$$\begin{aligned} d\left(I(t) \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\}\right) &= \\ \frac{d}{dt} \left( \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\} I(t) \right) dt + \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\} dI(t) \\ &= \left( \int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds \right) \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\} I(t) dt + \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\} dI(t) \\ &= (r_r(t) - r_n(t)) \frac{B_r(t)}{B_n(t)} I(t) dt + \frac{B_r(t)}{B_n(t)} dI(t) \end{aligned}$$

Substituindo  $dI(t)$  pela expressão (3.12),

$$\begin{aligned} & d\left(I(t) \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\}\right) \\ &= (r_r(t) - r_n(t)) \frac{B_r(t)}{B_n(t)} I(t) dt + \frac{B_r(t)}{B_n(t)} \left[ \mu_I(t) I(t) dt + \sigma_I(t) I(t) dW_I^{\mathbb{P}}(t) \right] \\ &= \frac{B_r(t)}{B_n(t)} I(t) \left[ r_r(t) - r_n(t) + \mu_I(t) \right] dt + \frac{B_r(t) I(t)}{B_n(t)} \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{P}}(t) \end{aligned}$$

Aplicando agora o Teorema de Girsanov dado pela Proposição 2.8. do Capítulo 2, temos

$$\begin{aligned} d\left(I(t) \exp\left\{\int_0^t r_r(s) - r_n(s) ds\right\}\right) &= \frac{B_r(t)}{B_n(t)} I(t) \left[ r_r(t) - r_n(t) + \mu_I(t) + \lambda_I(t) \sigma_I(t) \right] dt \\ &\quad + \frac{B_r(t) I(t)}{B_n(t)} \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

Para que  $\frac{I(t)B_r(t,T)}{B_n(t)}$  seja uma  $\mathbb{Q}$  martingala a seguinte condição tem que se verificar:

$$r_r(t) - r_n(t) + \mu_I(t) + \lambda_I(t) \sigma_I(t) = 0 \quad \iff \quad \mu_I(t) = r_n(t) - r_r(t) - \lambda_I(t) \sigma_I(t)$$

□

O modelo HJM considera que a volatilidade das taxas de juro varia ao longo do tempo, como podemos ver nas restrições (3.17) e (3.18). Estas expressões correspondem, respetivamente ao *drift* do processo estocástico da taxa *forward* nominal e ao da taxa real, que é influenciado pela inflação. Por fim, a expressão (3.19) define a equação de *Fisher*, segundo o modelo HJM, relacionando as taxas de juro nominal e real e a inflação esperada. O fator  $\lambda_I(t)$  é o prémio de risco da inflação por unidade de volatilidade, considerando que os processos são estocásticos, que a taxa de juro não é *risk free* e que o mercado permite a existência de inflação.

Finalmente, é possível agora especificar os processos descritos anteriormente, segundo a medida de probabilidade de risco neutro  $\mathbb{Q}$ .

**PROPOSIÇÃO 3.3.** *Os processos  $f_n(\cdot)$ ,  $f_r(\cdot)$  e  $I(t)$ , sob a medida de risco neutro  $\mathbb{Q}$  verificam as seguintes equações estocásticas, respetivamente:*

$$df_n(t, T) = \sigma_n(t, T) \left( \int_t^T \sigma_n(t, s) ds \right) dt - \sigma_n(t, T) dW_n^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.20)$$

$$df_r(t, T) = \sigma_r(t, T) \left[ \int_t^T \sigma_r(t, s) ds + \rho_{rI} \sigma_I(t) \right] dt - \sigma_r(t, T) dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.21)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r_n(t) - r_r(t)] dt + \sigma_I(t, T) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.22)$$

DEMONSTRAÇÃO. As equações surgem diretamente das equações (3.10), (3.11) e (3.12), do subcapítulo 3.2., através da sua combinação com o Teorema de Girsanov (Capítulo 2, Proposição 2.8) e a Proposição 3.2. do presente capítulo,  $\square$

PROPOSIÇÃO 3.4. *Os processos  $P_n(\cdot)$  e  $P_r(\cdot)$ , sob a medida de risco neutro  $\mathbb{Q}$  verificam as seguintes equações estocásticas, respetivamente:*

$$\frac{dP_n(t, T)}{P_n(t, T)} = r_n(t) dt + \int_t^T \sigma_n(t, s) ds dW_n^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.23)$$

$$\frac{dP_r(t, T)}{P_r(t, T)} = \left[ r_r(t) - \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] dt + \int_t^T \sigma_r(t, s) ds dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.24)$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração da proposição 3.4. pode ser consultada em Rodrigues, A. (2009) (Chapter 32, Proposition 2.1.14.).  $\square$

A partir da equação estocástica que descreve o preço de uma obrigação de cupão-zero real, na medida  $\mathbb{Q}$ , é possível especificar o processo estocástico referente ao fator de desconto real monetarizado à inflação,  $P_r^*(\cdot, T)$ .

PROPOSIÇÃO 3.5. *O processo  $P_r^*(\cdot, T)$ , sob a medida de risco neutro  $\mathbb{Q}$ , segue a seguinte equação estocástica*

$$\frac{dP_r^*(t, T)}{P_r^*(t, T)} = r_n(t) + \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) + \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \quad (3.25)$$

DEMONSTRAÇÃO. Aplicando o Lema de Itô a  $P_r^*(t, T)$ , dado pela expressão (3.8), vem

$$d(P_r^*(t, T)) = P_r(t, T)dI(t) + I(t)dP_r(t, T) + dI(t)dP_r(t, T)$$

Substituindo  $dI(t)$  e  $dP_r(t, T)$  pelas equações (3.12) e (3.13) ( $k=n$ ), respetivamente,

$$\begin{aligned} dP_r^*(t, T) &= P_r(t, T)I(t)([r_n(t) - r_r(t)] dt + \sigma_I(t, T) dW_I^{\mathbb{Q}}(t)) \\ &\quad + I(t)P_r(t, T)\left( \left[ r_r(t) - \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] dt + \int_t^T \sigma_r(t, s) ds dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \right) \\ &\quad + I(t)P_r(t, T) + \sigma_I(t) \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ \frac{dP_r^*(t, T)}{P_r^*(t, T)} &= \left( r_n(t) - r_r(t) + r_r(t) - \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) dt \\ &\quad + \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) + \int_t^T \sigma_r(t, s) ds dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ &= r_n(t) + \sigma_I(t) dW_I^{\mathbb{Q}}(t) + \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right) dW_r^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

$\square$

## CAPÍTULO 4

### Obrigações TIPS

As obrigações indexadas à inflação têm vindo a tornar-se cada vez mais populares uma vez que oferecem proteção contra a inflação. O mercado deste tipo de obrigações tem vindo a crescer, especialmente com as obrigações *TIPS*.

Uma obrigação indexada à inflação *Treasury Inflation Protected Securities*, *TIPS* de forma abreviada, é definida da mesma forma que uma obrigação convencional, exceptuando-se a taxa de cupão associada a cada período. Neste tipo de obrigações, cada cupão é obtido multiplicando-se o valor nominal pela taxa de cupão, tal como nas obrigações convencionais, sendo este valor ainda ajustado à taxa de inflação, e daí, se chamar “cupão real” (*real coupon*) aos cupões associados às obrigações indexadas à inflação.

O mercado deste tipo de obrigações cresceu rapidamente em alguns mercados governamentais de obrigações como é o caso dos Estados Unidos da América (E.U.A.), denominados de forma abreviada com a notação americana *U.S.* (*United States*), doravante, com as obrigações *TIPS*. Apesar do rápido crescimento do mercado das obrigações indexadas à inflação, este é ainda relativamente pequeno e tem um problema: falta de liquidez. De modo a contrariar a sua iliquidez, o governo U.S. tem aumentado a emissão deste tipo de obrigações

As obrigações *TIPS* mais comuns têm maturidades de 5, 10 e 30 anos.

#### 4.1. Notação, Definições e Pressupostos

Vamos começar por introduzir a notação que será utilizada na valorização das obrigações *TIPS*.

NOTAÇÃO 4.1. Denote-se  $I(t_0)$  como o índice de inflação de referência, isto é, o índice de inflação observado na data de emissão da obrigação *TIPS*.

NOTAÇÃO 4.2. Denote-se  $F$  como o valor nominal da obrigação *TIPS*, que representa o valor original pela qual a obrigação foi emitida e o qual será pago pelo emissor (*issuer*) ao comprador (*holder*) da mesma.

NOTAÇÃO 4.3. Para cada  $t_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , com  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = T$ , denote-se como  $c_i$  o valor do cupão pago, ao comprador da obrigação *TIPS*, no momento  $t_i$ .

Numa primeira abordagem, vamos omitir a possibilidade de ocorrência de deflação no período temporal que decorre entre a data de emissão da obrigação *TIPS* e a sua data de vencimento. Na seguinte definição são apresentados os *cash flows* recebidos durante a vida de uma obrigação *TIPS*, pelo seu comprador, considerando esta primeira abordagem.

DEFINIÇÃO 4.1. Seja  $t_0 \leq 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{N-1} \leq t_N$ .

Uma obrigação com cupões *TIPS*, emitida no momento  $t_0$  e com maturidade  $t_N$ , com pagamento de cupões  $c_i$  (sem ajustamento da inflação), em cada momento  $t_i$ , e valor nominal  $F$ , é um contrato que garante ao seu comprador (holder) os seguintes cash flows, em cada momento  $t_i$  ( $i=1, \dots, n-1$ ):

$$(i) \quad c_i \frac{I(t_i)}{I(t_0)}$$

e na maturidade  $t_N$ ,

$$(ii) \quad c_N \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + F$$

Na segunda abordagem, vamos considerar a possibilidade de ocorrer uma diminuição do índice de preços no período de vida da obrigação *TIPS*, ou seja, vai ser tido em conta o risco de deflação. Neste caso em cada momento  $t_i$ , o comprador receber o *cash flow* dado por (i) da Definição 4.1. E na maturidade  $t_N$ , o valor recebido é definido da seguinte forma:

DEFINIÇÃO 4.2.

$$c_N \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + \max \left\{ F, F \frac{I(t_N)}{I(t_0)} \right\}$$

## 4.2. Pricing das obrigações *TIPS*

Na presente secção serão apresentadas fórmulas fechadas para o cálculo do *fair value* de uma obrigação *TIPS*, não tendo em conta o risco de deflação e de seguida, considerando a possibilidade de uma diminuição do índice preços.

Vamos começar por definir o preço de uma obrigação com cupões *TIPS*, omitindo a possibilidade de existir deflação na maturidade da obrigação.

DEFINIÇÃO 4.3. O preço de uma obrigação com cupões (*coupon-bearing bond*) *TIPS*, em unidades monetárias, com pagamento de cupões no valor de  $c_i$ , unidades monetárias, em cada momento  $t_i$ , com valor nominal  $F$ , unidades monetárias e maturidade no momento  $t_N$ , emitida no momento  $t_0$ , no momento  $t$ , com  $t_0 \leq t \leq T$ , é dado por:

$$TIPS(t) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, t_i) + F \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, t_N) \quad (4.1)$$

É de notar que para além dos ajustes feitos em cada momento  $t_i$ ,  $0 \leq t_i \leq t_N$ , que se refletem em  $P_r(t, t_i)$ , é necessário ajustar os *cash flows* da obrigação em relação à inflação incorrida entre a data de emissão,  $t_0$ , e a data de avaliação,  $t$ , através da sua multiplicação pelo quociente  $I(t)/I(t_0)$  (inflação no período  $[t_0, t]$ ).

De seguida é feita a formalização do preço de uma obrigação *TIPS*, considerando também o cenário do índice de inflação diminuir. Por isso, uma obrigação com cupões *TIPS* também protege contra a deflação.

PROPOSIÇÃO 4.1. *O preço de uma obrigação com cupões (coupon-bearing bond) TIPS\*, em unidades monetárias, com pagamento de cupões no valor de  $c_i$ , unidades monetárias, em cada momento  $t_i$ , com valor nominal  $F$ , unidades monetárias e maturidade no momento  $t_N$ , emitida no momento  $t_0$ , no momento 0, é dado por:*

$$TIPS^*(t) = \sum_{i=1}^N c_i \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, t_i) + \frac{F}{I(t_0)} p_t(I(t); I(t_0); t_N) \quad (4.2)$$

sendo  $p_t(I(t); I(t_0); t_N)$  o valor, no momento  $t$ , de uma put option europeia standard sobre o índice de inflação, com preço de exercício (strike price)  $I(t_0)$  e vencimento no momento  $t_N$ .

DEMONSTRAÇÃO. A Proposição 4.1. é demonstrada em Rodrigues, A. (2009) (Chapter 2, proposition 2.2.3.), no entanto, agora é resumido para facilitar a leitura. O valor do *cash flow* que o comprador (*holder*) da obrigação com cupões *TIPS* recebe em cada momento  $t_i$  ( $i=1, \dots, N-1$ ), no momento  $t$ , com  $t \leq t_i$ , assumindo que o risco é neutral, é dado por:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^{t_i} r_n(s) ds \right\} c_i \frac{I(t_i)}{I(t_0)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ \int_0^t r_n(s) ds - \int_0^{t_i} r_n(s) ds \right\} c_i \frac{I(t_i)}{I(t_0)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(t_i)} c_i \frac{I(t_i)}{I(t_0)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{c_i}{I(t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(t_i)} I(t_i) P_r(t_i, t_i) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{c_i}{I(t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ B_n(t) \frac{I(t_i) P_r(t_i, t_i)}{B_n(t_i)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{c_i}{I(t_0)} B_n(t) \frac{I(t)}{B_n(t) P_r(t, t_i)} = c_i \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, t_i), \text{ dado que } \frac{I(t_i) P_r(t_i, t_i)}{B_n(t_i)} \text{ é uma } \mathbb{Q}\text{-martingala,} \end{aligned}$$

De forma análoga, o *cash flow* pago na maturidade  $t_N$  da obrigação com cupões *TIPS*, no momento  $t$ , é dado por:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^{t_N} r_n(s) ds \right\} \left( c_N \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + F \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + \max \left\{ F, F \frac{I(t_N)}{I(t_0)} \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} \left( (c_N + F) \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + F \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + \max \left\{ I(t_0) - I(t_N), 0 \right\} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} \left( (c_N + F) \frac{I(t_N)}{I(t_0)} + \frac{F}{I(t_0)} p_{t_N}(I(t_N); I(t_0); t_N) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{c_N + F}{I(t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(T)} I(t_N) P_r(t_N, t_N) \right] \\ &\quad + \frac{F}{I(t_0)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} p_{t_N}(I(t_N); I(t_0); t_N) \right] \\ &= \frac{c_N + F}{I(t_0)} B_n(t) \frac{I(t) P_r(t, t_N)}{B_n(t)} + \frac{F}{I(t_0)} p_t(I(t); I(t_0); t_N) \\ &= (c_N + F) \frac{I(t)}{I(t_0)} P_r(t, t_N) + \frac{F}{I(t_0)} p_t(I(t); I(t_0); t_N) \end{aligned}$$

Combinando as expressões anteriores obtemos o resultado da Proposição. □

Antes de concluir esta Secção, é necessário ter em consideração que a data de aquisição de uma obrigação *TIPS* nem sempre corresponde à primeira ou outra data de pagamento de cupão, e nesse caso será necessário o cálculo dos *accrued interests*.

O que nos leva a apresentar a seguinte fórmula, que calcula a compensação que os compradores da obrigação (*bondholders*) recebem pelo período de tempo que detêm a obrigação e não recebem qualquer pagamento de cupões. Por conseguinte, a seguinte fórmula calcula os *accrued interest* ajustados à inflação associados às obrigações *TIPS*, que são obtidos multiplicando os *accrued interests* pelo quociente entre o índice de inflação no momento de avaliação e o índice de inflação observado na data de emissão da obrigação.

DEFINIÇÃO 4.4. *Considere-se a obrigação com cupões (coupon-bearing bond) TIPS\* e as suas características definidas na proposição anterior, Proposição 4.1..*

*Para  $t_0 \leq t_u < t < t_p \leq t_n$ , o valor dos accrued interest da obrigação com cupões (coupon-bearing bond) TIPS\* no momento  $t$ ,  $AI(t)$ , é definido como:*

$$AI(t) = c_p \frac{I(t)}{I(t_0)} \frac{\tau(t, t_u)}{\tau(t_p, t_u)}$$

*onde  $c_p$  corresponde ao próximo cupão (next coupon),  $t_u$  é a data do último cupão (last coupon date) e  $t_p$  é a data do próximo cupão (next coupon date).*

Finalmente, de seguida é apresentada uma fórmula fechada para o preço de uma *put option* europeia *standard*.

LEMA 4.1. *O valor de uma put europeia standard sobre o índice de inflação, com um preço de exercício  $K \geq 0$  e maturidade  $T$ , no momento  $t$ , com  $0 \leq t \leq T$ , é dado por:*

$$p_t(I(t); K; T) = KP_n(t, T)\Phi(-h(t, T; T, T) + \eta(t, T; T, T)) - I(t)P_r(t, T)\Phi(-h(t, T; T, T)) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \eta^2(t, T) = & \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T ((S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds \\ & - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T)S_r(s, T) ds - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T)\sigma_I(s) ds \\ & + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T)\sigma_I(s) ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$e \quad h(t, T) = \frac{-\log\left(\frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)}\right) + \frac{1}{2}\eta(t, T)^2}{\eta(t, T)}$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração do Lema 4.2. é dada por Rodrigues, A. (2009) (Chapter 3, lemma 3.1.4.), mas é agora resumida para conveniência do leitor.



O valor de uma *put option* europeia *standard* no momento  $t$  é dado por

$$\begin{aligned}
p_t(I(t); K; T) &= \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} p_T(I(T); K; T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} [K - I(T)]^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T r_n(s) ds \right\} (K - I(T)) \mathbb{I}_{\{I(T) \leq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(T)} K \mathbb{I}_{\{I(T) \leq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(T)} I(T) \mathbb{I}_{\{I(T) \leq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

Usando a equação (6) do Corolário 2.1.18 do Capítulo 2 (Secção 2.1) de (Rodrigues A., 2009); considerando  $\eta^2(t, T) \equiv \eta^2(t, T; T; T)$  pelo Lema 3.1.4 e  $\gamma(t, T) \equiv \gamma(t, T; T; T)$  pelo Lema 3.1.2; e sabendo que  $P_r(T, T) = 1$ , vem

$$\begin{aligned}
I(T) &= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I dW_I(s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \left[ - (S_n(s, T))^2 + (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2 \right] ds \right\} \\
&= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right. \\
&\quad + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) - \frac{1}{2} \left[ \int_t^T ((S_n(s, T))^2 - 2(S_n(s, T))^2) ds + \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds \right. \\
&\quad + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds + 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds \\
&\quad \left. - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \right] \left. \right\} \\
&= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right. \\
&\quad + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) - \frac{1}{2} \left[ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T ((S_r(s, T))^2) ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds \right. \\
&\quad - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \left. \right] \\
&\quad \left. + \left[ \int_t^T S_n(s, T) S_n(s, T) ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds \right] \right\} \\
&= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \eta^2(t, T) + \gamma(t, T) \right\}, \text{ usando o valor das expressões } \eta^2(t, T) \text{ e } \gamma(t, T)
\end{aligned}$$

E temos que  $I(T) \leq K$  se e só se:

$$\begin{aligned} & \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right. \\ & \quad \left. + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) - \frac{1}{2}\eta^2(t, T) + \gamma(t, T) \right\} \leq K \\ \iff & - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ & - \frac{1}{2}\eta^2(t, T) + \gamma(t, T) \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2}\eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{aligned}$$

Vamos calcular cada um dos valores esperados condicionais separadamente:

(i) Usando a equação (1) do Corolário 2.1.18 do Capítulo 2 presente em (Rodrigues A., 2009), temos

$$\begin{aligned} P_n(T, T) &= P_n(t, T) \frac{B_n(T)}{B_n(t)} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right\} \\ \iff \frac{B_n(t)}{B_n(T)} &= P_n(t, T) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right\} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(T)} K \mathbb{I}_{\{I(T) \leq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ P_n(t, T) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right\} K \right. \\ & \quad \left. \mathbb{I} \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2}\eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{array} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= KP_n(t, T) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds \right\} \\ & \quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right] \mathbb{I} \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2}\eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{array} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \tag{4.5}$$

O vetor aleatório

$\left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s), - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)$  é independente da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  e segue uma distribuição Normal bivariada com o vetor média  $\mu$  e a matriz de covariâncias  $\Sigma$ :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right] = 0 \\
\mu_2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right] = 0 \\
\sigma_{11}^2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right)^2 \right] = \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds \\
\sigma_{22}^2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)^2 ds \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right)^2 \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right)^2 \right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)^2 \right] + 2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\
&= \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds \\
&\quad - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds = \eta^2(t, T), \text{ pela equação (4.4)} \\
\sigma_{12} = \sigma_{21} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \right] \\
&\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\
&= \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds + \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds \\
&= -\gamma(t, T), \text{ de acordo com (Rodrigues A, 2009)}
\end{aligned}$$

A partir do Lema 1.2.12 (Capítulo 1, Secção 1.2) em (Rodrigues A., 2009) vem

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right\} \mathbb{I} \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{array} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds \right\} \Phi \left( \frac{-\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \gamma(t, T)^2}{\eta(t, T)} \right) \end{aligned}$$

Sustituindo o valor esperado obtido na expressão (4.5), vem

$$\begin{aligned} & KP_n(t, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^T (S_n(t, T))^2 ds \right\} \\ & \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds \right\} \Phi \left( \frac{-\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \eta(t, T)^2}{\eta(t, T)} \right) \\ &= KP_n(t, T) \Phi(-h(t, T) + \eta(t, T)) \end{aligned}$$

(ii) A demonstração do 2º termo da *put option* europeia *standard* é similiar à anterior.

Usado equação (4) do Corolário 2.1.18 do Capítulo 2 de (Rodrigues A., 2009), temos

$$\begin{aligned} I(T)P_r(T, T) &= I(t)P_r(t, T) \frac{B_n(T)}{B_n(t)} \exp \left\{ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \left[ (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2 \right] ds \right\} \\ \iff \frac{B_n(t)}{B_n(T)} I(T) &= I(t)P_r(t, T) \exp \left\{ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_t^T \left[ (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2 \right] ds \right\} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{B_n(t)}{B_n(T)} I(T) \mathbb{I}_{\{I(T) \leq K\}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ I(t)P_r(t, T) \exp \left\{ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) - \frac{1}{2} \int_t^T \left[ (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2 \right] ds \right\} \right. \\ & \quad \left. \mathbb{I} \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{array} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= I(t)P_r(t, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^T \left[ (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2 \right] ds \right\} \\ & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right\} \right. \\ & \quad \left. \mathbb{I} \left\{ \begin{array}{l} - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \\ \leq -\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{KP_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \eta^2(t, T) - \gamma(t, T) \end{array} \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

O vetor aleatório  $\left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s), \right.$   
 $\left. - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)$  é independente da  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  e segue uma distribuição Normal bivariada com o vetor média  $\mu$  e a matriz de covariâncias  $\Sigma$ :

$$\mu = [\mu_1 \quad \mu_2] \text{ e } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right] = 0 \\ \mu_2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right] = 0 \\ \sigma_{11}^2 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right)^2 \right] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\ &= \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \\ \sigma_{22}^2 &= \eta^2(t, T) \text{ (calculado em (i))} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right. \\ &\quad \left. \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \left( - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \right] \\ &\quad + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds \\
&\quad + \rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds + \rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \\
&= \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds \\
&\quad - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \\
&= \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T ((S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds \\
&\quad - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds \quad - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds \\
&\quad + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds) - \left( \int_t^T S_n(s, T) S_n(s, T) ds \right. \\
&\quad \left. - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds \right) \\
&= \eta(t, T)^2 - \gamma(t, T) \tag{4.7}
\end{aligned}$$

A partir do Lema 1.2.12 (Capítulo 1, Secção 1.2) em (Rodrigues A., 2009), e da expressão (4.7), o valor esperado da expressão (4.6), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
&\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T [(S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s)] + (\sigma_I(s))^2 ds \right\} \\
&\quad \Phi \left( \frac{-\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \right) + \frac{1}{2} \eta(t, T)^2 - \gamma(t, T) - (\eta(t, T))^2 - \gamma(t, T)}{\eta(t, T)} \right) \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T [(S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \\
&\quad \Phi \left( \frac{-\log \left( \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \right) - \frac{1}{2} \eta(t, T)^2}{\eta(t, T)} \right) \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T [(S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \Phi(-h(t, T))
\end{aligned}$$

Sustituindo o valor esperado obtido na expressão (4.6), vem

$$\begin{aligned}
&I(t)P_r(t, T) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^T [(S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \\
&\quad \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_t^T [(S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI} S_r(s, T) \sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \Phi(-h(t, T)) \\
&= I(t)P_r(t, T) \Phi(-h(t, T))
\end{aligned}$$

Combinando as duas expressões obtidas chegamos ao resultado pretendido.  $\square$

## CAPÍTULO 5

### Swaps de inflação

O mercado dos títulos associados à inflação tem vindo a crescer como é o caso dos *swaps* de inflação. O mercado para os *swaps* de inflação ainda não está completamente consistente, estando ainda em desenvolvimento.

Apesar das obrigações indexadas à inflação (obrigações *TIPS*) oferecerem proteção contra a inflação aos seus titulares, estes podem não conseguir obter o montante que desejam a partir deste tipo de obrigação, devido à divergência entre as preferências individuais dos investidores.

Uma solução para compensar o emissor da diferença entre o montante desejado e o montante recebido é a venda de uma obrigação de taxa nominal fixa, usando um *swap* fixo real, exposto às taxas reais/ à inflação. Isto é, o emissor de uma obrigação associada a um índice, pode trocar essa obrigação por uma estrutura de anuidades, que se aproxima mais dos *cash flows* esperados pelo emissor, através da compra de um *swap* fixo real. Ou seja, *swaps* de inflação consistem na troca de um pagamento que cresce a uma taxa de juro fixa, taxa *swap*, por um fluxo de pagamento que cresce a uma taxa variável, a taxa de inflação.

#### 5.1. Notação, Definições e Pressupostos

DEFINIÇÃO 5.1. *Seja  $I(t_0) > 0$  o valor no momento  $t_0$  do índice de inflação de referência.*

*Um swap de inflação, emitido no momento  $t_0$  com maturidade  $T$ , cotação  $r$  e um valor facial  $A$ , é um contrato em que o comprador (holder) paga, no momento  $t$ , um cash flow variável, dependente da inflação no momento  $T$ , i.e.,*

$$A \left[ \frac{I(T)}{I(t_0)} - 1 \right] \quad (5.1)$$

*e recebe, em cada momento  $t$ , um cash flow fixo*

$$A[(1+r)^{(T-t_0)} - 1] \quad (5.2)$$

NOTA 5.1. *Na ótica do comprador do swap de inflação, o retorno do swap de inflação na maturidade  $T$  é dado por*

$$IS_T(t_0, T) = A[(1+r)^{(T-t_0)} - 1] - A \left[ \frac{I(T)}{I(t_0)} - 1 \right] \quad (5.3)$$

A partir do valor do *swap* de inflação na maturidade  $T$ , podemos derivar o preço do *swap* de inflação em qualquer momento  $t$ . Neste sentido, para qualquer momento  $t$ , é possível estabelecer a seguinte relação:

NOTA 5.2. Para qualquer momento  $t$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , a taxa fixa do swap  $r$ , é tal que

$$(1+r)^{(T-t)} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I(T)|\mathcal{F}_t]}{I(t)} \quad (5.4)$$

DEMONSTRAÇÃO. No momento  $t$ , data de início do *swap*, o valor do *swap* de inflação é 0 uma vez que, nesse momento, não houve qualquer troca entre o comprador e o vendedor de *swap* de inflação,

$$\begin{aligned} IS_t(t, T) &= P_n(t, T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[IS_T(t, T)|\mathcal{F}_t] = 0 \\ \iff P_n(t, T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[A[(1+r)^{(T-t)} - 1] - A\left[\frac{I(T)}{I(t)} - 1\right]|\mathcal{F}_t] &= 0 \\ \iff \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(1+r)^{(T-t)} - \frac{I(T)}{I(t)}|\mathcal{F}_t] &= 0 \\ \iff (1+r)^{(T-t)} &= \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I(T)|\mathcal{F}_t]}{I(t)} \end{aligned}$$

□

## 5.2. Determinação do *fair value* da taxa fixa do *swap* de inflação

Agora estamos em condições de calcular o valor da cotação  $r$  capitalizada do momento  $t$  à maturidade  $T$ . Com essa finalidade, começamos por introduzir um resultado auxiliar.

O valor esperado do índice de inflação na maturidade  $T$  vai ser utilizado para avaliar o valor do *swap* de inflação.

PROPOSIÇÃO 5.1. Para  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I(T)|\mathcal{F}_t] &= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T)S_r(s, T) ds \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T)\sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T)\sigma_I(s) ds \right\} \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração da Proposição 5.1. é dada por Rodrigues, A. (2009) (Chapter 3, Proposition 3.1.2.), mas é agora resumida para conveniência do leitor. Substituindo  $I(t)$  pela equação equação (7) do Corolário 2.1.18 do Capítulo 2 (Secção 2.1) da dissertação (Rodrigues A., 2009), vem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I(T)|\mathcal{F}_t] &= \\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \int_t^T -S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_t^T [-(S_n(s, T))^2 + (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI}S_r(s, T)\sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^T [-(S_n(s, T))^2 + (S_r(s, T))^2 + 2\rho_{rI}S_r(s, T)\sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \\ &\quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ -\int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$



O vetor aleatório  $\left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s), \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s), \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)$  é independente da  $\sigma$ -álgebra  $F_t$  e segue uma distribuição Normal Multivariada com o vetor média  $\mu$  e a matriz das variâncias e covariâncias  $\Sigma$ :

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}^2 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mu_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right] = 0$$

$$\mu_2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right] = 0$$

$$\mu_3 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right] = 0$$

$$\sigma_{11}^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right)^2 \right] = \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds$$

$$\sigma_{22}^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right)^2 \right] = \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds$$

$$\sigma_{33}^2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right)^2 \right] = \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds$$

$$\sigma_{12} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \right] = \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds$$

$$\sigma_{13} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] = \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds$$

$$\sigma_{23} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \left( \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) \right) \left( \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right) \right] = \rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds$$

O valor esperado contido na equação (5.5) pode ser interpretado como a função geradora de momentos da normal Multivariada, dada pela Proposição 2.4. do Capítulo 2, para o vetor  $(-1, 1, 1)$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ - \int_t^T S_n(s, T) dW_n(s) + \int_t^T S_r(s, T) dW_r(s) + \int_t^T \sigma_I(s) dW_I(s) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds + \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \right] \right\} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na equação (5.5), surge o resultado pretendido

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[I(T)|\mathcal{F}_t] &= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_t^T [-(S_n(s, T))^2 + (S_r(s, T))^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\rho_{rI} S_r(s, T)\sigma_I(s) + (\sigma_I(s))^2] ds \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_t^T (S_r(s, T))^2 ds + \int_t^T (\sigma_I(s))^2 ds - 2\rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T)S_r(s, T) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T)\sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T)\sigma_I(s) ds \right] \right\} \\
&= \frac{I(t)P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T)S_r(s, T) ds \right. \\
&\quad \left. - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T)\sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T)\sigma_I(s) ds \right\}
\end{aligned}$$

□

A partir do resultado acima, é possível provar que a taxa fixa do *swap*,  $r$ , observada no momento  $t$  capitalizada até à maturidade  $T$ , satisfaz a seguinte equação

PROPOSIÇÃO 5.2. *A taxa  $r$  cotada no momento  $t$  para o swap de inflação com vencimento no momento  $T$  tem de ser tal que*

$$\begin{aligned}
(1+r)^{(T-t)} &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \left( \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T)S_r(s, T) ds \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T)\sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T)\sigma_I(s) ds \right) \right\} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. O resultado surge combinando a esperança média do índice de inflação na maturidade  $T$  dada pela Proposição 5.1. com a Nota 5.2.. □

## Estimação do preço de obrigações TIPS

O objetivo deste capítulo compreende a estimação dos parâmetros necessários à determinação do preço das obrigações *TIPS*, especificado no Capítulo 4 (Secção 4.2., Definição 4.2.). Além disso, pretende, posteriormente, calcular o preço das obrigações *TIPS* a partir dos parâmetros estimados e avaliar o desempenho das duas abordagens descritas abaixo.

O processo de estimação dos parâmetros vai ser elaborado a partir de duas abordagens distintas: a abordagem Jarrow & Yildirim (2003), a partir de agora denominada apenas como abordagem *J&Y* e a abordagem *Swaps* de Inflação, uma abordagem baseada na primeira, complementada com a informação dos *swaps* de inflação. Dado que tanto as obrigações *TIPS* como os *swaps* de inflação são derivados que visam proteger os seus compradores da inflação, é de esperar que com os parâmetros estimados a partir dos *swaps* de inflação se obtenha um melhor desempenho do modelo de *J&Y* na estimação do preço das obrigações *TIPS*.

Seguindo a abordagem *J&Y*, o modelo HJM a 3 fatores introduzido no Capítulo 3 é utilizado na estimação dos parâmetros a partir das taxas de juro *forward* instantâneas reais e nominais. A partir deste modelo são, então, estimados os parâmetros de volatilidade associados às taxas *forward* reais e nominais ( $\alpha_r$ ,  $\sigma_r$ ,  $\alpha_n$  e  $\sigma_n$ ) bem como os parâmetros associados à inflação ( $\sigma_I$ ,  $\rho_{rI}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{rn}$ ).

Na segunda abordagem, os parâmetros de volatilidade vão corresponder àqueles que foram calculados na abordagem de *J&Y*. No entanto, contrariamente ao modelo referido imediatamente antes, os parâmetros dependentes da inflação serão estimados com base na expressão do *fair value* para a cotação fixa do *swap* de inflação.

Para o processo de estimação foi considerado um horizonte temporal de, aproximadamente, 5 anos, [30/09/2018, 21/07/2023]. O horizonte temporal escolhido é diferente do utilizado no trabalho de *J&Y* por duas razões: queremos avaliar a eficácia do modelo em dados atuais; e por outro lado, aumentámos o horizonte temporal de forma a atenuar os efeitos evidentes da pandemia Covid (início 2020 – maio 2023) bem como o aumento abrupto do índice de inflação que se verificou no ano de 2022 (resultante da invasão da Ucrânia pela Rússia).

### 6.1. Abordagem Jarrow & Yildirim

#### 6.1.1. Parâmetros de volatilidade

Os parâmetros de volatilidade associados às taxas *forward* instantâneas nominais e reais, descritas no Capítulo 3 (Secção 3.2., Definições 3.10. e 3.11.), vão ser estimados a

partir de uma regressão não-linear para a função da variância do diferencial dos fatores de desconto.

Vamos começar por especificar uma função volatilidade real a um fator. O modelo considerado para descrever a evolução da volatilidade das taxas de juro *forward* é o modelo exponencial, definido imediatamente a seguir.

DEFINIÇÃO 6.1.

$$\sigma_r(t, T) = \sigma_r e^{-\alpha_r(T-t)} \quad (6.1)$$

onde  $\sigma_r$  e  $\alpha_r$  são constantes.

Este modelo é uma extensão do modelo *Vasicek* uma vez que são utilizados dois fatores na função volatilidade. O facto de a volatilidade apresentar uma variância significativa no período em estudo leva a que seja necessária a utilização de um modelo a 2 fatores, para que exista um melhor ajustamento dos dados ao modelo.

Previamente à construção da regressão não-linear a partir da variância do diferencial dos fatores de desconto reais, é necessário aferir sobre a distribuição do diferencial dos fatores de desconto reais. A partir da expressão (6.1), chega-se à conclusão que o retorno de uma obrigação de cupão-zero real segue uma distribuição Normal:

PROPOSIÇÃO 6.1.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} - \left[ r_r(t) + \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] \Delta t \\ \sim \mathcal{N} \left[ 0, \left( \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right)^2 \Delta t \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

DEMONSTRAÇÃO. Escrevendo a equação (3.24) na forma discreta temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} &= \left[ r_r(t) + \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] \Delta t - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t) \\ \iff \frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} - \left[ r_r(t) + \rho_{rI} \sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \right] \Delta t &= - \int_t^T \sigma_r(t, s) ds \Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t) \end{aligned}$$

Sabemos que  $W_r^{\mathbb{Q}}(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ .

Como  $\int_t^T \sigma_r(t, s) ds$  é uma função determinística de  $t$ ,  $-\int_t^T \sigma_r(t, s) ds \Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t)$  seguirá a mesma distribuição de  $\Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t)$ :

$$\Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t) = W_r^{\mathbb{Q}}(t + \Delta t) - W_r^{\mathbb{Q}}(t)$$

Pela Definição 2.5 do Capítulo 2,

$$\begin{aligned} \Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t) &\sim \mathcal{N}[0 - 0, t + \Delta t - t - 2Cov(W_r^{\mathbb{Q}}(t + \Delta t), W_r^{\mathbb{Q}}(t))] \\ \iff \Delta W_r^{\mathbb{Q}}(t) &\sim \mathcal{N}[0, \Delta t] \end{aligned}$$

dado que  $W_t$  tem incrementos independentes, também pela Definição 2.5

□

Nesta tese vão ser estudados dados diários (vamos considerar  $\Delta t = 1/360$ ) e por isso, o retorno esperado da obrigação,  $(r_r(t) + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds)\Delta t$ , é relativamente pequeno quando comparado com o seu desvio padrão,  $(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds)\sqrt{\Delta t}$  e portanto, poderá ser omitido no processo de estimação sem provocar erros significativos. Esta hipótese simplifica o processo de estimação da variância dos factores de desconto reais uma vez que não exige a estimação da volatilidade do índice de inflação nem da correlação entre o índice de inflação e a taxa de juro real.

Dadas as expressões (6.1) e (6.2), a variância dos preços de uma obrigação de cupão-zero real, no intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$  é dada pela Proposição:

PROPOSIÇÃO 6.2.

$$\text{var}\left(\frac{\Delta P_r(t + \Delta t, T)}{P_r(t, T)}\right) = \frac{\sigma_r^2(e^{-\alpha_r(T-t)} - 1)^2 \Delta t}{\alpha_r^2} \quad (6.3)$$

DEMONSTRAÇÃO. Omitindo o valor esperado do retorno da obrigação de cupão-zero real,  $(r_r(t) + \rho_{rI}\sigma_I(t) \int_t^T \sigma_r(t, s) ds)\Delta t$ , podemos considerar a seguinte aproximação:

$$\frac{\Delta P_r(t, T)}{P_r(t, T)} \sim \mathcal{N}\left[0, \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds\right)^2 \Delta t\right]$$

Da hipótese acima, resulta imediatamente,

$$\text{var}\left(\frac{\Delta P_r(t + \Delta t, T)}{P_r(t, T)}\right) = \left(\int_t^T \sigma_r(t, s) ds\right)^2 \Delta t$$

Substituindo  $\sigma_r(t, s)$  de acordo com a expressão (6.1),

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\frac{\Delta P_r(t + \Delta t, T)}{P_r(t, T)}\right) &= \left(\int_t^T \sigma_r e^{-\alpha_r(s-t)} ds\right)^2 \Delta t = \left(\left[-\frac{\sigma_r}{\alpha_r} e^{-\alpha_r(s-t)}\right]_t^T\right)^2 \Delta t \\ &= \left(\left[-\frac{\sigma_r}{\alpha_r} e^{-\alpha_r(T-t)}\right]_t^T\right)^2 \Delta t = \frac{\sigma_r^2(e^{-\alpha_r(T-t)} - 1)^2 \Delta t}{\alpha_r^2} \end{aligned}$$

□

A estimação dos parâmetros  $\alpha_r$  e  $\sigma_r$  é feita, então, a partir da regressão não-linear descrita acima, dos preços das obrigações de cupão-zero reais, que correspondem aos factores de desconto das taxas de juro *forward* reais diárias, considerando que as obrigações têm um valor facial unitário.

Teoricamente, de acordo com o modelo proposto por *J&Y*, as taxas de juro *forward* instantâneas reais podem ser calculadas a partir das taxas de juro *spot* reais associadas às obrigações *TIPS* (*US TIPS*). As taxas de juro *spot* podem ser obtidas a partir dos preços das obrigações *TIPS*, através do método de *Nelson-Siegel*. Contudo, ao invés de recolher os preços das obrigações do Tesouro Americano, recolhemos diretamente, taxas de juro reais genéricas *Generic Inflation Indexed United States Government Bond* com diferentes maturidades.

Por conseguinte, a partir da plataforma de tecnologia e de dados para o mercado financeiro *Bloomberg* foram recolhidas taxas de juro reais, em base diária, a 5, 10, 20 e 30

anos, correspondentes, respetivamente a 'GTII05 Govt', 'GTII10 Govt', 'GTII20 Govt', 'GTII30 Govt', na plataforma *Bloomberg*.

Posteriormente, para cada dia foi calculado o fator de desconto real, e de seguida, a variância do retorno para cada uma das 4 maturidades. A partir das 4 observações (as variâncias para cada uma das 4 maturidades) foi realizada uma regressão não-linear, a partir da funcionalidade 'Solver' do *Microsoft Excel*, de forma a estimar os parâmetros  $\alpha_r$  e  $\sigma_r$ . É de fazer notar que foram realizadas 10 iterações para obter os parâmetros estimados a partir de 10 pontos iniciais,  $\alpha_0$  e  $\sigma_0$ , obtidos a partir de variações aleatórias dos parâmetros estimados obtidos por *J&Y*. Das 10 iterações (pares de  $\alpha_r$  e  $\sigma_r$ ), foram escolhidos os parâmetros que minimizam a soma dos erros quadráticos sobre o número total de observações - função objetivo.

De forma análoga, vamos especificar uma função volatilidade nominal a um fator, e estimar os seus parâmetros, usando uma regressão não-linear. Nesse sentido, vamos definir, mais uma vez, um modelo a um fator que descreve a volatilidade através de uma exponencial decrescente:

DEFINIÇÃO 6.2.

$$\sigma_n(t, T) = \sigma_n e^{-\alpha_n(T-t)} \quad (6.4)$$

onde  $\sigma_n$  e  $\alpha_n$  são constantes.

O processo de estimação dos parâmetros  $\alpha_n$  e  $\sigma_n$  seguiu o mesmo racional da estimação dos parâmetros  $\alpha_r$  e  $\sigma_r$ : foram estimados a partir dos fatores de desconto nominais diários e de uma regressão não-linear.

Para esse propósito, com recurso à plataforma financeira *Bloomberg*, foram obtidas taxas de juro nominais diárias *US Generic Govt*, a 2, 10, 20 e 30 anos, associadas aos seguintes índices, respetivamente, 'USGG2YR Index', 'USGG2YR Index', 'USGG2YR Index' e 'USGG2YR Index'.

Na Tabela 1 podemos encontrar os parâmetros de volatilidade estimados associados às taxas de juro reais e nominais, a partir das regressões descritas anteriormente, bem como o valor mínimo das funções objetivo obtido em cada uma das regressões, dentro de parênteses.

TABELA 1. Parâmetros de volatilidade estimados segundo a abordagem *J&Y*

$\alpha_r$	$\sigma_r$	$\alpha_n$	$\sigma_n$
0,015681	0,010048	0,012515	0,011965
(0,000000007520)	(0,000000007520)	(0,000000000059)	(0,000000000059)

Os parâmetros estimados, que se encontram na tabela acima, correspondem aos parâmetros que minimizam as funções objetivo das regressões não-lineares consideradas. O processo de estimação foi realizado a partir da função 'SOLVER' do *Microsoft Excel* apenas para 10 pontos iniciais e por isso, os parâmetros estimados são os parâmetros ótimos apenas neste contexto de estimação limitado. Existirão outros métodos mais precisos para a estimação dos mesmos parâmetros que poderão ser analisados em estudos futuros.

### 6.1.2. Parâmetros para o Índice de Inflação

Os parâmetros associados à evolução do índice de inflação CPI-U necessários à estimação dos preços das obrigações TIPS são a volatilidade da taxa de inflação,  $\sigma_I$ , que assumimos ser constante, e as correlações entre a taxa de inflação e a taxa de juro *spot* real,  $\rho_{rI}$ , a taxa de inflação e a taxa de juro *spot* nominal,  $\rho_{nI}$ , e as taxas de juro real e nominal,  $\rho_{rn}$ , e são calculados de acordo com as seguintes fórmulas, construídas para dados diários:

DEFINIÇÃO 6.3.

$$\hat{\sigma}_I = \left( \text{var} \left( \frac{\Delta I(t)}{I(t)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

$$\hat{\rho}_{rI} = \text{corr} \left( \Delta r_r(t), \frac{\Delta I(t)}{I(t)} \right) \quad (6.6)$$

$$\hat{\rho}_{nI} = \text{corr} \left( \Delta r_n(t), \frac{\Delta I(t)}{I(t)} \right) \quad (6.7)$$

$$\hat{\rho}_{rn} = \text{corr}(\Delta r_r(t), \Delta r_n(t)) \quad (6.8)$$

A volatilidade da taxa de inflação foi calculada a partir dos índices de inflação mensais e posteriormente anualizada. Para o cálculo dos parâmetros mencionados acima, vão ser utilizados os valores históricos das taxas de juro nominais e reais genéricas e o índice de inflação CPI-U. Tal como as taxas reais e nominais, os valores do índice CPI-U para o horizonte temporal considerado, foram mais uma vez recolhidos na plataforma *Bloomberg*, sendo obtidos os valores mensais do índice 'CPURNSA Index' (*US CPI Urban Consumers NSA - Not Seasonally Adjusted*), que consiste no índice CPI-U não ajustado sazonalmente.

Antes de proceder ao cálculo das correlações foi necessário realizar uma transformação dos índices de inflação mensais em índices diários, via interpolação linear. Ressalve-se que a volatilidade da taxa de inflação não foi calculada a partir do valor anualizado do desvio-padrão dos seus valores diários, que seriam obtidos por interpolação linear, uma vez que, o processo de interpolação linear é um processo determinístico e conseqüentemente, causaria um enviesamento na estimação da volatilidade da inflação.

O índice de inflação *CPURNSA* apresenta um *lag* de 2 meses, o que significa que reflete o poder de compra dos consumidores referente aos 2 meses imediatamente anteriores. Desta forma, a transformação dos dados mensais do índice de inflação em dados diários tem que ter em conta os índices de inflação referente aos 2 e 3 meses imediatamente anteriores ao mês de observação do índice, através da seguinte fórmula:

DEFINIÇÃO 6.4. *O índice de inflação diário referente ao dia  $d$  do mês  $m$  é calculado através da interpolação linear de dois índices de preços mensais,  $I(m-2)$  e  $I(m-3)$ :*

$$I(m, d) = I(m-3) + \frac{d-1}{M} (I(m-2) - I(m-3))$$

onde  $I(m)$  representa o índice de inflação observado no momento  $m$ , em base mensal  
 $M$  corresponde ao número de dias do mês  $m$

Como consequência da transformação dos dados mensais do índice de preços em dados diários e do *lag* necessário para esta conversão, houve uma "perda" de dados do índice de preços, referente aos primeiros 2 meses do horizonte temporal definido. Desta forma, o horizonte temporal para os dados diários reduz-se ao intervalo de tempo [03/12/2018, 21/07/2023]. Abaixo podemos encontrar 2 gráficos com os índices de inflação *CPURSNA* mensais e diários. Através da sua análise, podemos concluir que a tendência do índice de inflação se mantém e por isso, podemos considerar que os índices de inflação diários são viáveis na estimação das correlações entre os mesmos e as taxas reais e nominais.

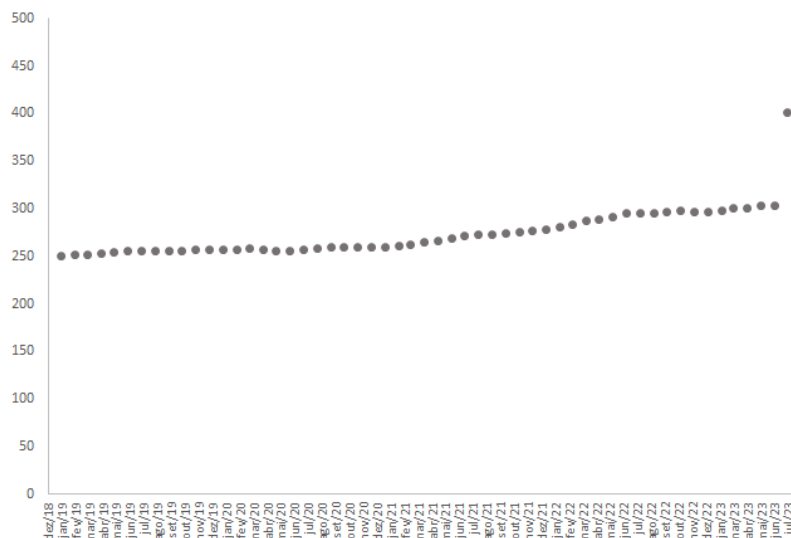


FIGURA 1. Índices de inflação *CPURSNA (US CPI Urban Consumers NSA-Not Seasonally Adjusted)* mensais

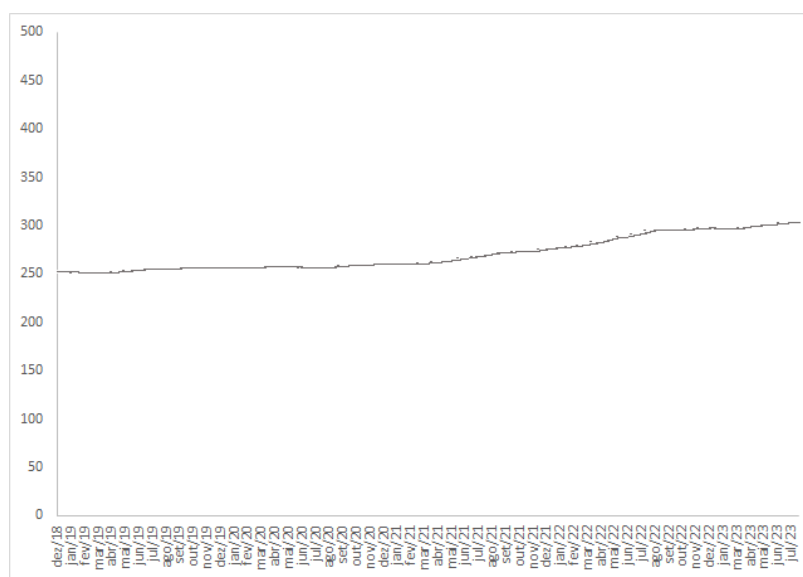


FIGURA 2. Índices de inflação *CPURSNA(US CPI Urban Consumers NSA-Not Seasonally Adjusted)* diários

De seguida é apresentada a Tabela 2 com os parâmetros para o índice de inflação.



TABELA 2. Parâmetros relativos à inflação estimados a partir de dados históricos - abordagem  $J\mathcal{E}Y$

$\sigma_I$	$\rho_{rI}$	$\rho_{nI}$	$\rho_{rn}$
0,013913	-0,039779	-0,064887	0,808455

A volatilidade da taxa de inflação estimada com base nos dados mensais do índice de inflação e posteriormente anualizada, é igual 0,0139132348. Como seria expectável, a volatilidade da taxa de inflação no horizonte temporal em estudo é elevada. A correlação negativa entre as taxas reais e as taxas de inflação já era um resultado previsível. A correlação entre as taxas de juro nominais e reais, que é bastante elevada, e a correlação negativa entre as taxas nominais e a inflação, ainda que não muito significativa, são resultados que não seriam esperados de se obter. Tais resultados poderão ser justificados pelo facto de não usar taxas de juro *spot* nominais e reais mas sim as taxas de juro nominais e reais genéricas; e devido ao aumento abrupto do índice de inflação em parte do período temporal em causa. Sob estas circunstâncias, a estimação do preço das obrigações *TIPS* a partir destes parâmetros será significativamente afetada, prevendo-se resultados inconsistentes, na próxima fase de estimação.

## 6.2. Abordagem *swaps* de inflação

Como foi dito no início do presente capítulo, na abordagem *Swaps* de inflação, são utilizados os parâmetros de volatilidades associados às taxas reais e nominais ( $\alpha_r, \sigma_r, \alpha_n$  e  $\sigma_n$ ) obtidos na estimação segundo a abordagem de  $J\mathcal{E}Y$  no presente capítulo (Secção 6.1, Subsecção 6.1.1.). Antes de estimar os restantes parâmetros, é necessário incorporar as hipóteses relativas à evolução da volatilidade das taxas *forward* reais e nominais, descritas pelas equações (6.1) e (6.4), respetivamente, na expressão do *fair value* da cotação fixa,  $r$ , do *swap* de inflação.

Vamos também assumir que a volatilidade da inflação é constante ao longo do tempo:

PROPOSIÇÃO 6.3.

$$\sigma_I(t) = \sigma_I \quad (6.9)$$

A partir dos pressupostos definidos neste capítulo é possível estabelecer a seguinte relação entre a cotação fixa do *swap* de inflação,  $r$ , e os parâmetros de volatilidade  $\alpha_n, \sigma_n, \alpha_r, \sigma_r, \sigma_I, \rho_{rI}, \rho_{nI}$  e  $\rho_{rn}$ :

PROPOSIÇÃO 6.4.

$$(1+r)^{T-t} = \frac{P_r(t,T)}{P_n(t,T)} \exp \left\{ \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_n(T-t)}}{2\alpha_n} + \frac{2(e^{-\alpha_n(T-t)} - 1)}{\alpha_n} + (T-t) \right] \right. \\ \left. - \rho_{nr} \frac{\sigma_n \sigma_r}{\alpha_n \alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-(\alpha_n + \alpha_r)(T-t)}}{\alpha_n + \alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right] \right. \\ \left. + \rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{1 - e^{-\alpha_n(T-t)}}{\alpha_n} - (T-t) \right] - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} - (T-t) \right] \right\} \quad (6.10)$$

DEMONSTRAÇÃO. Considerando as equações (6.1) e (6.4) para descrever  $\sigma_k(t, T)$ ,  $k \in \{n, r\}$ , e:

$$S_k(t, T) = \int_t^T \sigma_k(t, s) ds = \int_t^T \sigma_k e^{-\alpha_n(s-t)} ds = -\frac{\sigma_k}{\alpha_n} e^{-\alpha_n(s-t)} \Big|_t^T \quad (6.11)$$

Substituindo agora  $S_k(t, T)$ ,  $k \in \{n, r\}$ , e  $\sigma_I(t, T) = \sigma_I$ , no resultado da Proposição 5.2.,

$$\begin{aligned} (1+r)^{T-t} &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \int_t^T (S_n(s, T))^2 ds - \rho_{nr} \int_t^T S_n(s, T) S_r(s, T) ds \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nI} \int_t^T S_n(s, T) \sigma_I(s) ds + 2\rho_{rI} \int_t^T S_r(s, T) \sigma_I(s) ds \right\} \\ &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \int_t^T \left( \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) \right)^2 ds \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nr} \int_t^T \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) \frac{-\sigma_r}{\alpha_r} (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nI} \sigma_I \int_t^T \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) ds + 2\rho_{rI} \sigma_I \int_t^T \frac{-\sigma_r}{\alpha_r} (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \right\} \\ &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \int_t^T e^{-2\alpha_n(T-s)} - 2e^{-\alpha_n(T-s)} + 1 ds \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nr} \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \int_t^T (e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-s)} - e^{-\alpha_n(T-s)} - e^{-\alpha_r(T-s)} + 1) ds \right. \\ &\quad \left. + \rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \int_t^T (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) ds - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \int_t^T (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \right\} \\ &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{e^{-2\alpha_n(T-s)}}{2\alpha_n} - \frac{2e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} + s \right]_t^T \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nr} \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-s)}}{\alpha_n + \alpha_r} - \frac{e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} - \frac{e^{-\alpha_r(T-s)}}{\alpha_r} + s \right]_t^T \right. \\ &\quad \left. + \rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} - s \right]_t^T - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{e^{-\alpha_r(T-s)}}{\alpha_r} - s \right]_t^T \right\} \\ &= \frac{P_r(t, T)}{P_n(t, T)} \exp \left\{ \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_n(T-t)}}{2\alpha_n} + \frac{2(e^{-\alpha_n(T-t)} - 1)}{\alpha_n} + (T-t) \right] \right. \\ &\quad \left. - \rho_{nr} \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-t)}}{\alpha_n + \alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{1 - e^{-\alpha_n(T-t)}}{\alpha_n} - (T-t) \right] - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-\alpha_r(T-t)}}{\alpha_r} - (T-t) \right] \right\} \end{aligned}$$

□

A estimação dos parâmetros em falta,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$ ,  $\rho_{rI}$  e  $\sigma_I$ , será feita através de uma regressão não-linear da equação (6.10), de forma a minimizar a soma dos resíduos ao quadrado sobre o número total de observações. Como parâmetros iniciais considere os parâmetros obtidos de acordo com a abordagem  $J\mathcal{E}Y$ , os parâmetros de inflação obtidos

na secção anterior e valores razoáveis perante a informação financeira da realidade, e outros parâmetros iniciais que resultam de variações aleatórias dos anteriores.

De seguida é apresentada a Tabela 3 com os parâmetros para o índice de inflação, agora estimados a partir da informação dos *swaps* de inflação, para os quais a função objetivo obtida é igual a 0,008495118.

TABELA 3. Parâmetros associados à inflação estimados de acordo com a abordagem *Swaps* de Inflação

$\sigma_I$	$\rho_{rI}$	$\rho_{nI}$	$\rho_{rn}$
0,401305	0,232181	0,432183	1,000000

A volatilidade da taxa de inflação estimada é 0,401305, significativamente maior do que a volatilidade da taxa de inflação estimada de acordo com a abordagem *J&Y* (Secção 6.1., Subsecção 6.1.2.). A cotação fixa dos *swaps* de inflação está diretamente relacionada com a volatilidade do índice de inflação esperada. De facto, a função dos *swaps* de inflação é proteger o seu comprador da variação da inflação. Quando é expectável que a volatilidade da inflação suba no futuro, a cotação fixa (taxa que o comprador deste produto financeiro recebe em cada momento), tende a subir, de forma a compensar a taxa variável do *swap*, suportada pelo emissor do *swap*. O período em estudo, [30/09/2018, 21/07/2023], é caracterizado por uma instabilidade do índice de inflação, que se reflete numa elevada volatilidade do mesmo: verifica-se um pico local em março de 2020 (início do contexto pandémico COVID-19) e a partir do fim desse mesmo ano pode observar-se uma tendência crescente do índice de inflação ao longo do tempo. Por outro lado, desde o começo do segundo semestre de 2023 até à data corrente constata-se uma oscilação do índice de inflação. Durante este período verificou-se um aumento das cotações fixas dos *swaps* de inflação, como consequência da alta volatilidade do índice de inflação verificado e do aumento da volatilidade do índice de inflação expectável no futuro. Em suma, a cotação fixa dos *swaps* de inflação reflete a volatilidade do índice de inflação esperada. O facto da volatilidade do índice de inflação estimado a partir do *fair value* das cotações fixas dos *swaps* de inflação capitalizadas, para o período em questão, ser superior ao realmente registado, poderá significar que no cálculo das cotações fixas se tenha sobre-estimado as variações do índice de inflação futuras.

A correlação entre as taxas de juro nominais e reais assume o valor máximo de correlação 1, apoiando o elevado valor do mesmo parâmetro no processo de estimação anterior. No processo de estimação dos parâmetros verificou-se uma tendência para a correlação entre as taxas de juro nominais e reais assumirem o valor 1. Tal resultado é absurdo uma vez que, quando a taxa de inflação aumenta, verificam-se variações das taxas reais superiores às da taxas nominais, sendo que as variações destas últimas podem mesmo chegar a ser negativas. Adicionalmente, a correlação entre as taxas reais e as taxas de inflação é positiva e tal relação é incoerente com o que acontece realmente no mercado financeiro. As estimações não plausíveis das correlações entre as taxas de juro nominais e reais e entre as taxas reais e as taxas de inflação estão muito provavlemente interligadas. O facto do processo de estimação utilizado neste capítulo estar a extrapolar

o valor da correlação entre as taxas de juro nominais e reais conduz a uma estimação, também, incoerente da correlação entre as taxas reais e a taxa de inflação. Em relação à correlação entre as taxas nominais e a inflação estimada, esta é positiva e toma um valor considerável, o que vai de acordo com as expectativas. Elevados aumentos das taxas de inflação resultam numa subida das taxas nominais, por parte dos bancos centrais e dos mercados financeiros, com o objetivo de compensarem os investidores pelo aumento do custo de vida devido à inflação.

Apesar de segundo a abordagem *Swaps* de inflação se obter uma correlação entre as taxas nominais e a inflação mais viável, a estimação dos restantes parâmetros obtida segundo *J&Y* parece ser mais coerente com a realidade. No entanto, não sabendo *a priori*, o impacto de cada um dos parâmetros na estimação do preço das obrigações *TIPS*, não é possível antecipar qual das abordagens desempenhará uma melhor performance no processo de *pricing* das obrigações *TIPS*.

### 6.3. Estimação do preço das obrigações *TIPS*

Esta secção submete a teste a validade das abordagens *J&Y* e *Swaps* de inflação, descritas nas Secções 6.1. e 6.2., respetivamente, através da estimação do preço das obrigações *TIPS* a partir dos parâmetros de volatilidade  $\alpha_n$ ,  $\sigma_n$ ,  $\alpha_r$ ,  $\sigma_r$  e dos parâmetros relacionados com o índice de inflação,  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{nr}$ , de acordo com a fórmula de *pricing* das obrigações *TIPS* da equação (4.1) (Capítulo 4, Secção 4.2), caso não se tenha em consideração a deflação, ou caso contrário, a equação (4.2) (Capítulo 4, Secção 4.2). Para além dos parâmetros mencionados acima, é necessário à estimação destas obrigações, os índices de inflação em base diária, obtidos a partir de interpolação linear, como será detalhado ao longo deste capítulo; bem como os factores de desconto reais e nominais para diferentes maturidades, que serão estimados através da interpolação linear dos factores de desconto reais e nominais disponíveis, a 10, 20 e 30 anos. Para esse propósito, foi recolhido o conjunto de preços das obrigações *TIPS*, disponíveis na plataforma *Bloomberg* à data da referência 21/07/2023. Além dos preços recolhidos, *ask price* e *bid price*, foram obtidas outras informações relevantes ao cálculo do *fair value* das obrigações *TIPS* à data de referência, como a taxa de cupão (*coupon*), a frequência de pagamentos de cupão, a data de emissão (*issue date*), a data de pagamento do primeiro cupão e a data de maturidade. No total foram recolhidas 51 obrigações *TIPS*. Sob estas, foram aplicados três critérios de seleção, relativos à data de emissão da obrigação *TIPS*: 03/12/2018 < data de emissão < 21/07/2023; e esta data tem que ser dia da semana. Foi necessário aplicar estes critérios ao conjunto de obrigações *TIPS* recolhidas dado o facto de apenas existirem índices de inflação diários calculados para os dias da semana e para o horizonte temporal [03/12/2018, 21/07/2023]. Como consequência, o conjunto da nossa amostra passou a ser constituído por 23 obrigações.

Antes de proceder à estimação dos preços das obrigações *TIPS* a partir dos parâmetros estimados anteriormente, é necessário escrever a fórmula de *pricing* das obrigações *TIPS*,

assumindo as hipóteses mencionadas nas equações (6.1), (6.4) e (6.11). A única função que depende destes parâmetros é  $\eta(t, T)$ , componente da *put option*:

PROPOSIÇÃO 6.5. *A fórmula de estimação da função  $\eta(t, T)^2$ , descrita pela equação (4.4) (Capítulo 4, Secção 4.2.), a partir dos parâmetros  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{rI}$ , é dada por:*

$$\begin{aligned} \eta^2(t, T) = & \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_n(T-t)}}{2\alpha_n} + \frac{2(e^{-\alpha_n(T-t)} - 1)}{\alpha_n} + (T-t) \right] \\ & + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_r(T-t)}}{2\alpha_r} + \frac{2(e^{-\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} + (T-t) \right] + \sigma_I^2(T-t) \\ & - 2\rho_{nr} \frac{\sigma_n \sigma_r}{\alpha_n \alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-t)}}{\alpha_n + \alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right] \\ & - 2\rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + (T-t) \right] + 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

DEMONSTRAÇÃO. Substituindo  $S_k(t, T)$ ,  $k \in \{n, r\}$ , pela expressão (6.11) da Secção 6.2, na equação (4.4) (Capítulo 4, Secção 4.2.), vem

$$\begin{aligned} \eta(t, T)^2 = & \int_t^T \left( \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) \right)^2 ds + \int_t^T \left( \frac{-\sigma_r}{\alpha_r} (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) \right)^2 ds + \int_t^T (\sigma_I)^2 ds \\ & - 2\rho_{nr} \int_t^T \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) \frac{-\sigma_r}{\alpha_r} (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \\ & - 2\rho_{nI} \sigma_I \int_t^T \frac{-\sigma_n}{\alpha_n} (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) ds + 2\rho_{rI} \sigma_I \int_t^T \frac{-\sigma_r}{\alpha_r} (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \\ = & \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \int_t^T \left( e^{-2\alpha_n(T-s)} - 2e^{-\alpha_n(T-s)} + 1 \right) ds \\ & + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \right)^2 \int_t^T \left( e^{-2\alpha_r(T-s)} - 2e^{-\alpha_r(T-s)} + 1 \right) ds + (\sigma_I)^2 \int_t^T 1 ds \\ & - 2\rho_{nr} \frac{\sigma_n \sigma_r}{\alpha_n \alpha_r} \int_t^T \left( e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-s)} - e^{-\alpha_n(T-s)} - e^{-\alpha_r(T-s)} + 1 \right) ds \\ & + 2\rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \int_t^T (e^{-\alpha_n(T-s)} - 1) ds - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \int_t^T (e^{-\alpha_r(T-s)} - 1) ds \} \\ = & \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{e^{-2\alpha_n(T-s)}}{2\alpha_n} - \frac{2e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} + s \right]_t^T \\ & + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \right)^2 \left[ \frac{e^{-2\alpha_r(T-s)}}{2\alpha_r} - \frac{2e^{-\alpha_r(T-s)}}{\alpha_r} + s \right]_t^T + \sigma_I^2 s \Big|_t^T \\ & - 2\rho_{nr} \frac{\sigma_n \sigma_r}{\alpha_n \alpha_r} \left[ \frac{e^{-(\alpha_n+\alpha_r)(T-s)}}{\alpha_n + \alpha_r} - \frac{e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} - \frac{e^{-\alpha_r(T-s)}}{\alpha_r} + s \right]_t^T \\ & + 2\rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{e^{-\alpha_n(T-s)}}{\alpha_n} - s \right]_t^T - 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{e^{-\alpha_r(T-s)}}{\alpha_r} - s \right]_t^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta(t, T)^2 = & \left( \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_n(T-t)}}{2\alpha_n} + \frac{2(e^{-\alpha_n(T-t)} - 1)}{\alpha_n} + (T-t) \right] \\
& + \left( \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \right)^2 \left[ \frac{1 - e^{-2\alpha_r(T-t)}}{2\alpha_r} + \frac{2(e^{-\alpha_r(T-t)} - 1)}{\alpha_r} + (T-t) \right] + \sigma_I^2(T-t) \\
& - 2\rho_{nr} \frac{\sigma_n \sigma_r}{\alpha_n \alpha_r} \left[ \frac{1 - e^{-(\alpha_n + \alpha_r)(T-t)}}{\alpha_n + \alpha_r} + \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right] \\
& - 2\rho_{nI} \sigma_I \frac{\sigma_n}{\alpha_n} \left[ \frac{e^{-\alpha_n(T-t)} - 1}{\alpha_n} + (T-t) \right] + 2\rho_{rI} \sigma_I \frac{\sigma_r}{\alpha_r} \left[ \frac{e^{-\alpha_r(T-t)} - 1}{\alpha_r} + (T-t) \right]
\end{aligned}$$

□

Nas tabelas mencionadas de seguida, podemos observar o preço *mid* (média dos *ask price* e *bid price* recolhidos) das obrigações *TIPS* selecionadas ( $P$ ), o valor dos *accrued interests* ( $AI$ ), a soma dos cupões e o valor facial ( $C + VF$ ), os preços estimados segundo as diferentes abordagens ( $P JY/P$  ajustado  $JY$  e  $P SI$ ) e respetivos erros de estimação, sendo que *Erro*, que corresponde ao erro percentual de estimação e *Erro2* ao erro quadrático. É importante salientar que nos casos em que os valores das *put option*, sobre o índice de inflação e com preço de exercício igual ao índice de inflação na data de emissão da obrigação, estimados são inferiores a zero, resultado absurdo, a análise das respetivas obrigações será excluída do nosso estudo. Tal resultado poderá ser justificado pelo facto de as estimações realizadas anteriormente serem pouco consistentes.

A Tabela 10 do Anexo E (Estimação de preços das obrigações *TIPS* segundo a abordagem *Jarrow & Yildirim*) permite analisar o preço das obrigações *TIPS* segundo a abordagem  $J\&Y$  ( $P JY$ ), que exclui a possibilidade de deflação, pelo que o preço das mesmas não dependerá da estimação das *put option*. A comparação entre o preço das obrigações *TIPS* ( $P$ ) versus o preço das obrigações *TIPS* estimados segundo a abordagem  $J\&Y$  ( $P JY$ ) versus o preço das obrigações *TIPS* estimados segundo a abordagem  $J\&Y$ , considerando o risco de deflação, isto é, onde o valor facial é ajustado ao valor de uma *put option* ( $P$  ajustado  $JY$ ), não vai ser realizada uma vez que, os valores obtidos para as *put options* foram todos negativos, para a última abordagem.

A estimação do preço das obrigações *TIPS* segundo a abordagem  $J\&Y$  corresponde a um erro de estimação médio de, aproximadamente, 20,40%; e a soma dos erros quadráticos é igual a 9555,82, aproximadamente.

Quando adicionamos a *put* no processo de estimação, de forma a ajustar o valor facial das obrigações, caso se verifique deflação no período de vida das mesmas, obtemos valores negativos para a mesma, para todas as obrigações consideradas, pelo que não é válido calcular o valor facial das obrigações ajustado à mesma, e consequentemente, não é possível estimar o preço das *TIPS* para a abordagem  $J\&Y$ , considerando a deflação.

A impossibilidade de calcular o preço das obrigações *TIPS* segundo a abordagem  $J\&Y$ , considerando também o cenário de deflação, pode ser justificada pela obtenção de parâmetros estimados inconsistentes, como são o caso da correlação entre as taxas nominais e as taxas de inflação, que toma o valor negativo de -0,06488758, e da correlação entre as taxas nominais e reais, estimado a 0,80845509. Num período temporal em que

se verifica uma tendência crescente do índice de inflação, torna-se inadmissível considerar uma correlação positiva forte entre as taxas nominais e reais e uma relação negativa entre a taxa de inflação e a taxa nominal, pelas razões já mencionados anteriormente. Por sua vez, estas estimações pouco robustas e incoerentes com o mundo real, não nos permitem estimar o preço das *put option*.

A Tabela 12 do Anexo F (Estimação de preços das obrigações *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de Inflação) permite analisar o preço das obrigações *TIPS* estimados segundo a abordagem *Swaps* de Inflação (*P SI*). Nesta abordagem é considerada a possibilidade de ocorrência de diminuição de inflação e portanto, o valor facial é estimado de forma a ser ajustado à *put option*. Neste caso, a *put option* é obtida a partir dos parâmetros estimados segundo a abordagem *Swaps* de Inflação (Secção 6.3.), presentes no parâmetro  $\eta(t, T)^2$ , estimado segundo a expressão (6.12).

A estimação do preço das obrigações *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de inflação corresponde a um erro de estimação médio de, aproximadamente, 38,57%; e a soma dos erros quadráticos é igual a 27879,29, aproximadamente.

Apesar de sob a abordagem *Swaps* ser possível obter o valor das *put options*, a partir dos parâmetros de inflação estimados,  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{nr}$ , através das cotações fixas dos *swaps* de inflação, a *performance* deste modelo, mais completo que contempla a possibilidade de ocorrer deflação durante a vida da obrigação, diminui, relativamente ao modelo anterior. O erro médio de estimação, em percentagem, aumenta de 20,40% para 38,57%; o que representa uma diferença considerável na capacidade de estimação das duas abordagens na determinação do preço das obrigações *TIPS*.

Os parâmetros de inflação,  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{nr}$ , foram estimados segundo a abordagem *Swaps* de Inflação, a partir de uma regressão não-linear, onde foram usadas apenas 4 observações. Deste modo, os últimos parâmetros poderão não ser tão fidedignos e daí a obtenção de preços pouco coerentes com a realidade.

Numa tentativa de explorar a capacidade dos parâmetros de inflação,  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{nr}$ , estimados segundo a abordagem *Swaps* de Inflação, e de obter melhores resultados usando a informação dos *swaps* de inflação, foram estimados os preços das obrigações *TIPS* a partir de parâmetros alternativos, isto é, parâmetros obtidos nas iterações do processo de regressão não-linear, que não minimizam a função objetivo mas que parecem plausíveis para a estimação do preço das obrigações *TIPS*. É de referir que as suas funções objetivo são similares à função objetivo ótima, pelo que não se esperam resultados ilógicos. Além disso, a escolha dos conjuntos de parâmetros implicou que se verificasse a seguinte condição: nenhuma das correlações toma um valor extremo (-1 ou 1), com o objetivo de obter melhores resultados na estimação do preço das obrigações *TIPS*.

Na Tabela 4 são apresentados os 4 conjuntos de parâmetros alternativos de estimação do preço das obrigações *TIPS* bem como o respetivo valor da função objetivo (FO).

TABELA 4. Parâmetros estimados alternativos

Alternativa	$\sigma_I$	$\rho_{rI}$	$\rho_{nI}$	$\rho_{rn}$	FO
1	0,070410	-0,325031	0,161406	0,825667	0,010079
2	0,163666	-0,630366	0,556727	-0,524243	0,042694
3	0,171430	-0,429804	-0,158284	0,568710	0,013388
4	0,550981	-0,153620	-0,076581	0,576930	0,014407

Previamente à demonstração dos resultados associados aos parâmetros alternativos acima, devemos olhar para valores estimados para as *put option* na Tabela 13 do Anexo G, de forma a selecionar apenas as obrigações admissíveis a análise do desempenho da abordagem *Swaps* de inflação no processo de estimação das obrigações *TIPS*. E podemos concluir que o conjunto de parâmetros de inflação,  $\sigma_I$ ,  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$  e  $\rho_{nr}$ , alternativos 1, não permitem a estimação do preço das obrigações *TIPS*; os parâmetros relativos à inflação associados às alternativas 2 e 4, permitem a estimação de parte das obrigações consideradas em estudo e por fim, a alternativa 3 permite o cálculo do preço de todas as obrigações *TIPS*. Assim, apenas serão apresentadas as tabelas relativas aos métodos de estimação alternativos 2,3 e 4.

De forma a analisar o desempenho dos 4 grupos de parâmetros relativos à inflação e calculados a partir dos *Swaps de Inflação*, apresenta-se a seguinte tabela, onde **N** representa o número de obrigações cujo preço é admissível de ser calculado:

TABELA 5. Parâmetros estimados alternativos

Alternativa	N	Erro médio
1	0	-
2	8	0,1835
3	23	0,5038
4	7	0,1770

Podemos observar os resultados das abordagens alternativas 2, 3 e 4, através das tabelas, do Anexo G, Tabela 14, Tabela 15 e Tabela 16, respetivamente. Com os parâmetros relativos à Tabela 15, o erro médio de estimação do preço das obrigações *TIPS* subiu ligeiramente, em relação à estimação original, de 38,57% para 50,38%. Por sua vez, nas tabelas relativas aos parâmetros de inflação estimados alternativos 2 e 4 ( Tabela 14 e tabela 16 do Anexo G), podemos verificar uma diminuição significativa dos erros de estimação. Para o primeiro conjunto de parâmetros verifica-se um erro médio de estimação igual a 18,35% e, para o segundo conjunto de parâmetros, o erro médio é dado por 17,7%. Contudo, verificou-se uma perda de análises de obrigações *TIPS*, uma vez que para esses casos foram obtidos parâmetros intermédios incoerentes. Considerando o erro médio verificado para cada obrigação, podemos concluir que a abordagem *Swaps* de Inflação alternativa 4 é a que apresenta um melhor desempenho na estimação das obrigações *TIPS*. Porém, a redução da amostra de obrigações pode ser um obstáculo para retirar conclusões coerentes e plausíveis.



## CAPÍTULO 7

### Conclusões

Este trabalho é baseado no modelo proposto por Jarrow & Yildirim (2003) para a determinação do preço das obrigações *TIPS*. Este modelo considera uma abordagem Gaussiana para as taxas de juro *forward* reais e nominais e a extensão do modelo *Vasicek* (1977) para descrever a dinâmica das mesmas; e assume um movimento geométrico Browniano para o índice de inflação. Como mencionado ao longo do trabalho, foram feitos alguns ajustes/definidos alguns pressupostos em relação às abordagens *J&Y* e *Swaps* de Inflação.

Começámos por descrever, de forma breve, o modelo *J&Y* para especificar o método de determinação dos preços das obrigações *TIPS*. Adicionalmente, de acordo com Rodrigues A. (2009), ajustámos o preço das obrigações *TIPS* a uma *put option* europeia *standard*, sobre o índice de inflação, e cujo preço de exercício corresponde ao índice de inflação verificada na emissão da obrigação. Posteriormente foi desenvolvido um segundo modelo, com base no modelo descrito anteriormente, mas onde os parâmetros relacionados com a inflação, ao invés de serem estimados a partir de dados históricos, foram estimados a partir do *fair value* dos *swaps* de inflação, para diferentes datas e maturidades.

Após a especificação dos dois modelos para a determinação do preço das obrigações *TIPS*, foi avaliada a sua performance. Contrariamente a *J&Y*, no processo de construção dos preços das obrigações *TIPS*, foram utilizadas diretamente taxas de juro reais e nominais genéricas, associadas ao Tesouro Americano e com maturidades específicas.

Os parâmetros de volatilidade  $\alpha_r$ ,  $\sigma_r$  e  $\alpha_n$ ,  $\sigma_n$ , foram estimados a partir da variância dos factores de desconto reais, a partir de uma regressão não-linear, onde foram realizadas 10 iterações. Tal processo de estimação poderá resultar na estimação de parâmetros enviesados devido a duas grandes razões: considerámos taxas reais e nominais genéricas (descritas na Secção 6.3. do Capítulo 6) ao invés de taxas de juro *spot* reais e nominais, que poderiam ter sido obtidas a partir do *striping* dos preços das obrigações de cupão-zero reais e nominais, via, por exemplo, método de *Nelson-Siegel*; a regressão não-linear não nos dá o resultado ótimo uma vez que apenas foram utilizados 10 pontos iniciais, no processo de estimação. Tais *assumptions* limitam o processo de estimação dos parâmetros de volatilidade e de inflação, necessários à estimação do preço das obrigações *TIPS*, e conseqüentemente, a comparação do desempenho dos modelos de *J&Y* *versus* a abordagem *Swaps* de Inflação.

No processo de estimação não foi possível analisar estimações de preços *TIPS* para o primeiro modelo considerando o risco de deflação. Apesar de no segundo modelo ser possível obter a estimação dos mesmos, os resultados não parecem ser conclusivos.

A partir destas estimações apenas é possível concluir que a *performance* da abordagem *Swaps* de Inflação é ligeiramente melhor do que a da abordagem *J&Y* que não tem em conta o risco de deflação.

De forma a proceder a uma análise mais profunda da abordagem *Swaps* de Inflação, foram utilizados 4 conjuntos de parâmetros adicionais/alternativos, para os quais se obteve melhores resultados. Por contrapartida, houve uma perda de obrigações. De um modo geral, o segundo modelo parece ser mais eficiente na estimação do preço das obrigações *TIPS* para um conjunto de obrigações reduzido.

Com o propósito de melhorar o desempenho do mesmo, em estudos futuros deverão ser utilizados outros métodos de estimação para os parâmetros de volatilidade e parâmetros de inflação, considerando um maior número de valores iniciais, por exemplo; bem como utilizar as taxas de juro *forward* reais e nominais, tais como descritas no modelo *J&Y*. Estas taxas podem ser obtidas a partir do método de *Nelson-Siegel*.

## Referências Bibliográficas

- CME Group. (S.D.). *Calculating U.S. Treasury Pricing*. Retirado de: <https://www.cmegroup.com/education/courses/introduction-to-treasuries/calculating-us-treasury-pricing.html>
- Corporate Finance Institute. (S.D.). *Inflation Swap*. Retirado de: <https://corporatefinanceinstitute.com/resources/derivatives/inflation-swap/>
- Deacon, M., Derry, A., & Mirfendereski, D. (2023). *Inflation-indexed securities – Bonds, Swaps & Other Derivatives*. Wiley Finance.
- Jarrow, R., & Yildirim, Y. (2008). *Valuing TIPS bond futures in Jarrow-Yildirim model Using an HJM Model*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 38 (2): 337-358
- Huang, H., & Yildirim, Y. (2008). *Valuing TIPS bond futures in Jarrow-Yildirim model*. *Risk* 21(6), 101-103.
- Rodrigues, A. S. M. (2019). *The quality option for treasury inflation-linked bond futures* [Dissertação de Mestrado, ISCTE-IUL]. Repositório do ISCTE-IUL. <http://hdl.handle.net/10451/3956>
- Rodrigues, J. (2006). *Pricing TIPS under an unified affine Gaussian model for nominal and real interest rates* [Dissertação de Mestrado, ISCTE-IUL]. Repositório do ISCTE-IUL.
- Nakovski, D., & Soume, D. (2019). *The yield curve and its forecasting potential – a review of empirical literature* [Bachelor Thesis in Economics, Umeå University, Faculty of Social Sciences, Umeå School of Business and Economics (USBE)]. Digitala Vetenskapliga Arkivet: <https://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2>



## Anexos

### Anexo A

Maturidade	Var(diferencial P / P)
2	0,000001
10	0,000033
20	0,000114
30	0,000256

TABELA 1. Variâncias dos diferenciais de fatores de desconto para as taxas nominais genéricas '*US Generic Govt*'

Maturidade	Var(diferencial P / P)
5	0,000011
10	0,000032
20	0,000105
30	0,000233

TABELA 2. Variâncias dos diferenciais de fatores de desconto para as taxas reais genéricas '*Generic Inflation Indexed United States Government Bond*'

## Anexo B

ID	alpha n inicial	sigma n inicial	alpha n estimado	sigma n estimado	FO
1	1,000000	1,000000	1,645088	0,319993	0,000000
2	0,033980	0,005660	0,033064	0,015359	0,000000
3	0,013052	0,011213	0,013052	0,011213	0,000000
4	0,018056	0,008056	0,017597	0,012503	0,000000
5	0,012515	0,011965	0,012515	0,011965	0,000000
6	0,071037	0,006073	0,071037	0,006073	0,000000
7	1,036644	0,595772	1,227690	0,243851	0,000000
8	0,515681	0,354960	0,657884	0,138743	0,000000
9	0,638617	1,820106	3,682849	0,702537	0,000000
10	0,014666	0,013817	0,014916	0,012362	0,000000

TABELA 3. Iterações da regressão não-linear para a estimação dos parâmetros  $\alpha_n$  e  $\sigma_n$

ID	alpha n inicial	sigma n inicial	alpha n estimado	sigma n estimado	FO
1	1,000000000	1,000000000	1,682785744856	0,311230518559	0,000000007519
2	0,043390000	0,002990000	0,043390000000	0,002990000000	0,000000015488
3	0,398625381	0,211505993	0,575109198804	0,109682372653	0,000000007065
4	-0,002090287	0,007205813	0,002090286807	0,007205813281	0,000000003759
5	0,002028566	0,006334005	0,002028565966	0,006334005424	0,000000005855
6	0,182896408	0,060843038	0,182896408268	0,060843038220	0,000000021053
7	0,015681916	0,010048086	0,015681916361	0,010048086089	0,000000001435
8	0,007511912	0,007057781	0,007511912370	0,007057781406	0,000000005321
9	0,988016115	-1,052281518	1,678268997161	0,310395654629	0,000000007519
10	1,241101167	0,657646942	1,838447927017	0,339999290301	0,000000007520

TABELA 4. Iterações da regressão não-linear para a estimação parâmetros  $\alpha_r$  e  $\sigma_r$

## Anexo C

ID	corr(n,r) inicial	corr(n,I) inicial	corr(r,I) inicial	sigma I inicial
1	0,014820	0,060640	-0,321270	0,006740
2	0,015000	0,060000	-0,300000	0,007000
3	-1,000000	0,000000	-0,300000	0,007000
4	0,000000	0,000000	-0,300000	0,007000
5	-1,000000	0,070000	-0,400000	1,000000
6	0,808455	-0,064888	-0,039779	0,013913
7	0,700000	-0,080000	0,030000	0,200000
8	0,050000	-0,200000	0,300000	0,200000
9	0,001000	-0,200000	0,300000	0,100000
10	0,000000	0,100000	0,005000	0,100000
11	0,005000	0,100000	-0,400000	0,021298
12	-0,005000	0,100000	-0,400000	0,021298
13	0,000500	0,500000	-0,200000	0,200000
14	-0,100000	0,500000	-0,500000	0,300000
15	-0,900000	-0,500000	0,600000	1,200000
16	-1,000000	-0,600000	0,800000	1,300000
17	-1,000000	-0,500000	0,700000	0,800000
18	-0,800000	-0,600000	0,900000	1,500000
19	-0,206595	-0,113187	-0,538998	-0,620222
20	-0,268800	-0,602281	-0,164944	-0,893390
21	-0,168004	-0,352826	-0,720584	-0,527688
22	-0,623450	-0,231610	-0,090030	-0,677726
23	-0,591012	-0,199546	0,438001	0,826272
24	-0,364156	-0,127378	0,002581	0,798589
25	-0,839023	-0,433152	0,194314	0,103448
26	-0,476859	-0,022699	0,391395	0,246375
27	-0,582602	-0,106339	0,508952	0,972388
28	-0,437446	-0,270765	0,458432	0,955041
29	-0,882089	-0,285825	0,042594	1,152467
30	-0,731057	-0,212818	0,069611	0,041276

TABELA 5. Valores iniciais da regressão não-linear para a estimação parâmetros  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$ ,  $\rho_{rI}$   $\sigma_I$  de acordo com a abordagem *Swaps* de Inflação

ID	corr(n,r)	corr(n,I)	corr(r,I)	sigma I	FO
1	1,000000	0,412067	-0,168454	0,031647	0,008661
2	1,000000	0,546870	-0,084752	0,031711	0,008656
3	1,000000	-0,246621	-0,182979	0,416174	0,008795
4	1,000000	-0,198903	-0,264467	0,093152	0,008696
5	1,000000	0,432184	0,232182	0,401306	0,008495
6	1,000000	0,167984	-0,028613	0,100279	0,008657
7	1,000000	0,666458	-0,013972	0,031507	0,008652
8	1,000000	-0,309098	0,477949	0,000000	0,026629
9	1,000000	-0,442694	0,695876	0,000000	0,026629
10	1,000000	0,704102	0,372250	0,231878	0,008515
11	1,000000	0,627140	-0,208163	0,022453	0,008659
12	1,000000	0,656656	-0,198912	0,022124	0,008659
13	1,000000	0,480213	-0,031222	0,040878	0,008653
14	1,000000	0,800446	-0,108869	0,022318	0,008656
15	0,825667	0,161406	-0,325031	0,070410	0,010079
16	-0,524243	0,556727	-0,630366	0,163666	0,042694
17	1,000000	-0,110110	0,064207	0,000000	0,026629
18	1,000000	0,286533	-0,448295	0,020822	0,008677
19	1,000000	-0,202153	-0,206684	0,160418	0,008712
20	1,000000	-0,602281	-0,164944	0,000000	0,026629
21	1,000000	-0,310771	-0,611691	0,031311	0,008687
22	1,000000	-0,231610	-0,090030	0,000000	0,026629
23	0,568710	-0,158284	-0,429804	0,171430	0,013388
24	1,000000	-0,011801	-0,034936	0,486011	0,008684
25	1,000000	-0,878038	0,919884	0,000000	0,026629
26	1,000000	-0,150932	0,600533	0,000000	0,026629
27	1,000000	0,780190	-1,000000	0,008995	0,008667
28	1,000000	-0,206576	-0,252949	0,118444	0,008961
29	0,576930	-0,076581	-0,153620	0,550981	0,014407
30	1,000000	0,210223	0,070902	0,223906	0,008633

TABELA 6. Iterações da regressão não-linear para a estimação parâmetros  $\rho_{nr}$ ,  $\rho_{nI}$ ,  $\rho_{rI}$   $\sigma_I$  de acordo com a abordagem *Swaps* de Inflação



## Anexo D

ID	Mid price	Issue Date	1st Coupon Date	Maturity Date	TIPS selecionada
31	98,2891	31/01/2014	15/07/2014	15/01/2024	0
32	97,5195	30/04/2019	15/10/2019	15/04/2024	1
33	96,9063	31/07/2014	15/01/2015	15/07/2024	0
34	96,3320	31/10/2019	15/04/2020	15/10/2024	1
35	98,7930	30/07/2004	15/01/2005	15/01/2025	0
36	95,7930	30/01/2015	15/07/2015	15/01/2025	0
37	95,1602	30/04/2020	15/10/2020	15/04/2025	1
38	95,6641	31/07/2015	15/01/2016	15/07/2025	0
39	94,9805	30/10/2020	15/04/2021	15/10/2025	1
40	98,6953	31/01/2006	15/07/2006	15/01/2026	0
41	95,4844	29/01/2016	15/07/2016	15/01/2026	0
42	93,9453	30/04/2021	15/10/2021	15/04/2026	1
43	94,1211	29/07/2016	15/01/2017	15/07/2026	0
44	93,7461	29/10/2021	15/04/2022	15/10/2026	1
45	100,7227	31/01/2007	15/07/2007	15/01/2027	0
46	94,0586	31/01/2017	15/07/2017	15/01/2027	0
47	92,8789	29/04/2022	15/10/2022	15/04/2027	1
48	94,1016	31/07/2017	15/01/2018	15/07/2027	0
49	98,9102	31/10/2022	15/04/2023	15/10/2027	1
50	99,2813	31/01/2023	15/07/2008	15/01/2028	1
51	94,0117	31/01/2018	15/07/2018	15/01/2028	0
52	107,7031	15/04/1998	15/10/1998	15/04/2028	0
53	97,2148	28/04/2023	15/10/2023	15/04/2028	1
54	95,3359	31/07/2018	15/01/2019	15/07/2028	0
55	103,5820	30/01/2009	15/07/2009	15/01/2029	0
56	95,2773	31/01/2019	15/07/2019	15/01/2029	1

TABELA 7. Lista das obrigações *TIPS* recolhidas e indicação das obrigações admissíveis para avaliação da *performance* das abordagens consideradas

ID	Mid price	Issue Date	1st Coupon Date	Maturity Date	TIPS selecionada
57	111,0391	15/04/1999	15/10/1999	15/04/2029	0
58	92,1055	31/07/2019	15/01/2020	15/07/2029	1
59	90,4883	31/10/2020	15/07/2020	15/01/2030	0
60	90,3320	31/07/2020	15/01/2021	15/07/2030	1
61	89,4102	29/01/2021	15/07/2021	15/01/2031	1
62	89,2930	30/07/2021	15/01/2022	15/07/2031	1
63	88,6680	31/01/2022	15/07/2022	15/01/2032	1
64	114,2461	15/10/2001	15/04/2002	15/01/2032	0
65	92,5469	29/07/2022	15/01/2023	15/07/2032	1
66	96,4453	31/01/2023	15/07/2023	15/01/2033	1
67	99,0820	31/07/2023	15/01/2024	15/07/2033	0
68	107,6719	26/02/2010	15/08/2010	15/02/2040	0
69	107,6406	28/02/2011	15/08/2011	15/02/2041	0
70	85,2500	29/02/2012	15/07/2012	15/02/2042	0
71	82,5781	28/02/2013	15/08/2013	15/02/2043	0
72	94,4102	28/02/2014	15/08/2014	15/02/2044	0
73	82,9727	27/02/2015	15/08/2015	15/02/2045	0
74	87,0313	29/02/2016	15/08/2016	15/02/2046	0
75	84,1797	28/02/2017	15/08/2017	15/02/2047	0
76	86,3633	28/02/2018	15/08/2018	15/02/2048	0
77	86,1406	28/02/2019	15/08/2019	15/02/2049	1
78	70,0664	28/02/2020	15/08/2020	15/02/2050	1
79	66,8906	26/02/2021	15/08/2021	15/02/2051	1
80	67,1380	28/02/2022	15/08/2022	15/02/2052	1
81	97,6953	28/02/2023	15/08/2023	15/02/2053	1

TABELA 8. Lista das obrigações *TIPS* recolhidas e indicação das obrigações admissíveis para avaliação da *performance* das abordagens consideradas (continuação)

## Anexo E

ID	Put
32	-74,768
34	-72,098
37	-71,037
39	-70,800
42	-68,957
44	-60,698
47	-52,253
49	-40,001
50	-38,385
53	-35,323
56	-81,335
58	-77,784
60	-76,785
61	-72,612
62	-63,647
63	-54,723
65	-41,574
66	-36,476
77	-56,716
78	-52,836
79	-50,292
80	-41,927
81	-34,648

TABELA 9. Estimação das *put option* segundo a abordagem *Jarrow & Yildirim*

ID	P	AIX	C + VF	P JY	Erro	VF Ajustado	P ajustado JY	Erro
32	97,5195	0,3186	121,5303	121,2117	-0,2429	-29,5828	91,6288	0,0604
34	96,3320	0,0785	118,0896	118,0111	-0,2250	-28,1021	89,9090	0,0667
37	95,1602	0,0778	116,4029	116,3250	-0,2224	-27,4639	88,8611	0,0662
39	94,9805	0,0775	115,1292	115,0517	-0,2113	-27,2448	87,8069	0,0755
42	93,9453	0,0766	113,0515	112,9749	-0,2026	-26,2227	86,7522	0,0766
44	93,7461	0,0736	107,9953	107,9217	-0,1512	-22,1922	85,7296	0,0855
47	92,8789	0,0710	103,5044	103,4334	-0,1136	-18,4285	85,0049	0,0848
49	98,9102	0,8837	111,9962	111,1125	-0,1234	-13,5058	97,6067	0,0132
50	99,2813	0,0582	112,0964	112,0382	-0,1285	-12,8931	99,1451	0,0014
53	97,2148	0,6696	107,4189	106,7493	-0,0981	-11,7481	95,0012	0,0228
56	95,2773	0,0344	123,3129	123,2785	-0,2939	-32,2673	91,0112	0,0448
58	92,1055	0,0097	112,8880	112,8783	-0,2255	-30,3756	82,5027	0,1043
60	90,3320	0,0048	109,5357	109,5309	-0,2125	-29,9480	79,5828	0,1190
61	89,4102	0,0048	107,1674	107,1626	-0,1986	-27,9013	79,2613	0,1135
62	89,2930	0,0046	102,9479	102,9433	-0,1529	-23,6556	79,2876	0,1121
63	88,6680	0,0045	98,9721	98,9677	-0,1162	-19,6913	79,2764	0,1059
65	92,5469	0,0212	102,3527	102,3315	-0,1057	-14,2383	88,0932	0,0481
66	96,4453	0,0374	109,2567	109,2193	-0,1324	-12,2517	96,9676	-0,0054
77	86,1406	1,0423	131,7924	130,7501	-0,5179	-22,5724	108,1777	-0,2558
78	70,0664	0,2548	90,1405	89,8857	-0,2829	-20,5597	69,3260	0,0106
79	66,8906	0,1257	81,6046	81,4789	-0,2181	-19,3100	62,1689	0,0706
80	67,1380	0,1174	75,4007	75,2833	-0,1213	-15,0399	60,2434	0,1027
81	97,6953	1,3234	137,5424	136,2190	-0,3943	-11,6728	124,5462	-0,2748

TABELA 10. Estimaco de preos das obrigaes *TIPS* segundo a abordagem *Jarrow & Yildirim*

## Anexo F

ID	Put
32	-13,159
34	2,084
37	12,246
39	19,895
42	27,577
44	39,289
47	49,625
49	60,772
50	63,184
53	66,309
56	39,321
58	44,096
60	47,800
61	51,606
62	58,127
63	64,305
65	73,102
66	76,756
77	36,726
78	37,616
79	37,503
80	42,030
81	45,893

TABELA 11. Estimação das *put option* segundo a abordagem *Swaps* de Inflação

ID	Put	P	AI	C + VF	VF ajustado	P IS	Erro	Erro2
32	-13,1592	97,5195	0,3186	121,5303	-	-	-	-
34	2,0836	96,3320	0,0785	118,0896	0,8122	118,8233	-0,2335	505,8564
37	12,2463	95,1602	0,0778	116,4029	4,7346	121,0596	-0,2722	670,7828
39	19,8948	94,9805	0,0775	115,1292	7,6558	122,7075	-0,2919	768,7907
42	27,5774	93,9453	0,0766	113,0515	10,4871	123,4620	-0,3142	871,2322
44	39,2886	93,7461	0,0736	107,9953	14,3645	122,2862	-0,3044	814,5370
47	49,6255	92,8789	0,0710	103,5044	17,5018	120,9352	-0,3021	787,1563
49	60,7718	98,9102	0,8837	111,9962	20,5189	131,6314	-0,3308	1070,6798
50	63,1839	99,2813	0,0582	112,0964	21,2225	133,2607	-0,3423	1154,6057
53	66,3090	97,2148	0,6696	107,4189	22,0535	128,8029	-0,3249	997,8033
56	39,3210	95,2773	0,0344	123,3129	15,5995	138,8780	-0,4576	1901,0196
58	44,0963	92,1055	0,0097	112,8880	17,2201	130,0984	-0,4125	1443,4634
60	47,8001	90,3320	0,0048	109,5357	18,6432	128,1741	-0,4189	1432,0234
61	51,6060	89,4102	0,0048	107,1674	19,8298	126,9925	-0,4203	1412,4309
62	58,1271	89,2930	0,0046	102,9479	21,6040	124,5473	-0,3948	1242,8668
63	64,3046	88,6680	0,0045	98,9721	23,1391	122,1068	-0,3771	1118,1538
65	73,1020	92,5469	0,0212	102,3527	25,0360	127,3675	-0,3762	1212,4764
66	76,7564	96,4453	0,0374	109,2567	25,7813	135,0006	-0,3998	1486,5140
77	36,7263	86,1406	1,0423	131,7924	14,6168	145,3668	-0,6876	3507,7446
78	37,6158	70,0664	0,2548	90,1405	14,6371	104,5228	-0,4918	1187,2401
79	37,5033	66,8906	0,1257	81,6046	14,3996	95,8785	-0,4334	840,2955
80	42,0303	67,1380	0,1174	75,4007	15,0770	90,3602	-0,3459	539,2715
81	45,8927	97,6953	1,3234	137,5424	15,4609	151,6800	-0,5526	2914,3414

TABELA 12. Estimação de preços das obrigações *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de Inflação

## Anexo G

ID	1	2	3	4
32	-72,584	-48,440	3,809	-50,978
34	-65,595	-36,147	21,967	-39,391
37	-60,868	-28,931	34,589	-32,883
39	-57,820	-24,066	44,333	-28,762
42	-53,293	-18,576	53,784	-23,946
44	-41,523	-8,112	67,086	-13,893
47	-31,494	0,747	78,929	-5,477
49	-20,368	10,363	91,576	3,728
50	-19,318	11,844	94,601	4,884
53	-17,178	14,118	98,337	6,870
56	-63,526	-17,781	71,829	-27,745
58	-59,718	-13,760	77,355	-24,175
60	-60,228	-11,890	82,249	-23,430
61	-57,089	-8,585	86,600	-20,438
62	-49,599	-2,259	93,706	-14,162
63	-42,598	3,652	100,458	-8,293
65	-31,879	12,202	109,957	0,377
66	-28,498	15,469	114,049	3,533
77	-74,989	-11,451	69,487	-8,951
78	-71,296	-8,945	69,999	-5,095
79	-68,960	-7,485	69,478	-2,329
80	-60,088	-1,126	73,653	5,206
81	-52,304	4,468	77,163	11,925

TABELA 13. Estimação das *put option* a partir dos parâmetros alternativos estimados segundo a abordagem *Swaps* de Inflação

ID	Put	P	AI	C + VF	VF ajustado	P IS	Erro	Erro2
32	-48,4402	97,5195	0,3186	121,5303	-	-	-	-
34	-36,1473	96,3320	0,0785	118,0896	-	-	-	-
37	-28,9315	95,1602	0,0778	116,4029	-	-	-	-
39	-24,0656	94,9805	0,0775	115,1292	-	-	-	-
42	-18,5761	93,9453	0,0766	113,0515	-	-	-	-
44	-8,1121	93,7461	0,0736	107,9953	-	-	-	-
47	0,7467	92,8789	0,0710	103,5044	0,2633	103,6967	-0,1165	117,0257
49	10,3628	98,9102	0,8837	111,9962	3,4989	114,6114	-0,1587	246,5281
50	11,8442	99,2813	0,0582	112,0964	3,9783	116,0165	-0,1686	280,0689
53	14,1184	97,2148	0,6696	107,4189	4,6956	111,4449	-0,1464	202,4956
56	-17,7809	95,2773	0,0344	123,3129	-	-	-	-
58	-13,7605	92,1055	0,0097	112,8880	-	-	-	-
60	-11,8904	90,3320	0,0048	109,5357	-	-	-	-
61	-8,5852	89,4102	0,0048	107,1674	-	-	-	-
62	-2,2593	89,2930	0,0046	102,9479	-	-	-	-
63	3,6517	88,6680	0,0045	98,9721	1,3140	100,2817	-0,1310	134,8784
65	12,2017	92,5469	0,0212	102,3527	4,1788	106,5104	-0,1509	194,9787
66	15,4693	96,4453	0,0374	109,2567	5,1959	114,4152	-0,1863	322,9170
77	-11,4513	86,1406	1,0423	131,7924	-	-	-	-
78	-8,9448	70,0664	0,2548	90,1405	-	-	-	-
79	-7,4847	66,8906	0,1257	81,6046	-	-	-	-
80	-1,1261	67,1380	0,1174	75,4007	-	-	-	-
81	4,4684	97,6953	1,3234	137,5424	1,5054	137,7244	-0,4097	1602,3266

TABELA 14. Estimaco de preos das obrigaes *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de Inflaco alternativa 2



ID	Put	P	AI	C + VF	VF ajustado	P IS	Erro	Erro2
32	3,8091	97,5195	0,3186	121,5303	1,5071	122,7188	-0,2584	635,0032
34	21,9674	96,3320	0,0785	118,0896	8,5624	126,5735	-0,3139	914,5456
37	34,5887	95,1602	0,0778	116,4029	13,3726	129,6976	-0,3629	1192,8340
39	44,3331	94,9805	0,0775	115,1292	17,0600	132,1117	-0,3909	1378,7319
42	53,7839	93,9453	0,0766	113,0515	20,4528	133,4277	-0,4203	1558,8568
44	67,0856	93,7461	0,0736	107,9953	24,5275	132,4492	-0,4129	1497,9286
47	78,9293	92,8789	0,0710	103,5044	27,8366	131,2700	-0,4133	1473,8792
49	91,5763	98,9102	0,8837	111,9962	30,9197	142,0322	-0,4360	1859,5127
50	94,6014	99,2813	0,0582	112,0964	31,7752	143,8134	-0,4485	1983,1160
53	98,3374	97,2148	0,6696	107,4189	32,7058	139,4551	-0,4345	1784,2411
56	71,8287	95,2773	0,0344	123,3129	28,4961	151,7745	-0,5930	3191,9327
58	77,3547	92,1055	0,0097	112,8880	30,2079	143,0862	-0,5535	2599,0327
60	82,2487	90,3320	0,0048	109,5357	32,0791	141,6099	-0,5677	2629,4240
61	86,5997	89,4102	0,0048	107,1674	33,2763	140,4390	-0,5707	2603,9380
62	93,7061	89,2930	0,0046	102,9479	34,8276	137,7709	-0,5429	2350,1104
63	100,4578	88,6680	0,0045	98,9721	36,1484	135,1160	-0,5238	2157,4221
65	109,9571	92,5469	0,0212	102,3527	37,6581	139,9897	-0,5126	2250,8174
66	114,0494	96,4453	0,0374	109,2567	38,3075	147,5268	-0,5296	2609,3214
77	69,4871	86,1406	1,0423	131,7924	27,6553	158,4054	-0,8389	5222,1920
78	69,9990	70,0664	0,2548	90,1405	27,2380	117,1237	-0,6716	2214,3899
79	69,4778	66,8906	0,1257	81,6046	26,6763	108,1552	-0,6169	1702,7642
80	73,6527	67,1380	0,1174	75,4007	26,4205	101,7037	-0,5148	1194,7872
81	77,1632	97,6953	1,3234	137,5424	25,9958	162,2148	-0,6604	4162,7635

TABELA 15. Estimação de preços das obrigações *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de Inflação alternativa 3

ID	Put	P	AI	C + VF	VF ajustado	P IS	Erro	Erro2
32	-50,9779	97,5195	0,3186	121,5303	-20,1700	-	-	-
34	-39,3914	96,3320	0,0785	118,0896	-15,3538	-	-	-
37	-32,8834	95,1602	0,0778	116,4029	-12,7133	-	-	-
39	-28,7618	94,9805	0,0775	115,1292	-11,0680	-	-	-
42	-23,9461	93,9453	0,0766	113,0515	-9,1062	-	-	-
44	-13,8928	93,7461	0,0736	107,9953	-5,0794	-	-	-
47	-5,4766	92,8789	0,0710	103,5044	-1,9315	-	-	-
49	3,7282	98,9102	0,8837	111,9962	1,2588	112,3713	-0,1361	181,2020
50	4,8835	99,2813	0,0582	112,0964	1,6403	113,6785	-0,1450	207,2813
53	6,8700	97,2148	0,6696	107,4189	2,2849	109,0342	-0,1216	139,6978
56	-27,7447	95,2773	0,0344	123,3129	-11,0070	-	-	-
58	-24,1752	92,1055	0,0097	112,8880	-9,4407	-	-	-
60	-23,4304	90,3320	0,0048	109,5357	-9,1384	-	-	-
61	-20,4380	89,4102	0,0048	107,1674	-7,8534	-	-	-
62	-14,1621	89,2930	0,0046	102,9479	-5,2636	-	-	-
63	-8,2934	88,6680	0,0045	98,9721	-2,9843	-	-	-
65	0,3770	92,5469	0,0212	102,3527	0,1291	102,4607	-0,1071	98,2829
66	3,5333	96,4453	0,0374	109,2567	1,1868	110,4061	-0,1448	194,9030
77	-8,9505	86,1406	1,0423	131,7924	-3,5622	-	-	-
78	-5,0952	70,0664	0,2548	90,1405	-1,9826	-	-	-
79	-2,3290	66,8906	0,1257	81,6046	-0,8942	-	-	-
80	5,2060	67,1380	0,1174	75,4007	1,8675	77,1507	-0,1491	100,2545
81	11,9246	97,6953	1,3234	137,5424	4,0173	140,2363	-0,4354	1809,7391

TABELA 16. Estimaco de preços das obrigaoes *TIPS* segundo a abordagem *Swaps* de Inflaco alternativa 4

Anexo H

Data C/ ID	50	56	58	60	61	62	63	65	66
15/01/2024	1,79411	1,05954	0,29799	0,14881	0,14661	0,14180	0,13729	0,65334	1,15336
15/07/2024	1,78089	1,05173	0,29579	0,14771	0,14552	0,14076	0,13628	0,64852	1,14486
15/01/2025	1,76742	1,04377	0,29355	0,14659	0,14442	0,13969	0,13525	0,64361	1,13620
15/07/2025	1,75421	1,03597	0,29136	0,14550	0,14334	0,13865	0,13424	0,63880	1,12770
15/01/2026	1,74076	1,02803	0,28912	0,14438	0,14225	0,13759	0,13321	0,63391	1,11906
15/07/2026	1,72755	1,02023	0,28693	0,14329	0,14117	0,13654	0,13220	0,62910	1,11057
15/01/2027	1,71411	1,01229	0,28470	0,14217	0,14007	0,13548	0,13117	0,62420	1,10193
15/07/2027	1,70090	1,00449	0,28250	0,14108	0,13899	0,13444	0,13016	0,61939	1,09343
15/01/2028	1,68751	0,99658	0,28028	0,13996	0,13789	0,13338	0,12913	0,61451	1,08483
15/07/2028	-	0,98874	0,27807	0,13886	0,13681	0,13233	0,12811	0,60968	1,07629
15/01/2029	-	0,98079	0,27584	0,13775	0,13571	0,13126	0,12709	0,60478	1,06764
15/07/2029	-	-	0,27365	0,13665	0,13463	0,13022	0,12608	0,59997	1,05915
15/01/2030	-	-	-	0,13554	0,13353	0,12916	0,12505	0,59507	1,05051
15/07/2030	-	-	-	0,13444	0,13245	0,12811	0,12404	0,59026	1,04201
15/01/2031	-	-	-	-	0,13135	0,12705	0,12301	0,58537	1,03337
15/07/2031	-	-	-	-	-	0,12601	0,12200	0,58056	1,02488
15/01/2032	-	-	-	-	-	-	0,12097	0,57568	1,01627
15/07/2032	-	-	-	-	-	-	-	0,57084	1,00773
15/01/2033	-	-	-	-	-	-	-	-	0,99909
15/07/2033	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Soma C Aj	15,667	11,222	3,430	1,983	2,085	2,142	2,195	11,018	20,449

TABELA 17. Estimación dos cupões ajustados das obrigações *TIPS* com pagamentos semestrais de cupões nos meses de janeiro e julho



## Anexo I

Data C/ID	77	78	79	80	81
15/08/2023	1,22234	0,29877	0,14740	0,13771	1,55204
15/02/2024	1,21324	0,29655	0,14631	0,13669	1,54048
15/08/2024	1,20426	0,29436	0,14522	0,13568	1,52909
15/02/2025	1,19516	0,29213	0,14413	0,13465	1,51753
15/08/2025	1,18622	0,28994	0,14305	0,13365	1,50618
15/02/2026	1,17712	0,28772	0,14195	0,13262	1,49462
15/08/2026	1,16817	0,28553	0,14087	0,13161	1,48326
15/02/2027	1,15907	0,28331	0,13977	0,13059	1,47170
15/08/2027	1,15012	0,28112	0,13869	0,12958	1,46034
15/02/2028	1,14106	0,27891	0,13760	0,12856	1,44883
15/08/2028	1,13207	0,27671	0,13652	0,12754	1,43741
15/02/2029	1,12296	0,27448	0,13542	0,12652	1,42585
15/08/2029	1,11402	0,27230	0,13434	0,12551	1,41450
15/02/2030	1,10491	0,27007	0,13324	0,12448	1,40294
15/08/2030	1,09597	0,26788	0,13216	0,12348	1,39158
15/02/2031	1,08686	0,26566	0,13107	0,12245	1,38002
15/08/2031	1,07792	0,26347	0,12999	0,12144	1,36866
15/02/2032	1,06885	0,26126	0,12889	0,12042	1,35715
15/08/2032	1,05986	0,25906	0,12781	0,11941	1,34573
15/02/2033	1,05075	0,25683	0,12671	0,11838	1,33417
15/08/2033	1,04181	0,25465	0,12563	0,11738	1,32281
15/02/2034	1,03270	0,25242	0,12454	0,11635	1,31125
15/08/2034	1,02376	0,25023	0,12346	0,11534	1,29989
15/02/2035	1,01465	0,24801	0,12236	0,11432	1,28833
15/08/2035	1,00571	0,24582	0,12128	0,11331	1,27698
15/02/2036	0,99665	0,24361	0,12019	0,11229	1,26547
15/08/2036	0,98765	0,24141	0,11910	0,11127	1,25405
15/02/2037	0,97855	0,23918	0,11800	0,11025	1,24249
15/08/2037	0,96960	0,23700	0,11693	0,10924	1,23113
15/02/2038	0,96050	0,23477	0,11583	0,10821	1,21957
15/08/2038	0,95155	0,23259	0,11475	0,10721	1,20821
15/02/2039	0,94245	0,23036	0,11365	0,10618	1,19665
15/08/2039	0,93350	0,22817	0,11257	0,10517	1,18529
15/02/2040	0,92444	0,22596	0,11148	0,10415	1,17379
15/08/2040	0,91545	0,22376	0,11040	0,10314	1,16237
15/02/2041	0,90634	0,22153	0,10930	0,10211	1,15081
15/08/2041	0,89740	0,21935	0,10822	0,10111	1,13945

TABELA 18. Estimação dos cupões ajustados das obrigações *TIPS* com pagamentos semestrais de cupões nos meses de fevereiro e agosto

Data C/ID	77	78	79	80	81
15/02/2042	0,88829	0,21712	0,10712	0,10008	1,12789
15/08/2042	0,87935	0,21494	0,10604	0,09907	1,11653
15/02/2043	0,87024	0,21271	0,10494	0,09805	1,10497
15/08/2043	0,86176	0,21064	0,10392	0,09709	1,09420
15/02/2044	0,85611	0,20926	0,10324	0,09645	1,08702
15/08/2044	0,85049	0,20788	0,10256	0,09582	1,07989
15/02/2045	0,84481	0,20649	0,10188	0,09518	1,07267
15/08/2045	0,83922	0,20513	0,10120	0,09455	1,06558
15/02/2046	0,83353	0,20374	0,10052	0,09391	1,05836
15/08/2046	0,82795	0,20237	0,09984	0,09328	1,05127
15/02/2047	0,82226	0,20098	0,09916	0,09264	1,04405
15/08/2047	0,81668	0,19962	0,09848	0,09201	1,03696
15/02/2048	0,81102	0,19824	0,09780	0,09137	1,02978
15/08/2048	0,80540	0,19686	0,09712	0,09074	1,02264
15/02/2049	0,79972	0,19547	0,09644	0,09010	1,01542
15/08/2049	-	0,19411	0,09577	0,08947	1,00833
15/02/2050	-	0,19272	0,09508	0,08883	1,00111
15/08/2050	-	-	0,09441	0,08820	0,99402
15/02/2051	-	-	0,09372	0,08756	0,98680
15/08/2051	-	-	-	0,08693	0,97971
15/02/2052	-	-	-	0,08629	0,97253
15/08/2052	-	-	-	-	0,96540
15/02/2053	-	-	-	-	0,95818
Soma C Aj	51,82048497	13,05317388	6,628069262	6,365628778	73,66395115

TABELA 19. Estimaco dos cupes ajustados das obrigaes *TIPS* com pagamentos semestrais de cupes nos meses de fevereiro e agosto (continuao)

Anexo J

Data C/ID	32	34	37	39	42	44	47	49	53
15/10/2023	0,60609	0,14927	0,14806	0,14737	0,14563	0,14002	0,13506	1,68093	1,27368
15/04/2024	0,60161	0,14817	0,14696	0,14628	0,14455	0,13898	0,13406	1,66851	1,26426
15/10/2024	-	0,14706	0,14586	0,14519	0,14347	0,13794	0,13306	1,65602	1,25480
15/04/2025	-	-	0,14477	0,14410	0,14240	0,13691	0,13206	1,64361	1,24540
15/10/2025	-	-	-	0,14300	0,14132	0,13587	0,13106	1,63114	1,23595
15/04/2026	-	-	-	-	0,14024	0,13483	0,13006	1,61873	1,22655
15/10/2026	-	-	-	-	-	0,13380	0,12906	1,60626	1,21710
15/04/2027	-	-	-	-	-	-	0,12806	1,59385	1,20770
15/10/2027	-	-	-	-	-	-	-	1,58138	1,19825
15/04/2028	-	-	-	-	-	-	-	-	1,18883
Soma C Ajustados	1,208	0,444	0,586	0,726	0,858	0,958	1,053	14,680	12,313

TABELA 20. Estimação dos cupões ajustados das obrigações *TIPS* com pagamentos semestrais de cupões nos meses de abril e outubro

## Anexo K

Next Coupon Date	Years to Next Coupon Date	$P_n(t,T)$	$P_r(t,T)$
15/01/2024	0,488	0,913	1,005
15/07/2024	0,984	0,901	0,997
15/01/2025	1,489	0,889	0,990
15/07/2025	1,984	0,878	0,982
15/01/2026	2,489	0,866	0,975
15/07/2026	2,984	0,854	0,967
15/01/2027	3,488	0,842	0,960
15/07/2027	3,984	0,830	0,952
15/01/2028	4,486	0,818	0,945
15/07/2028	4,984	0,806	0,937
15/01/2029	5,489	0,794	0,930
15/07/2029	5,984	0,782	0,922
15/01/2030	6,489	0,770	0,915
15/07/2030	6,984	0,758	0,908
15/01/2031	7,489	0,746	0,900
15/07/2031	7,984	0,734	0,893
15/01/2032	8,486	0,722	0,885
15/07/2032	8,984	0,711	0,878
15/01/2033	9,489	0,699	0,870
15/07/2033	9,984	0,687	0,863
15/08/2023	0,068	0,923	1,011
15/02/2024	0,573	0,911	1,003
15/08/2024	1,070	0,899	0,996
15/02/2025	1,574	0,887	0,988
15/08/2025	2,069	0,876	0,981
15/02/2026	2,574	0,864	0,973
15/08/2026	3,069	0,852	0,966
15/02/2027	3,573	0,840	0,958
15/08/2027	4,069	0,828	0,951
15/02/2028	4,571	0,816	0,944

TABELA 21. Estimação dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos



Next Coupon Date	Years to Next Coupon Date	$P_n(t,T)$	$P_r(t,T)$
15/08/2028	5,069	0,804	0,936
15/02/2029	5,574	0,792	0,929
15/08/2029	6,069	0,780	0,921
15/02/2030	6,574	0,768	0,914
15/08/2030	7,069	0,756	0,906
15/02/2031	7,573	0,744	0,899
15/08/2031	8,069	0,732	0,891
15/02/2032	8,571	0,720	0,884
15/08/2032	9,069	0,709	0,876
15/02/2033	9,574	0,697	0,869
15/08/2033	10,069	0,685	0,861
15/02/2034	10,574	0,673	0,854
15/08/2034	11,069	0,661	0,847
15/02/2035	11,574	0,649	0,839
15/08/2035	12,069	0,637	0,832
15/02/2036	12,571	0,625	0,824
15/08/2036	13,069	0,613	0,817
15/02/2037	13,574	0,601	0,809
15/08/2037	14,069	0,589	0,802
15/02/2038	14,574	0,577	0,794
15/08/2038	15,069	0,565	0,787
15/02/2039	15,574	0,553	0,779
15/08/2039	16,069	0,542	0,772
15/02/2040	16,571	0,530	0,764
15/08/2040	17,069	0,518	0,757
15/02/2041	17,574	0,506	0,749
15/08/2041	18,069	0,494	0,742
15/02/2042	18,574	0,482	0,735
15/08/2042	19,069	0,470	0,727
15/02/2043	19,574	0,458	0,720

TABELA 22. Estimaco dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos (continuao)

Next Coupon Date	Years to Next Coupon Date	$P_n(t,T)$	$P_r(t,T)$
15/08/2043	20,069	0,447	0,713
15/02/2044	20,571	0,440	0,708
15/08/2044	21,069	0,434	0,703
15/02/2045	21,574	0,427	0,699
15/08/2045	22,069	0,421	0,694
15/02/2046	22,574	0,414	0,689
15/08/2046	23,069	0,408	0,685
15/02/2047	23,574	0,401	0,680
15/08/2047	24,069	0,395	0,675
15/02/2048	24,571	0,388	0,671
15/08/2048	25,069	0,382	0,666
15/02/2049	25,574	0,375	0,661
15/08/2049	26,069	0,369	0,657
15/02/2050	26,574	0,362	0,652
15/08/2050	27,069	0,356	0,647
15/02/2051	27,574	0,349	0,643
15/08/2051	28,069	0,343	0,638
15/02/2052	28,571	0,336	0,633
15/08/2052	29,069	0,330	0,629
15/02/2053	29,574	0,323	0,624
15/10/2023	0,236	0,919	1,008
15/04/2024	0,735	0,907	1,001
15/10/2024	1,237	0,895	0,993
15/04/2025	1,735	0,884	0,986
15/10/2025	2,236	0,872	0,978
15/04/2026	2,735	0,860	0,971
15/10/2026	3,236	0,848	0,963
15/04/2027	3,735	0,836	0,956
15/10/2027	4,236	0,824	0,949
15/04/2028	4,735	0,812	0,941

TABELA 23. Estimaco dos fatores de desconto reais e nominais para maturidades diferentes de 10, 20 e 30 anos (continuao)