

ESCHER: ARTE E MATEMÁTICA DESENHADAS POR ALUNOS PORTUGUESES¹

RAMOS, Filipe Roberto
ISCTE-IUL, Lisboa, Portugal
frjrs@iscte-iul.pt

KOPKE, Regina Coeli Moraes
UFJF, Minas Gerais, Brasil
reginakopke@gmail.com

DOMINGOS, António Manuel
FCT-UNL, Lisboa, Portugal
amdd@fct.unl.pt

Resumo

Parte substancial da obra de Escher é dedicada ao estudo do Plano Euclidiano, nomeadamente numa perspetiva de o pavimentar. É sobre este tópico da obra de Escher que incide o presente trabalho o qual pode ser encarado como um 'tributo' a Escher e à sua arte. À semelhança de muitos outros já existentes na literatura, este trabalho retrata a harmonia e afinidade existente entre a Arte e a Matemática nas criações do artista. Porém, face a algumas particularidades, julgamos que o nosso estudo prima por alguma singularidade, sendo exemplo elucidativo da expressão gráfica nas Artes Visuais e na Matemática, associado ao relato de uma experiência vivida em contexto escolar. Sustentando-se numa análise e apresentação cuidada dos procedimentos seguidos por Escher para pavimentar o plano, um grupo de alunos em risco de abandono escolar (com idades compreendidas entre os 16 e os 19 anos que não tinham concluído o ensino básico), (re)criou a obra de Escher em painéis de azulejo, mediante produções artísticas originais.

Palavras-chave: arte, Escher, matemática, pavimentações e isometrias

¹ O presente trabalho, surge no âmbito da Dissertação submetida pelo Mestre Filipe Ramos, para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, em Dezembro de 2016 na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Os outros dois coautores foram elementos que integraram o Júri nas provas públicas prestadas, Regina Kopke (na qualidade de Arguente) e António Domingos (na qualidade de Orientador). O trabalho encontra-se redigido em Português (Europeu), por ser a língua usada na escrita da Dissertação.

Abstract

A substantial part of Escher's work is devoted to the study of the Euclidean plane, particularly in a tessellation perspective. It is based on this topic of Escher's work that the present work is concerned and it can be interpreted as a 'tribute' to Escher and his art. Like many other studies already existing in the literature, this work portrays the harmony and affinity between Art and Mathematics in the artist's creations. However, taking in account some particularities, we believe that our study excels by some singularity, being an example of the graphic expression in the Visual Arts and Mathematics, associated with the report of an experience lived in a school context. Based on an analysis and careful presentation of the procedures followed by Escher to tessellate the plane, a group of students at risk of dropping out of school (although they were 16 to 19 years old they had not yet completed basic education) (re)created Escher's work in tile panels, through original artistic productions.

Keywords: art, Escher, mathematics, tessellations, isometric transformations

1 Introdução

Neste trabalho iremos analisar alguns tópicos onde as conexões entre a obra do artista gráfico M.C. Escher e a Matemática são notáveis. De entre outras fontes, destacamos o *Website Oficial de M. C. Escher*, o trabalho de Escher *et al.* (1982) e Escher (1994), bem como os trabalhos publicados por Ernst (1985) e Schattschneider (2004). Contributos igualmente importantes, na consecução do nosso estudo, tiveram os trabalhos apresentados por Martinho (1998) e Sampaio (2012).

Para a consecução do trabalho, no seguimento do feito em Ramos (2016), optamos por dar especial ênfase à 'Exploração do Plano' (Pavimentações e Isometrias). Implícitas nas criações artísticas de Escher, estão várias etapas. Percorridas estas etapas, cada obra esconde uma mensagem apelativa, em termos da comunicação visual, onde o artista cria imagens a pensar na forma de atuar sobre a 'região fundamental', conseguindo dotar os seus trabalhos de uma beleza estética notável, com o recurso a transformações geométricas (isometrias) e a estudos da cor.

Em termos de implementação prática, o projeto foi desenvolvido com um grupo de alunos numa escola pública, os quais frequentava um Curso de Educação e Formação (CEF) de Artesão Pintor de Azulejo (APA) que, apesar de idades compreendidas entre os 16 e os 19 anos de idade, não tinham ainda concluído o Ensino Básico.

Assim, não nos limitando à apresentação de conceitos matemáticos a partir da obra de Escher, como tornar clara a forma como a Matemática está presente e se 'alimenta' da Arte, seria uma mais-valia para a motivação do desafio que proposto a este grupo de alunos em situação de abandono escolar: 'Todos podemos ser um Escher?'

2 Revisão da Literatura

2.1 Escher e a Matemática

Escher não se considerava nem um matemático nem um artista plástico. No entanto, como ele próprio refere, apesar de não possuir formação matemática, sentia ter mais em comum com um matemático do que com os seus colegas artistas, dando-lhe particular satisfação o interesse com que os matemáticos e cientistas olhavam a sua obra, assumindo que "...um contacto fecundo pôde ser estabelecido entre os matemáticos [e ele próprio]..." (Escher *apud* MARTINHO, 1998, p. 9).

De facto, o trabalho de Escher demonstra um enorme interesse, senão mesmo obsessão, por alguns objetos e conceitos matemáticos, território onde acabaria por se sentir desafiado e, não tendo qualquer formação científica na área, fazia-se valer da sua própria experiência e intuição, assumindo-se como um autodidata.

Todavia, apesar dessa lacuna, no que respeita ao conhecimento matemático, Escher destaca, inúmeras vezes, o contacto com alguns matemáticos, como H. Coxeter e R. Penrose, como um contributo determinante para a compreensão, interpretação e mesmo uso de alguns conceitos matemáticos (ESCHER *et al.*, 1982). Esta intersecção e intropatia entre os matemáticos e Escher é algo reconhecido pelo autor. Tal como referido por Martinho (1998, p. 9),

... tanto Escher como os matemáticos têm modos similares de lidar com o seu trabalho. Ambos começam por selecionar um pequeno conjunto de regras que definem as evoluções possíveis num mundo abstrato. Depois exploram em detalhe as consequências da aplicação dessas regras chegando por vezes a descobertas interessantes...

Face ao interesse na pavimentação/divisão do plano, a atitude de Escher fê-lo ir mais além na tentativa de compreender as transformações geométricas que ocorriam 'nos objetos'. Assim, o interesse de Escher era descobrir e aprender sobre as leis que ditavam essas transformações e, no seu sistema próprio, o artista identifica aspetos fundamentais indo um pouco além do pensamento matemático (MARTINHO, 1998).

A anteceder uma descrição e apresentação de elementos e evidência recolhidas na implementação prática do nosso projeto, na secção seguinte, procuraremos analisar e dar conta dos procedimentos seguidos por Escher nas suas produções artísticas referentes à pavimentam o plano.

2.2 Exploração do Plano: Pavimentações e Isometrias

Tal como em outros momentos da obra de Escher, a fase dedicada à 'Exploração do Plano' reverte-se de extrema riqueza no que respeita à presença de conceitos matemáticos. Assim, nas linhas subsequentes, além de uma exploração dos conceitos matemáticos implícitos, procuremos dar conta de alguns dos cometários de Escher ao seu próprio trabalho, acompanhados de um exemplo detalhado e elucidativo dos procedimentos seguidos pelo artista.

Segundo Martinho (1998), terá sido um artigo de G. Pólya² publicado numa revista de Cristalografia que terá despertado o interesse de Escher para as simetrias. A classificação, referida na literatura, dos diferentes tipos existentes foi feita com base na azulejaria islâmica, algo familiar para Escher e que despertara o seu interesse aquando na sua visita a Alhambra. Aqui, Escher passara horas a copiar exemplos de tais mosaicos, registando e retendo parte substancial da informação geométrica que os mesmos comportavam, sobretudo nos movimentos empregues para que o ornamento se cubra em si. Tal compilação de ideias, onde Escher elabora um sistema muito próprio de divisão do plano, podem ser consultadas num dos seus trabalhos publicados em 1958 – *Regular Division of a Plane* – citado em Sampaio (2012), resultante de notas registadas entre 1941 e 1942.

Sobre a divisão regular de uma superfície, Escher escrevera:

...a fonte mais rica de inspiração, de onde eu alguma vez bebi e ela não está ainda seca. Os desenhos simétricos aqui representados mostram como uma superfície pode ser dividida regularmente em figuras iguais, respetivamente, preenchida com elas. As figuras devem confinar umas com as outras sem que resultem áreas livres. (Escher *apud* SAMPAIO, 2012, p. 51)

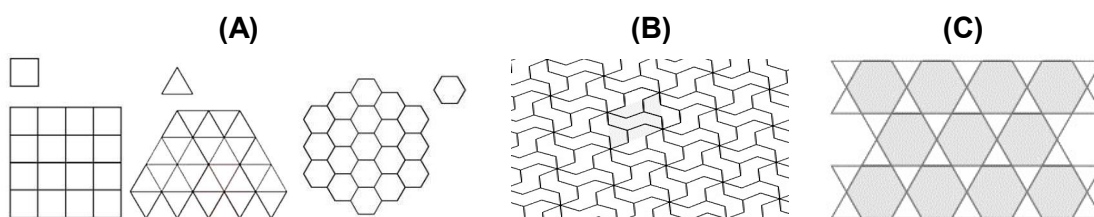
Deste modo, no que respeita à 'Exploração do Plano', para evitar a referida existência de 'áreas livres', uma das principais pesquisas feitas por Escher foi a pavimentação do mesmo, sendo a preocupação inicial a forma como o mesmo pode ser pavimentado.

Tendo por base a noção de polígono, as pavimentações do plano euclidiano podem ser classificadas como regulares (**A**), não regulares (**B**) ou semirregulares (**C**) (Figura1). Como observável na figura, tal distinção é feita com base nos polígonos que estão na base da mesma. Se as pavimentações regulares se caracterizam por preencher o plano recorrendo apenas a polígonos regulares, sendo as únicas alternativas o uso de triângulos (equiláteros), quadrados ou hexágonos (regulares), já as não regulares obtêm-se combinando polígonos não regulares. Um jogo ainda mais desafiante passa pela combinação, numa mesma pavimentação, de mais do que um tipo de polígonos

² *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene* (1924).

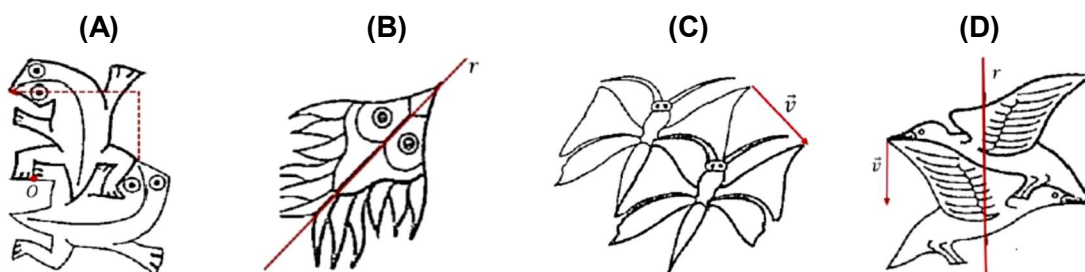
regulares, formando uma estrutura comum ao longo da pavimentação designada de semirregular.

Figura 1: Tipos de Pavimentação



Seguido deste estudo, patente nas obras de Escher, um outro estudo matemático da divisão do plano caracteriza a obra do artista ao usar tipos diferentes de transformações para o ‘preenchimento’ da pavimentação escolhida, preservando a sua forma e a sua dimensão – isometrias – dentro das quais são identificadas a Rotação **(A)**, Simetria/Reflexão **(B)** e Translação **(C)**. Além dos exemplos citados e representados na Figura 2, em alguns casos Escher não só combina numa mesma obra várias isometrias, como utiliza o conceito matemático de “composição” ao combinar duas isometrias, obtendo uma outra forma de pavimentar o plano. É o exemplo da Reflexão Deslizante **(D)**, como são identificadas na sua obra, que resulta de uma composição de uma Reflexão com uma Translação, como o próprio nome sugere e como consta na imagem **(D)** da Figura 2.

Figura 2: Tipos de Isometrias³



É de salientar que, em cada uma das imagens acima, são identificados os elementos geométricos que caracterizam cada Isometria. No caso da Rotação **(A)**, é identificado o centro, O , e o ângulo (neste caso, a ilustrar o ângulo, está o ‘movimento’ que define a Rotação de 90° efetuada); no caso da Simetria/Reflexão **(B)**, é traçado o respetivo eixo de simetria, r ; no caso da Translação **(C)**, é identificado o vetor, \vec{v} , que a define; e a Reflexão Deslizante, resultando da composição de uma Reflexão com uma Translação, é definida às custas do eixo de simetria, r e do vetor, \vec{v} .

É nesta fase que o seu trabalho vai um pouco além da exploração Matemática. De um modo sucinto, partindo da escolha do tipo de pavimentação (do polígono ou

³ Adaptado de Martinho (1998).

polígonos usados), Escher arquiteta a construção de uma imagem que caracteriza o menor 'ladrilho' que integra a pavimentação⁴ e que é, mediante o uso das transformações supramencionadas, igual em qualquer outro ladrilho da pavimentação.

Numa parte substancial das suas obras, a criação destas pavimentações (em muitos casos, Escher usa animais) destaca dois 'mosaicos' distintos (com origem na mesma figura geométrica), que podem ser contrastantes pela cor. Esse contraste pode ser explorado em apenas um motivo, de forma a distinguir as figuras, ou em entidades distintas, colorindo-as com cores distintas. Precisamente, este estudo da cor surge como uma nova etapa no trabalho de Escher. Segundo a bibliografia, o artista dedicava algum espaço para uma análise exaustiva da cor, onde o objetivo parecia ser o uso do menor número de cores possível de forma a tronar as imagens contrastantes, sublinhando a individualidade e equivalência de mosaicos subjacentes, dotando a sua obra de um efeito visual apelativo (ERNEST, 1985).

Relativamente à relevância do estudo da cor, Sampaio (2012, p. 51) destaca que “o uso de cores contrastantes para colorir o preenchimento de superfícies de uma forma sistemática era de primordial importância para sublinhar a individualidade dos motivos adjacentes...”.

Resultante destas considerações, podemos identificar, no processo de pavimentação do plano, quatro etapas distintas que se conjugam e, em alguns casos, poderão ser desenvolvidas não necessariamente de forma sequencial, mas em simultâneo:

- I. Definição do tipo de pavimentação usada e os elementos que a integram;
- II. Construção da 'região fundamental';
- III. Exploração do tipo de isometrias a usar na pavimentação;
- IV. Estudo da cor, por forma a tornar as imagens contrastantes.

De todas as fases identificadas, parece-nos que a que esconde uma das grandes chaves da singularidade da obra de Escher é a definição da 'região fundamental'. Sobre esta componente que integra o estudo que precede à criação das suas obras, Escher dá-nos conta do quão desafiante era para ele construir, a partir de um triângulo ou um quadrado, ou outra figura geométrica, um peixe, um pássaro, ...

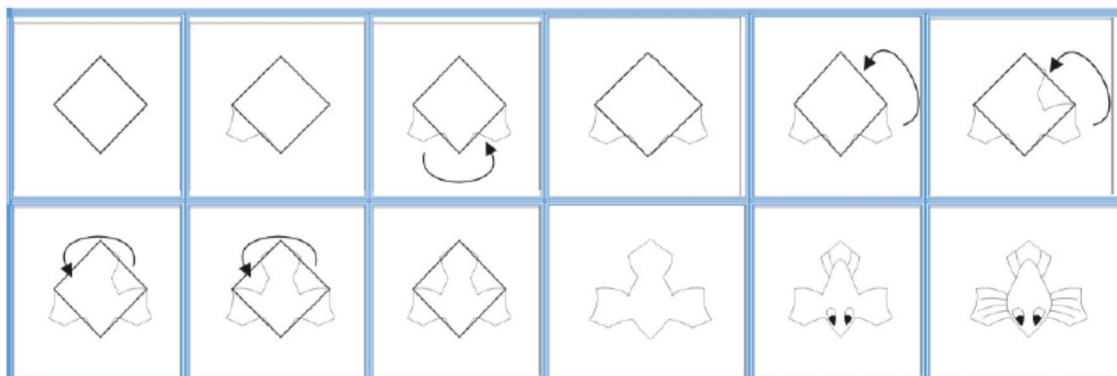
Para uma melhor compreensão de alguns dos aspetos em causa, vejamos um exemplo particular, onde Escher transforma um quadrado num peixe e assim “... usar a Arte para ludibriar a Matemática...” (SAMPAIO, 2012, p. 52).

Observando a Figura 3, conseguimos depreender a forma como Escher pega num quadrado e, mediante construções ou recortes no mesmo, transforma-o num peixe com a mesma área. O cuidado e o rigor implícitos na construção, 'preenchida' de Matemática,

⁴ Usualmente designada, na sua obra, de 'região fundamental'.

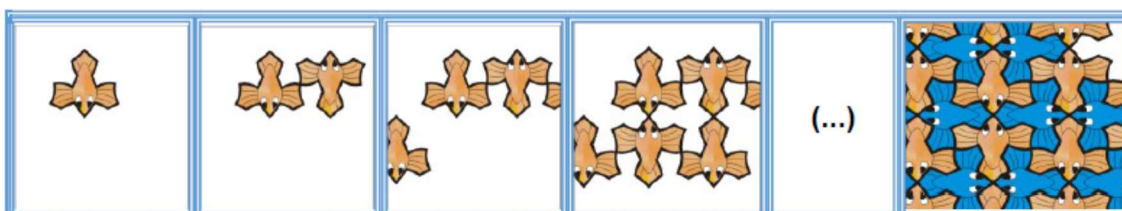
permite que as figuras encaixem perfeitamente umas nas outras, obtendo-se uma pavimentação do plano bastante mais atraente do que com simples quadrados.

Figura 3: Construção da região fundamental: um exemplo⁵



Definido o tipo de pavimentação, com a identificação da figura geométrica usada, e construída a 'região fundamental', impõem-se agora definir o(s) tipo(s) de isometria(s) a usar para pavimentar o plano⁶, em paralelo com um estudo da cor, de onde resultará a pavimentação final, tal como descrito na Figura 4.

Figura 4: Pavimentação do Plano: um exemplo



3 Construindo Pavimentações

Nesta secção procuraremos dar conta de alguns aspetos relativos à implementação prática do projeto, apresentando alguns dos dados recolhidos. Não obstante de uma referência a outros trabalhos, daremos especial atenção a um projeto (o do Ricardo) como forma de ilustrar os procedimentos seguidos e aspetos considerados relevantes.

O processo de construção da 'região fundamental', concordante com o referido na literatura, apesar de no nosso caso estar condicionado ao uso de quadrados (formato dos azulejos), foi a fase mais complexa para a maioria dos alunos, verificando-se muitos avanços e recuos ou mesmo o abandonar definitivo de ideias.

Despertar nos alunos espírito crítico e criatividade na construção de uma 'região fundamental', usando e reconhecendo os conceitos matemáticos, foi nosso objetivo, à semelhança dos procedimentos seguidos por Escher.

⁵ Adaptado de Sampaio (2012), cujo parte do conteúdo que integra este trabalho se encontrava disponível para consulta em http://www.iep.uminho.pt/aac/sm/a2002/M_C_Escher/index.htm.

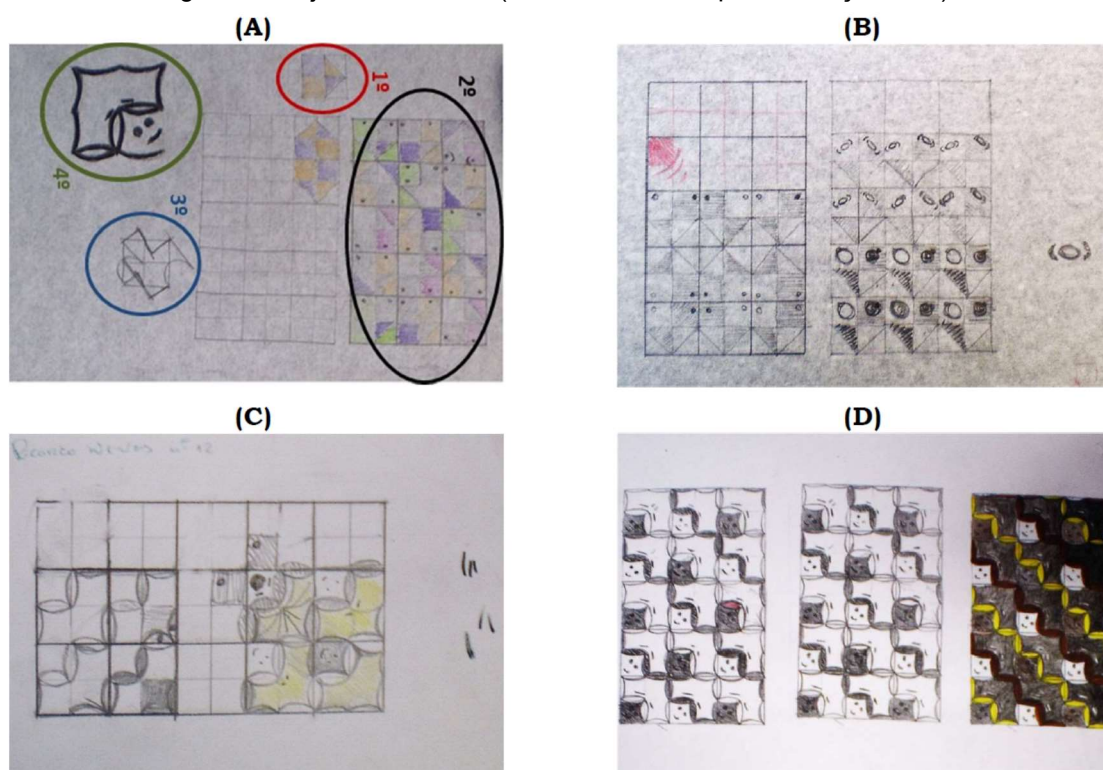
⁶ Nesta pavimentação, uma das exploradas com os alunos em sala de aula, apesar de ser evidente a Rotação (com centro num dos 'cantos' da barbatana do peixe), é interessante, mediante o jogo de cores ver o uso da Simetria, ou mesmo da Translação.

Centremos particular atenção a um dos trabalhos, dando conta das várias etapas.

Muitos dos alunos começaram esta fase com a construção da 'região fundamental' com construções envolvendo apenas o traçar geométrico de linhas retas num quadrado. Porém em todos esses casos os alunos foram desafiados a olhar novamente as pavimentações de Escher e procurar inspiração para construções mais originais, nomeadamente recorrendo a um documento que lhes havia sido distribuído e onde estava esquematizada a forma como Escher procedia (contando com vários exemplos detalhados, como esquematizado nas Figuras 3 e 4).

Essa sugestão e desafio foi aceite na íntegra pelo Ricardo, cuja sequência de imagens apresentada na Figura 5 retrata a evolução do seu trabalho.

Figura 5: Projeto do Ricardo (estudos iniciais e pavimentação final)



Centremos alguma atenção ao apresentado na imagem (A), cuja essência da construção é mantida na imagem (B). Partindo da primeira proposta de estudo do Ricardo, (destacada com o círculo a vermelho), foi-lhe sugerido para tentar algo diferente. O Ricardo, 'copiando' o que os colegas faziam, decide apresentar uma proposta, assente no mesmo tipo de padrão e colocar alguns elementos que não existiam (uns pontos), tal como ilustra o segundo esboço (destacado com o círculo a preto) e o apresentado na imagem (B).

Porém, fomos mais concretos e dissemos que poderia partir do esquema que definira, mas tentar algo original e próprio, diferente do trabalho de todos os colegas, tendo, nós mesmos, esboçado algumas sugestões (destacado com o círculo a azul).

Dada a receptividade do aluno face às sugestões, usamos mesmo a expressão 'procura ser um Escher diferente de todos os outros'. Neste caso, mostrando exemplos de pavimentações de Escher, onde, além dos aspetos já referidos em trabalhos anteriores, se destacou o facto de, quando se olha para um 'quadrado' isolado, a imagem não ficaria completa e só na pavimentação final se compreenderia o que estava representado.

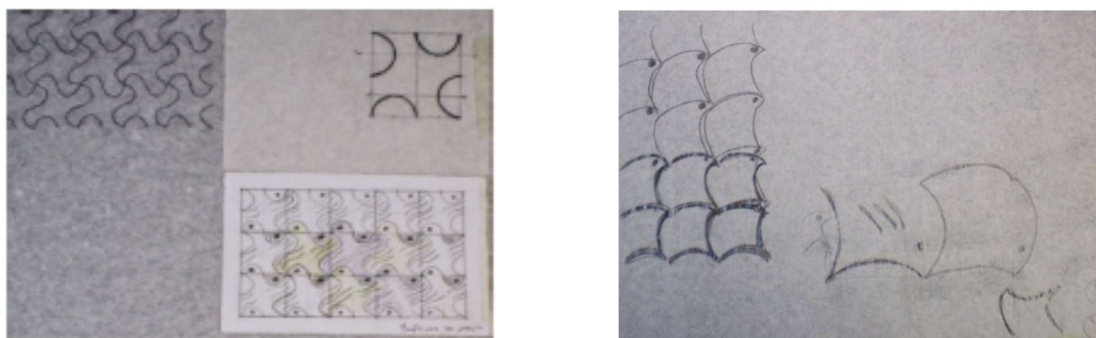
Poderemos dizer que o aluno se envolveu nesse desafio de um modo ímpar. Sendo um dos alunos que se caracterizava por apresentar algum descuido no rigor das suas construções, uma atitude inconstante e uma personalidade não linear, considerámos que foi uma vitória conseguida ao senti-lo realmente envolvido em 'ser diferente'.

No que respeita ao trabalho em si, neste caso o Ricardo seguiu uma metodologia de trabalho própria, e foi explorando na pavimentação a construção do padrão que adotaria na sua construção, tal como retrata a imagem **(C)**.

Pois bem, mediante vários estudos, depois de muito riscar e apagar, eis que surge uma proposta realmente diferente e nada trivial em termos de construção. Para que o Ricardo tivesse real noção da diferença e evolução da sua proposta, sugerimos contruir junto dos estudos iniciais, aquele que seria o padrão final (destacado com círculo verde na imagem **(A)**). Repare-se que, tal como se orgulhava o Ricardo por ter conseguido esse feito, o quadrado tinha na sua base apenas parte da construção da 'região fundamental', a qual só viria a ser identificada e compreendida quando integrada numa pavimentação final, como é evidenciado na imagem **(D)**. Nesta imagem, não só com uma nítida exploração do contraste a dar às figuras, como com o colocar de uns traços se depreende o rosto de uma menina e uma espécie de morcego.

Um aspeto que mereceu a nossa atenção foi a forma curiosa como os alunos interiorizaram a parte que destacámos como o 'conservar de área', algo importante para "encaixe" das figuras na pavimentação do plano e, ainda, o enriquecer dos projetos com o recurso a várias isometrias. Na Figura 6 apresentam-se dois trabalhos que, não sendo das construções mais complexas, ilustram os factos referidos e dão conta da forma correta como os conceitos matemáticos são usados e identificados.

Figura 6: Estudos para a construção da 'região fundamental' e da pavimentação final



Em qualquer um dos casos, os alunos constroem uma 'região fundamental' original, baseada na 'conservação da área' de cada uma em relação ao quadrado inicial, bem como, depois na construção da pavimentação final, apesar de invocarem o uso da Translação como sendo a isometria principal, conseguem identificar também a Rotação nos projetos. Em cada pavimentação, é assim possível identificar várias Isometrias.

Julgamos ainda interessante referir que, apesar de alguns projetos envolverem estudos e construções mais complexos que outros, mesmo nos mais simples, os alunos foram desafiados a 'dar vida' as suas pavimentações. Se atendermos ainda na Figura 6, vejamos como o colocar de um ponto (olho) e o traçar de uns riscos, não só parece retratado um animal, como reforça a ideia de se obterem figuras contrastantes, tornando-as diferentes, apesar de na sua base estarem figuras geometricamente iguais, procedimentos igualmente adotados por Escher.

Decorrente do nosso questionar quanto à existência de várias Isometrias nos seus projetos, alguns alunos acabariam por reconhecer tal facto e, por forma a destacar algumas dessas transformações, acabariam por fazer uso da cor, para salientar as referidas transformações. Assim, definida a pavimentação, em simultâneo com a referida análise às Isometrias usadas, iniciou-se a fase do 'estudo da cor'. Tal como referido pelo próprio, o estudo da cor era algo a que Escher dava particular atenção. Os mesmos procedimentos foram adotados, sendo esta fase do estudo feita com algum detalhe e testando várias alternativas. Não só a parte da combinação de cores foi esteticamente ponderada, como o cuidado em tornar as imagens efetivamente contrastantes na planificação foi notável. Vejam-se alguns desses estudos na Figura 7.

Figura 7: Estudo da cor na pavimentação final



A título de curiosidade, tornando clara a interligação entre as várias etapas e a possibilidade de tornar o trabalho ainda mais adequado aos gostos de cada um, até na fase do estudo da cor foi possível verificar alterações ao que estava definido. Veja-se a primeira imagem da Figura 8 onde, decorrente do estudo da cor, o Élio acabaria por introduzir algumas alterações ao seu projeto, onde uma espécie de cabelo, viria a dar lugar a um outro 'palhaço', algo que ele viria a identificar como o 'palhaço triste e o palhaço contente'.

A última etapa do projeto decorreu nas oficinas, onde se concretizou a passagem das pavimentações finais para o azulejo e pintura dos mesmos. Nesta parte a motivação dos alunos estava no seu auge e sentia-se um 'orgulho' muito pessoal pelo seu trabalho. Beneficiando da experiência resultante de trabalhos anteriores de pintura em azulejo, toda esta fase de decalque dos projetos para o azulejo e pintura dos mesmos decorreu com grande normalidade e sem situações a destacar.

Na Figura 8, podemos observar algumas imagens que retratam o trabalho feito.

Figura 8: Pintura das pavimentações finais em azulejo (1)



Pintados os painéis, todos aguardavam com expectativa o tirar dos trabalhos da mufla⁷, após a cozedura, e verem o resultado final. Na Figura 9 podemos observar alguns dos trabalhos.

Figura 9: Pavimentações finais pintadas em azulejo (2)



⁷ A mufla (ou forno mufla) é bastante similar a uma estufa, uma câmara metálica, sendo utilizado, principalmente, quando da necessidade de temperaturas muito elevadas, neste caso para cozedura do azulejo.

4 Conclusão

Face à opção de incluir a Arte no ensino de conceitos/conteúdos matemáticos (de um modo transversal e também interdisciplinar), julgamos que os resultados superam em muito o inicialmente esperado. Parte desse sucesso deveu a três fatores: (1) ao investimento feito na análise da obra de Escher e a forma como este inclui a Matemática nos seus trabalhos; (2) ao rigor matemático a que nos exigimos e também exigido aos alunos; e (3) à aposta, na utilização conceitos matemáticos na produção artística, apelando à sensibilidade e capacidade de visualização e representação geométrica.

Mesmo partindo da Arte, muita Matemática esteve presente na base da consecução dos trabalhos que os alunos desenvolveram, seja na exploração dos conceitos e vocabulário matemáticos, seja na utilização de terminologia adequada. Além disso, a implementação deste projeto permitiu recuperar e trazer para a sala de aula um grupo de alunos em situação de abandono escolar, enriquecendo-os artística e matematicamente. Em suma, em toda a atividade, sentimos que se 'respirou', que se 'viveu', que se 'sentiu' a presença da Expressão Gráfica na Arte e na Matemática.

Agradecimentos

Um agradecimento pela disponibilidade e colaboração dos elementos pertencentes à Comissão Executiva da Escola Secundária/3 José Cardoso Pires e dos colegas que integram as Equipas Pedagógicas dos CEF. Um reconhecimento particular ao João, formador da CFT, elemento fundamental na implementação e concretização do projeto.

Referências

- ERNEST, B. **The Magic Mirror of MC. Stradbrok**. Netherlands: Tarquin Publications, 1985
- ESCHER, M. **Gravuras e Desenhos**. Hamburgo: Taschen, 1994.
- ESCHER, M., BOOL, F., & LOCHER, J. L. **MC Escher: His Life and Complete Graphic Work: with a Fully Illustrated Catalogue**. (J. L. Locher, Ed.). HN Abrams, 1982.
- M.C. ESCHER FOUNDATION. **Website Oficial de M. C. Escher**. Obtido em 9 de Julho de 2016, de <http://www.mcescher.com/>, (n.d.)
- MARTINHO, M. **MC Escher: arte e matemática**. Guimarães: Gráfica Covense, Lda. Associação de Professores de Matemática, 1998.
- RAMOS, F. **A Arte de Escher e a Matemática: uma experiência de ensino**. Tese de Mestrado. FCT - UNL, 2016.
- SAMPAIO, P. **A Matemática através da Arte de MC Escher**. *Millenium*. Retrieved from <http://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/1198>, 2012.
- SCHATTSCHNEIDER, D. **M.C. Escher: Visions of Symmetry**. New York: Harry Abrams, 2004.